

**MATHEMATISCHE  
ANNALEN**

**117. BAND**



# MATHEMATICS ANALYSIS

Author: [illegible]  
Editor: [illegible]

First Edition - 1950

Second Edition - 1955

Third Edition - 1960

Fourth Edition - 1965

Fifth Edition - 1970



Published by [illegible]  
[illegible]



# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRUNDET 1868 DURCH  
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH  
FELIX KLEIN · DAVID HILBERT

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

ERICH HECKE  
IN HAMBURG

UNTER MITWIRKUNG VON

HEINRICH BEHNKE    BARTEL L. VAN DER WAERDEN  
IN MÜNSTER I.W.                      IN LEIPZIG

117. BAND



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1940/1941

# MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN VON DR. WILHELM FRIEDRICH SCHUBERT

VERLAG VON FRIEDRICH VON SIEBEL

ALLE RECHTRESERVEN SIND BEHALTEN

DRUCKT IN DER DRUCKEREI

VERLAG

ALLE RECHTRESERVEN SIND BEHALTEN

ALLE RECHTRESERVEN SIND BEHALTEN



Unveränderter Nachdruck 1975

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

# Inhalt des 117. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
<b>Ackermann, W.</b> , Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie . . . . .	162
(Anschrift: Burgsteinfurt, Moltkestraße 9)	
<b>Ackermann-Teubnerpreis 1938</b> . . . . .	140
Aus dem Jahresbericht der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissen- schaften für das Jahr 1939. Mathematisch-physische Preisaufgabe 1940 . .	776
<b>Bachmann, Fr.</b> , Stufen der absoluten Geometrie. Die Frage nach der Unabhängigkeit der Anordnung . . . . .	197
(Anschrift: Marburg a. d. Lahn, Universitätsstraße 46)	
<b>Behnke, H.</b> , Über die Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen mehrerer Ver- änderlichen und den Zusammenhang der Singularitäten . . . . .	89
(Anschrift: Münster i. Westf., Hüfferstraße 60)	
<b>Bottoms, O.</b> , Eine Geometrie mit unvollständiger Anordnung . . . . .	17
(Anschrift: Deventer [Holland], Zwolsche Weg 76)	
<b>Brandt, H.</b> , Über die Zerlegungsgesetze der rationalen Zahlen in Quaternionen- Körpern. (Aus einem Briefe an Herrn F. Hecke) . . . . .	758
(Anschrift: Halle a. d. Saale, Reichardtstraße 6)	
<b>Chow, W.-L.</b> , Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	98
(Anschrift: Shanghai [China], 475 Route Tenant de la Tour)	
<b>Doetsch, G.</b> , Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Integraltransformationen (Anschrift: Freiburg i. Br., Riedbergstraße 8 [Günterstal]) . . . . .	106
<b>Foussanis, Chr.</b> , Determinanten aus $S$ -Funktionen . . . . .	27
(Anschrift: Leipzig C 1, Kochstraße 8 <sup>III</sup> r.)	
<b>Hopf, E.</b> , Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus. II . . . . .	590
(Anschrift: Leipzig S 3, Mensdorfer Straße 9)	
<b>Hopf, E.</b> , Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik . . . . .	764
(Anschrift: Leipzig S 3, Mensdorfer Straße 9)	
<b>Horn, J.</b> , Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen . . . . .	384
(Anschrift: Darmstadt, Mathildenstraße 10)	
<b>Horn, J.</b> , Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen im Schnittpunkt dreier Singularitäten. (Fortsetzung der Arbeit in Band 115) . . . . .	579
(Anschrift: Darmstadt, Mathildenstraße 10)	
<b>Igilsch, R.</b> , Über lineare Integralgleichungen mit vom Parameter abhängigem Kern . . . . .	129
(Anschrift: Braunschweig, Wilhelm-Bode-Straße 12)	
<b>Maas, H.</b> , Zur Theorie der automorphen Funktionen von $n$ Veränderlichen . . . . .	538
(Anschrift: Heidelberg, Hauptstraße 76 <sup>II</sup> bei Gießen)	
<b>Mehmke, R.</b> , Zur metrischen Geometrie quadratischer Gebilde . . . . .	1
(Anschrift: Stuttgart-Degerloch, Löwenstraße 102 <sup>I</sup> )	
<b>Morris, R. M.</b> , The internal problems of two dimensional potential theory . . . . .	31
(Anschrift: Cambridge [England], Girton College)	
<b>Perron, O.</b> , Modulartige lückenlose Ausfüllung des $R_n$ mit kongruenten Würfeln. I. . . . .	415
(Anschrift: München 27, Friedrich-Herschel-Straße 11)	
<b>Perron, O.</b> , Modulartige lückenlose Ausfüllung des $R_n$ mit kongruenten Würfeln. II. . . . .	609
(Anschrift: München 27, Friedrich-Herschel-Straße 11)	
<b>Perron, O.</b> , Das Verschwinden der Klammerasymbole in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme . . . . .	687
(Anschrift: München 27, Friedrich-Herschel-Straße 11)	

	Seite
<b>Petersson, H.</b> , Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II. . . . .	39
(Anschrift: Prag XVI, Zborovská 22 <sup>III</sup> )	
<b>Petersson, H.</b> , Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. III. . . . .	277
(Anschrift: Prag XVI in Böhmen, Zborovská 22 <sup>III</sup> bei Zuber)	
<b>Petersson, H.</b> , Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen . . . . .	453
(Anschrift: Prag II, Mathematisches Institut der Deutschen Karls-Universität, Weinberggasse 3)	
<b>Pospíšil, B.</b> , Über die meßbaren Funktionen . . . . .	327
(Anschrift: Brünn in Mähren, Sirotčí 36)	
<b>Reichardt, H.</b> , Über die Diophantische Gleichung $ax^4 + bx^3y^2 + cy^4 = ez^2$ . . . . .	235
(Anschrift: Leipzig 8 3, Kronprinzenstraße 85 <sup>III</sup> )	
<b>Reilich, Fr.</b> , Störungstheorie der Spektralzerlegung. IV. . . . .	356
(Anschrift: Dresden, Bismarckplatz 8)	
<b>Reilich, Fr.</b> , Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	587
(Anschrift: Dresden, Bismarckplatz 8)	
<b>Schmidt, E.</b> , Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet . . . . .	301
(Anschrift: Charlottenburg, Bismarckstraße 107)	
<b>Schoeneberg, B.</b> , Über die $\zeta$ -Funktion einfacher hyperkomplexer Systeme . . . . .	85
(Anschrift: Hamburg 13, Klosterallee 33)	
<b>Steck, M.</b> , Das schwache E. P.-Axiom und die Beweise der Anordnungsaxiome . . . . .	195
(Anschrift: München-Solln, Streblstraße 12)	
<b>Stein, K.</b> , Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen . . . . .	727
(Anschrift: Münster i. Westfalen, Mathematisches Seminar der Universität)	
<b>Tautz, G.</b> , Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen. I. . . . .	694
(Anschrift: Breslau 16, Auenstraße 18)	
<b>Töpfer, H.</b> , Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen, insbesondere von $\sin z$ und $\cos z$ . . . . .	65
(Anschrift: Rheinberg [Rhld.], Rheinstraße 17)	
<b>Vassiliou, Ph.</b> , Über die Galoissche Gruppe einer Klasse von trinomischen Gleichungen . . . . .	448
(Anschrift: Athen in Griechenland, Keas 30)	
<b>van der Waerden, B. L.</b> , Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik . . . . .	141
(Anschrift: Leipzig 8 3, Fockestraße 8a)	
<b>Wagner, K.</b> , Charakterisierung stetiger Kurven mit Hilfe eines allgemeinen Richtungsbegriffs für Punktmengen . . . . .	672
(Anschrift: Köln, Mathematisches Seminar der Universität)	
<b>Wecken, Fr.</b> , Fixpunktklassen. I. . . . .	659
(Anschrift: Marburg a. d. Lahn, Frankfurter Straße 38 <sup>II</sup> )	
<b>Wolf, Fr.</b> , Ein Eindeigkeitsatz für analytische Funktionen . . . . .	383
(Anschrift: Stockholm in Schweden, Norrtwellsgade 53/1 h.)	

# Zur metrischen Geometrie quadratischer Gebilde.

Von

R. Mehmke in Stuttgart.

## Einleitung.

Über die senkrechten Projektionen eines Vektors auf die Seiten eines regelmäßigen Vielecks und im Raume auf die Flächennormalen und Flächen eines regelmäßigen Körpers hat E. Schönhardt Sätze bewiesen, die von mir verallgemeinert worden sind <sup>1)</sup>. Statt auf regelmäßig angeordnete Geraden oder Ebenen kann man auch auf Geraden und Ebenen von beliebiger gegenseitiger Lage projizieren, und zwar außer Vektoren auch Punkte und Stücke von Geraden und Ebenen, ferner kann man statt des durch senkrechte Projektion bedingten absoluten Polarsystems ein beliebiges Polarsystem oder auch eine allgemeine Korrelation zugrunde legen. Von den zahlreichen Sätzen, auf die man so geführt wird, sollen hier einige der am nächsten liegenden entwickelt werden, und zwar mit Hilfe der Möbius-Grassmannschen Punktrechnung. Es handelt sich, der Überschrift entsprechend, um lauter metrische Beziehungen; sie lassen sich oft in Sätze der Mechanik einkleiden. Anfangs wird euklidische Maßbestimmung vorausgesetzt, später auch allgemeinste projektive Maßbestimmung zugelassen.

## I. Senkrechte Projektion auf Geraden in der Ebene.

Statt eines freien, d. h. beliebig parallel verlegbaren Vektors kann man stets einen an seine Linie gebundenen Vektor, einen sogenannten Stab, in der Sprache der Mechanik eine auf einen starren Körper wirkende Kraft betrachten, welche Bemerkung für alles Folgende gilt.

### 1. Projektionen eines Punktes $x$ .

Mit  $A$  sei ein beliebiger Stab der Länge Eins, anders aufgefaßt eine unbegrenzte Gerade vom Zahlwert Eins bezeichnet. Bei euklidischer Maßbestimmung stellt alsdann  $|A$  („Ergänzung  $A$ “) den unendlich fernen Punkt in der Richtung senkrecht zu  $A$  vor, der auch durch einen zu  $A$  senkrechten Vektor der Länge Eins vertreten werden kann, folglich das äußere

<sup>1)</sup> Zur Geometrie der Polygone, Polyeder und Polytope, Math. Zeitschr. Bd. 45 (1939), Heft 3.

Produkt  $[x|A]$  die zu  $A$  senkrechte Gerade durch  $x$  und  $[x|AA]$  die senkrechte Projektion  $x_a$  von  $x$  auf  $A$ :

$$(1) \quad x_a = [x|AA].$$

Offenbar erhält  $x_a$  die Masse Eins, wenn dieselbe dem Punkte  $x$  beigelegt worden ist. Nach Einführung des Lückenausdrucks  $L$  mit einer durch  $*$  bezeichneten Lücke für  $x$  und zwei vertauschbaren, durch  $*_1$  dargestellten Lücken für  $A$ , nämlich

$$(2) \quad L = [*|*_1*_1],$$

kann man schreiben:

$$(3) \quad x_a = L(x, A^2),$$

wo  $A^2$  die doppelt zu denkende Gerade  $A$ , als ausgeartete Kurve zweiter Ordnung, bezeichnet. Hierdurch ist eine Verbindung mit der Theorie der Kurven zweiter Ordnung hergestellt. Soweit nur Quadrate von Geraden und algebraische Produkte zweier verschiedenen Geraden vorkommen, ist es nicht nötig, die Geraden mit einem bestimmten Durchlaufsinne zu versehen (sie zu „orientieren“).

Es ist  $L(x, A^2)$  eine homogene lineare Funktion sowohl von  $x$  wie von  $A^2$ , weshalb  $(x, A^2)$  als Dyade erscheint, welche  $x$  zum Linksglied und  $A^2$  zum Rechtsglied hat, und weil der ganze Ausdruck eine homogene lineare Funktion dieser Dyade ist, so hat  $L$  die Eigenschaften eines Faktors.

Angenommen, man könne  $A^2$  aus den Quadraten der  $n$  Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_n$  linear zusammensetzen:

$$(4) \quad A^2 = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \dots + \lambda_n A_n^2.$$

Nennt man  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die senkrechten Projektionen von  $x$  auf diese Geraden:

$$x_i = L(x, A_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

so folgt aus (4) durch Multiplikation mit  $L$ :

$$(5) \quad x_a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Wenn man also den Punkten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bzw. die von der Lage der Geraden  $A, A_1, \dots, A_n$  abhängenden, aber von der Lage des Punktes  $x$  unabhängigen Massen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  beilegt, so fällt ihr Schwerpunkt auf  $x_a$ .

Den Fall  $n = 3$  hat man, wenn die vier Geraden  $A, A_1, A_2, A_3$  einem Strahlenbüschel angehören. Die Zahlgrößen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  kann man hier so finden: Sei  $p_1$  irgendein Punkt auf  $A_2$ ,  $q_1$  ein solcher auf  $A_3$ , dann verschwinden die äußeren Produkte  $[A_2^2 p_1]$  und  $[A_3^2 q_1]$ , so daß die äußere Multiplikation der Gleichung

$$A^2 = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \lambda_3 A_3^2$$

mit  $p_1$  und  $q_1$  liefert:

$$[A^2 p_1 q_1] = \lambda_1 [A_1^2 p_1 q_1],$$

oder weil

$$[A^2 p_1 q_1] = [A p_1] [A q_1] \text{ usw.}$$

ist:

$$\lambda_1 = \frac{[A_1 p_1] [A_1 q_1]}{[A p_1] [A q_1]}.$$

Auf entsprechende Weise lassen  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  sich ausdrücken. Es kommen also nur die Abstände von Punkten und Geraden vor. (Die Punktepaare  $p_1 q_1$  usw. sind als ausgeartete Kurven zweiter Klasse anzusehen.) Gehen wir zum Falle  $n = 5$  über! Er ist vorhanden, wenn  $A, A_1, A_2, \dots, A_5$  Tangenten einer und derselben Kurve zweiter Klasse sind. Um die Faktoren  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$  zu bestimmen, verwenden wir diesmal den Schnittpunkt  $p_1$  der Geraden  $A_2$  und  $A_3$  sowie den Schnittpunkt  $q_1$  der Geraden  $A_4$  und  $A_5$ :

$$p_1 = [A_2 A_3], \quad q_1 = [A_4 A_5].$$

Das äußere Produkt von

$$A^2 = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \lambda_3 A_3^2 + \lambda_4 A_4^2 + \lambda_5 A_5^2$$

mit  $p_1$  und  $q_1$  ergibt wegen

$$[A_2^2 p_1] = [A_3^2 p_1] = 0, \quad [A_4^2 q_1] = [A_5^2 q_1] = 0:$$

$$[A p_1] [A q_1] = \lambda_1 [A_1 p_1] [A_1 q_1],$$

womit  $\lambda_1$  gefunden ist. Entsprechendes gilt für die übrigen  $\lambda$ . Es kommen wieder nur Abstände von Punkten und Geraden vor.

Bezeichnet  $U$  die unendlich ferne Gerade der Ebene, so ist

$$L(x, U^2) = [x | U U] = 0.$$

Deshalb geben bei einer Parabel schon fünf endliche Tangenten  $A, A_1, A_2, A_3, A_4$  Anlaß zu einem Satze, enthalten in der Gleichung

$$x_a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4.$$

Die Quadrate von sieben beliebigen Geraden der Ebene sind stets linear abhängig:  $n = 6$ . Um auch in diesem Falle mit Abständen von Punkten und Geraden auszukommen, kann man so vorgehen. Man multipliziere die Gleichung

$$A^2 = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \dots + \lambda_6 A_6^2$$

einmal mit dem Schnittpunkte von  $A_3$  und  $A_4$  sowie von  $A_5$  und  $A_6$ , ein zweitesmal mit demjenigen von  $A_3$  und  $A_5$  sowie von  $A_4$  und  $A_6$ . Dann fallen die Glieder mit  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  fort und man erhält zwei lineare Gleichungen für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , aus welchen diese Unbekannten sich ergeben. Ähnlich für die anderen  $\lambda$ . Unmittelbar ergibt sich  $\lambda_i$  auf die folgende Weise. Es bezeichne  $k_i$

die Kurve zweiter Klasse, welche die Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_6$  mit Ausnahme von  $A_i$  berührt. Es verschwinden dann die Produkte  $[A_j^2 k_i]$ , bei welchen  $i$  und  $j$  verschieden sind, und man erhält:

$$[A^2 k_i] = \lambda_i [A_i^2 k_i],$$

womit  $\lambda_i$  gefunden ist. Auf mögliche geometrische Deutungen der Produkte  $[A^2 k_i]$  und  $[A_i^2 k_i]$  soll hier nicht eingegangen werden.

## 2. Fortsetzung.

Setzt man

$$(6) \quad \sum \lambda_i A_i^2 = K^{(2)},$$

so führt  $K^{(2)}$ , welches eine Geraden- oder Stab-Form vorstellt, zu einer Polarität, wenn man dem beliebigen Punkt  $x$  die Gerade

$$[K^{(2)}x] = \sum \lambda_i [A_i x] A_i$$

entsprechen läßt. (Es kann die Ordnungskurve dieses Polarfeldes reell oder imaginär sein, denn bei beliebigen Werten der  $\lambda_i$  ist auch  $[K^{(2)}x^2]$  eines jeden Wertes, Null eingeschlossen, fähig.)

Heißen  $m$  der Mittelpunkt,  $B$  und  $C$  die Geraden vom Zahlwert Eins in den Achsen jenes Polarfeldes, so kann man  $K^{(2)}$  die Form geben:

$$(7) \quad K^{(2)} = \mu B^2 + \nu C^2 + \sigma U^2.$$

Wenn man wieder  $L(x, A_i^{(2)}) = x_i$  setzt, auch den Schwerpunkt der mit den Massen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  versehenen Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $x'$  und seine Masse mit  $\lambda$  bezeichnet:

$$\lambda x' = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

ferner  $x_b$  und  $x_c$  die senkrechten Projektionen von  $x$  auf  $B$  und  $C$  nennt:

$$L(x, B^2) = x_b, \quad L(x, C^2) = x_c,$$

so wird jetzt, weil, wie schon bekannt,  $L(x, U^2)$  verschwindet:

$$(8) \quad \lambda x' = \mu x_b + \nu x_c,$$

d. h.  $x'$  liegt auf der Strecke  $\overline{x_b x_c}$  und teilt sie immer in demselben Verhältnis  $\nu : \mu$ . In dem Sonderfalle  $\mu = \nu$  liegt  $x'$  in der Mitte zwischen  $m$  und  $x$ , so daß durch Zuordnung von  $x$  und  $x'$  zwei ähnlich liegende ähnliche Punktsysteme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  mit  $m$  als Doppelpunkt entstehen, während bei ungleichen Werten von  $\mu$  und  $\nu$  jene beiden Systeme nur affin sind.

Weitere Sätze ergeben sich bei Benutzung der Tatsache, daß wenn  $A_1, A_2, A_3$  die Seiten eines Polardreiseits oder  $A_1 A_2 A_3 A_4$  die Seiten eines

Polarvierseits in dem zu  $K^{(2)}$  gehörigen Polarfeld bezeichnen, man  $K^{(2)}$  die Form geben kann

$$(9) \quad K^{(2)} = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \lambda_3 A_3^2$$

bzw.

$$(10) \quad K^{(2)} = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \lambda_3 A_3^2 + \lambda_4 A_4^2.$$

Die fraglichen Sätze scheinen mir aber weniger bemerkenswert zu sein, als die verwandten Sätze über die senkrechte Projektion auf Ebenen, zu denen die Betrachtung von Polvierflächen, Polfünfflächen und Polsechseflächen in einem Polarraum führt (siehe Nr. 6). Gehen wir noch auf die Konstruktion von  $m, B, C$  und auf die Bestimmung der Vorzeichen  $\mu, \nu, \sigma$  ein! Wir nehmen an, daß die Geraden  $A_i$  nicht parallel sind. Durch den Mittelpunkt  $m$  gehen die Polaren aller unendlich fernen Punkte. Seien die beiden beliebigen, aber nicht parallelen Vektoren  $v$  und  $w$  die endlichen Vertreter von zwei verschiedenen unendlich fernen Punkten. Ihre Polaren sind

$$[K^{(2)} v] = \sum [A_i^2 v] = \sum [A_i v] A_i$$

und

$$[K^{(2)} w] = \sum [A_i^2 w] = \sum [A_i w] A_i.$$

Man muß also in den Geraden  $A_i$  Kräfte anbringen vom Betrage  $[A_i v]$  bzw.  $[A_i w]$ , d. h. gleich der zu  $A_i$  senkrechten Komponente von  $v$  bzw.  $w$ , dann geht ihre Mittelkraft (Resultante) durch  $m$ , welcher Punkt, so als Schnittpunkt zweier verschiedenen Geraden gefunden ist. Die Richtungen von  $v$  und  $[K^{(2)} v]$  sowie von  $w$  und  $[K^{(2)} w]$  sind in unserem Polarfelde konjugiert, man hat also zwei Paare konjugierter Strahlen im Strahlenbüschel zum Scheitel  $m$ , kann daher die Achsen  $B$  und  $C$  als die zueinander senkrechten Strahlen dieser Involution auf eine der bekannten Weisen konstruieren. Nun sei  $v'$  ein Vektor der Länge Eins in  $B$ ,  $w'$  ein solcher in  $C$ , dann verschwinden die inneren Produkte  $[B | v]$ ,  $[C | w]$ ,  $[U | v]$  und  $[U | w]$ , so daß kommt:

$$\mu = \sum [A_i | v']^2, \quad \nu = \sum [A_i | w']^2.$$

Um noch  $\sigma$  zu finden, bilden wir das Produkt  $[K^{(2)} m^2]$ . Es ergibt sich

$$[Bm] = [Cm] = 0, \quad [Um] = 1,$$

folglich ist

$$\sigma = \sum [A_i m]^2.$$

### 3. Projektionen eines Stabes.

Die als Stab aufgefaßte senkrechte Projektion  $X_a$  eines beliebigen Stabes  $X$  auf irgendeine Gerade  $A$  vom Zahlwert Eins ist offenbar

$$X_a = [X A A],$$

oder wenn man wieder den durch Gleichung (2) erklärten Lückenausdruck  $L$  benutzt:

$$(11) \quad X_a = L(X, A^2).$$

Es lassen sich nun ähnliche Anwendungen machen, wie unter Nr. 1 und Nr. 2 auf die senkrechten Projektionen eines Punktes  $x$ . Sind z. B. die Quadrate von  $n$  Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_n$  linear abhängig:

$$(12) \quad \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \dots + \lambda_n A_n^2 = 0$$

und heißen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  die senkrechten Projektionen eines Stabes  $X$  auf diese Geraden:

$$X_i = L(X, A_i^2),$$

so ergibt sich

$$(13) \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = 0,$$

also die bzw. mit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  multiplizierten, als Kräfte aufgefaßten Stäbe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  befinden sich im Gleichgewicht, wobei die Faktoren  $\lambda_i$  von  $X$  unabhängig sind.

Besonders in Betracht kommen wieder die Fälle  $n = 4, n = 6, n = 7$ . Die Vorzeichen  $\lambda_i$  kann man wieder so bestimmen wie unter Nr. 1.

Bei beliebiger Lage der Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_n$  und beliebigen Werten der Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  hat man wieder die Gleichungen (6) und (7) anzuwenden in der Form

$$\lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \dots + \lambda_n A_n^2 = \mu B^2 + \nu C^2 + \sigma U^2.$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit  $L$  ergibt, wenn man die senkrechten Projektionen von  $X$  auf  $B$  und  $C$  bzw. mit  $X_b$  und  $X_c$  bezeichnet:

$$(14) \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = \mu X_b + \nu X_c.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung einen Stab vorstellt, welcher durch den Schnittpunkt von  $B$  und  $C$ , also durch den Punkt  $m$  geht, so gilt folgender Satz:

Betrachtet man die senkrechten Projektionen einer Strecke beliebiger Länge und Richtung auf irgendwelche Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_n$  als Kräfte, die auf einen starren Körper wirken, und multipliziert ihre Stärken mit den beliebigen Zahlgrößen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , so geht die Resultante der so erhaltenen Kräfte immer durch einen und denselben Punkt  $m$ , der nur von der Lage der Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sowie den Werten der  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  abhängt. (Im Falle eines negativen  $\lambda_i$  hat man die Richtung der  $i$ -ten Projektion umzukehren.) Ist  $\mu = \nu$ , so wird überdies die fragliche Resultante parallel zur gegebenen Strecke und ihre Stärke beträgt das  $\mu$ -fache der Länge jener Strecke.

Auch hier wäre es möglich, Sätze auszusprechen, die auf Gleichung (9) und Gleichung (10) beruhen, siehe aber die Bemerkung zu diesen Gleichungen unter Nr. 2.

## II. Senkrechte Projektion auf Ebenen.

4. In diesem und im nächsten Abschnitt wollen wir uns auf die Herleitung von Sätzen beschränken, denn es führte zu weit, auf Konstruktionen einzugehen, weil sie die Anwendung der darstellenden Geometrie verlangten. (Die Vorzeichen  $\mu_i$  und  $\sigma$  der späteren Gleichung (19) sind zwar leicht auszudrücken, siehe die Gleichungen (25) und (26).)

Bezeichnet  $\alpha$  einen an seine Ebene gebundenen Bivektor, ein sogenanntes Blatt, und zwar von der Flächenzahl Eins, in anderer Auffassung eine unbegrenzte Ebene vom Zahlwert Eins, dann bedeutet bei euklidischer Maßbestimmung  $|\alpha|$  („Ergänzung  $\alpha$ “) einen zu  $\alpha$  senkrechten Vektor der Länge Eins, weshalb man für die senkrechte Projektion  $x_\alpha$  des beliebigen Punktes  $x$  auf  $\alpha$  bei Benutzung des durch Gleichung (2) erklärten Lückenausdrucks  $L$  erhält:

$$(15) \quad x_\alpha = L(x, \alpha^2),$$

wobei dem Punkte  $x_\alpha$  zugleich mit  $x$  die Masse Eins zukommt und  $\alpha^2$ , als doppelt zu denkende Ebene  $\alpha$ , eine ausgeartete Fläche zweiter Ordnung vorstellt.

Ist  $\alpha^2$  linear abhängig von den Quadraten der  $n$  Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , etwa

$$(16) \quad \alpha^2 = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2,$$

und heißt  $x_i$  die senkrechte Projektion von  $x$  auf  $\alpha_i$ , so folgt aus Gleichung (16) durch Multiplikation mit  $L$ :

$$(17) \quad x_\alpha = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n,$$

also die bzw. mit den Massen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  versehenen Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  haben als Schwerpunkt  $x_\alpha$ , und es hängen die  $\lambda_i$  nur von der gegenseitigen Lage der Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ab, nicht aber von der Lage des Punktes  $x$ . Man muß unterscheiden die Fälle  $n = 3$  (Ebenen eines Büschels),  $n = 6$  (Ebenen eines Bündels),  $n = 9$  (Tangentenebenen einer Fläche zweiten Grades) und  $n = 10$  (Ebenen, die nicht eine Fläche zweiten Grades berühren). Wenn die Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  gegeben sind, so kann man die Faktoren  $\lambda_i$  in Gleichung (16) so darstellen: Es bezeichne  $f_i^{(3)}$  eine — bzw. im Falle  $n = 10$  diejenige — Fläche zweiter Klasse, welche die Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  mit Ausnahme von  $\alpha_i$  berührt, so daß  $[\alpha_i^2 f_i^{(3)}]$  verschwindet, wenn  $i$  und  $j$  verschieden sind. Es ergibt sich dann offenbar

$$\lambda_i = \frac{[\alpha_i^2 f_i^{(2)}]}{[\alpha^2 f_i^{(2)}]}.$$

In den Fällen  $n = 3$  und  $n = 6$  könnte man auch ausgeartete Flächen zweiter Klasse benutzen (vgl. das Vorgehen unter Nr. 1).

## 5. Fortsetzung.

Wir führen die quadratische Ebenenform ein:

$$(18) \quad \varphi^{(2)} = \sum \lambda_i \alpha_i^2.$$

Ordnet man dem beliebigen Punkt  $x$  die Ebene  $[\varphi^{(2)} x]$  zu, so entsteht eine Polarität, weil wenn  $x'$  irgendeinen zweiten Punkt bezeichnet,

$$[\varphi^{(2)} x \cdot x'] = [\varphi^{(2)} \cdot (xx')] = [\varphi^{(2)} x' \cdot x]$$

ist, mithin

$$[\varphi^{(2)} x \cdot x'] \quad \text{und} \quad [\varphi^{(2)} x' \cdot x]$$

gleichzeitig verschwinden, also involutorisches Entsprechen stattfindet. (Obwohl bei reell vorausgesetzten  $\lambda_i$  die quadratische Form

$$[\varphi^{(2)} x^2] = \sum \lambda_i [\alpha_i x]^2$$

reell ist, braucht keineswegs die Ordnungsfläche der Polarität reell zu sein.) Der so erklärte Polarraum habe als Mittelpunkt  $m$ , als Hauptebenen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Dann ist, wenn  $\tilde{\omega}$  die unendlich ferne Ebene bezeichnet,  $\varphi^{(2)}$  von der Form

$$(19) \quad \varphi^{(2)} = \mu_1 \beta_1^2 + \mu_2 \beta_2^2 + \mu_3 \beta_3^2 + \sigma \tilde{\omega}^2.$$

Die senkrechte Projektion von  $x$  auf  $\alpha_i$  werde  $x_i$  genannt, und es heiße wie früher  $x'$  der Schwerpunkt der bzw. mit den Massen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  versehenen Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Dann ergibt sich, wenn man die senkrechte Projektion von  $x$  auf  $\beta_i$  mit  $x_{\beta_i}$  und mit  $\lambda = \sum \lambda_i$  die Gesamtmasse der Punkte  $x_i$  bezeichnet, weil  $L(x, \tilde{\omega}^2)$  verschwindet:

$$(20) \quad \lambda x' = \mu_1 x_{\beta_1} + \mu_2 x_{\beta_2} + \mu_3 x_{\beta_3}.$$

Hiernach liegt  $x'$  in der Verbindungsebene der Punkte  $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, x_{\beta_3}$  und bildet zusammen mit fraglichen Punkten ein Viereck, das affin zu seiner Anfangsgestalt bleibt, wenn sich die Lage von  $x$  beliebig ändert. Ist  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ , dann liegt  $x'$  auf der Verbindungslinie von  $x$  mit  $m$ , und zwar so, daß

$$\overline{mx'} = \frac{1}{3} \overline{mx}$$

wird. Es entstehen dann durch Zuordnung von  $x$  und  $x'$  zwei zueinander ähnlich liegende ähnliche Punktsysteme mit  $m$  als Doppelpunkt.

## 6. Projektionen eines Stabes.

Die senkrechte Projektion  $X_\alpha$  eines Stabes  $X$  auf  $\alpha$  ist offenbar

$$(21) \quad X_\alpha = L(X, \alpha^2).$$

Besteht zwischen den Quadraten von  $n$  Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  die homogene lineare Gleichung

$$(22) \quad \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2 = 0$$

und heißt  $X_i$  die senkrechte Projektion von  $X$  auf  $\alpha_i$ , so folgt aus (22) durch Multiplikation mit  $L$ :

$$(23) \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n = 0,$$

d. h. es halten die  $n$  Kräfte  $\lambda_i X_i$  einander Gleichgewicht und, ganz wie bei dem entsprechenden Satz in der Ebene, die  $\lambda_i$  sind von der Kraft  $X$  unabhängig. Was die möglichen Fälle betrifft, so herrscht eine lineare Beziehung zwischen den Quadraten von vier Ebenen eines Büschels, sieben Ebenen eines Bündels und ferner zwischen den Quadraten von zehn Tangentenebenen einer Fläche zweiter Klasse und von elf beliebigen Ebenen. Die zugehörigen Sätze erscheinen als räumliche Gegenstücke zu Sätzen unter Nr. 3 über die senkrechte Projektion von Stäben auf Geraden. Wenn die Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  gegeben sind, so lassen die Vorzahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  oder ihre Verhältnisse, auf die es nur ankommt, sich analytisch allgemein so bestimmen: Es bezeichne  $f_{ik}$  eine Fläche zweiter Klasse, welche die Ebenen  $\alpha$  mit Ausnahme von  $\alpha_i$  und  $\alpha_k$  berührt. Multipliziert man Gleichung (22) mit  $f_{ik}$ , so kommt

$$\lambda_i [\alpha_i^2 f_{ik}] + \lambda_k [\alpha_k^2 f_{ik}] = 0$$

also

$$(24) \quad \lambda_i : \lambda_k = - [\alpha_k^2 f_{ik}] : [\alpha_i^2 f_{ik}].$$

In dem ersten der erwähnten Fälle — Ebenen eines Büschels — kommt man auch mit Punktepaaren als ausgeartete Flächen zweiter Klasse und infolgedessen mit Abständen von Punkten und Ebenen aus, wenn man so verfährt: Sei  $p_3$  ein beliebiger Punkt in  $\alpha_3$ ,  $q_4$  ein beliebiger Punkt in  $\alpha_4$ , so kommt, wenn diese beiden Punkte weder in  $\alpha_1$  noch in  $\alpha_2$  liegen,

$$\lambda_1 [\alpha_1^2 \cdot p_3 q_4] + \lambda_2 [\alpha_2^2 \cdot p_3 q_4] = 0,$$

mithin

$$(25) \quad \lambda_1 : \lambda_2 = - [\alpha_2 p_3] [\alpha_2 q_4] : [\alpha_1 p_3] [\alpha_1 q_4].$$

Auf entsprechende Weise kann man die Verhältnisse der übrigen  $\lambda$  ausdrücken.

Verschwindet  $\varphi^{(2)} = \sum \lambda_i \alpha_i^2$  nicht, so ist  $\sum \lambda_i X_i$  eine Einzelkraft. Bezeichnet nämlich  $Y$  irgendeine von  $X$  verschiedene Kraft, so ist  $[X \varphi^{(2)} \cdot Y \varphi^{(2)}]$  eine homogene bilineare Funktion von  $X$  und  $Y$ , die für  $Y = X$  verschwindet, folglich eine lineare Funktion des äußeren Produktes  $[X Y]^2$  und wird somit Null für  $Y = X$ , aber  $[X \varphi^{(2)}] [X \varphi^{(2)}] = 0$  ist gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $[X \varphi^{(2)}]$  nicht ein Kraftkreuz (eine Dyname), geometrisch eine Schraube, sondern eine Einzelkraft vorstellt. Zufolge Gleichung (19) ist  $[X \varphi^{(2)}]$  auch die Mittelkraft aus den bzw. mit  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  multi-

<sup>2)</sup> Vgl. hierzu meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, I, 1, Nr. 3<sup>1</sup> S. 117 ff.

plizierten senkrechten Projektionen von  $X$  auf die Hauptebenen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Weil  $[X \varphi^{(2)}]$  linear in bezug auf  $X$  ist, so bedingt eine Zerlegung von  $X$  in Seitenkräfte (Komponenten) irgendwelcher Art eine entsprechende Zerlegung von  $[X \varphi^{(2)}]$ . Besonders einfach wird wieder der Fall  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ . Zerlegt man jetzt  $X$  in Seitenkräfte bzw. senkrecht zu  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , so findet man leicht bei jeder von ihnen, daß nun die senkrechten Projektionen auf jene drei Ebenen statisch gleichwertig sind zwei Kräften, bestehend aus der gegebenen Kraft sowie der aus ihr durch parallele Verlegung mit dem Angriffspunkt nach  $m$  hervorgehenden Kraft. Mithin besteht in diesem Falle, wenn die auf die angegebene Weise aus  $X$  erhaltene Kraft  $X_m$  genannt wird, folgende Gleichung:

$$(26) \quad L(X, \varphi^{(2)}) = \mu (X + X_m).$$

Kehren wir zum allgemeinen Fall zurück! Die Vorzahlen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  und  $\sigma$  in Gleichung (19) lassen sich so darstellen: Bildet man das innere Produkt von Gleichung (19) der Reihe nach mit  $\beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2$ , so kommt wegen Gleichung (18):

$$(27) \quad \mu_1 = \sum \lambda_i (\alpha_i | \beta_1)^2, \quad \mu_2 = \sum \lambda_i (\alpha_i | \beta_2)^2, \quad \mu_3 = \sum \lambda_i (\alpha_i | \beta_3)^2.$$

Schließlich ergibt noch die Multiplikation von Gleichung (19) mit  $m$  wegen  $[\beta_i m] = 0$ ,  $[\bar{\omega} m] = 1$ :

$$(28) \quad \sigma = \sum \lambda_i (\alpha_i m)^2.$$

Die unter Nr. 3 in Aussicht gestellten Sätze erhält man so: Es gibt im Polarraum Polvierfläche, Polfünffläche und Polsechfläche. Wir fassen diese drei möglichen Fälle in einen zusammen, indem wir von Pol- $n$ -Flächen sprechen. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß wenn die Flächen eines derartigen Vielflaches  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  genannt werden,  $\varphi^{(2)}$  sich auf die Form bringen läßt:

$$(29) \quad \varphi^{(2)} = \sum v_i \gamma_i^2.$$

Das gibt

$$L(X, \varphi^{(2)}) = \sum v_i [X | \gamma_i \gamma_i]$$

oder

$$(30) \quad L(X, \varphi^{(2)}) - \sum v_i X_i = 0.$$

In dieser Gleichung vermindert sich die Zahl der Glieder um eins, wenn man die letzte der Ebenen  $\gamma_i$  mit  $\bar{\omega}$ , der unendlich fernen Ebene, zusammenfallen läßt.

Es erscheint wünschenswert, für  $L(X, \varphi^{(2)})$  eine passende Benennung zu haben, um Gleichungen wie (30) leichter in Worte fassen zu können. Weil nun  $L(X, \varphi^{(2)})$  eine Verallgemeinerung von  $[X | \alpha \alpha]$ , also von der senkrechten oder lotrechten Projektion von  $X$  auf  $\alpha$  ist, so wollen wir  $L(X, \varphi^{(2)})$  den Lotstab von  $X$  in bezug auf den zu  $\varphi^{(2)}$  gehörigen Polarraum nennen und mit  $X_l$  bezeichnen. Dann besagt Gleichung (30), daß der als Kraft aufgefaßte Lot-

stab  $X_i$  von  $X$  bezüglich des zu  $\varphi^{(2)}$  gehörigen Polarraumes zusammen mit den  $n$  Kräften  $(-\gamma_i) X_i$ , also den mit  $(-\gamma_i)$  multiplizierten senkrechten Projektionen von  $X$  auf die Ebenen  $\gamma_i$ , sich im Gleichgewicht befindet.

Wird von den metrischen Beziehungen abgesehen, also nur der lagen-geometrische Inhalt von Gleichung (30) berücksichtigt, so ist über die obigen drei Fälle  $n = 4$ ,  $n = 5$ ,  $n = 6$  folgendes zu sagen. Die Wirkungslinien von vier im Gleichgewicht befindlichen Kräften haben bekanntlich hyperboloidische Lage; ferner gehören die Wirkungslinien von fünf und von sechs Kräften, die einander Gleichgewicht halten, einem Strahlennetz bzw. einem Strahlengewinde (linearen Komplex) an. Den ersten Fall hat man, wenn  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  irgend drei durch  $m$  gehende Ebenen, aber im betrachteten Polarraum paarweise einander konjugiert sind, ferner den zweiten Fall bei einem allgemeinen Polarvierflach und auch bei einem Fünfflach, von dessen Ebenen eine unendlich fern liegt, endlich den dritten Fall, sechs Strahlen eines Gewindes, bei einem allgemeinen Polfünfflach sowie bei einem Polsechsfach, von dessen Ebenen eine unendlich fern ist.

### 7. Projektionen eines Blattes.

Die senkrechte Projektion  $\xi_\alpha$  eines Blattes  $\xi$  auf irgendeine Ebene  $\alpha$  — wieder als Blatt, nicht nur als Bivektor aufgefaßt — kann man offenbar so darstellen:

$$(31) \quad \xi_\alpha = [\xi | \alpha \alpha] = L(\xi, \alpha^2).$$

Es läßt sich also wieder derselbe Lückenausdruck  $L$  verwenden wie bei den Projektionen eines Punktes und eines Stabes unter Nr. 1, 3 und 6. Die aus den Gleichungen (22) und (29) hervorgehenden Sätze scheinen mir nicht genügend bemerkenswert zu sein, um sie in Worte zu fassen<sup>3)</sup>.

Zu untersuchen bleibt noch, was aus der in Gleichung (19) gegebenen Darstellung der quadratischen Form  $\varphi^{(2)}$  folgt. Jene Gleichung, zusammen mit Gleichung (18), ergibt:

$$(32) \quad \sum \lambda_i L(\xi, \alpha_i^2) = \mu_1 L(\xi, \beta_1^2) + \mu_2 L(\xi, \beta_2^2) + \mu_3 L(\xi, \beta_3^2).$$

Weil die Ebenen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  sich in  $m$  schneiden und weil die geometrische Summe dreier Blätter ein durch ihren Schnittpunkt gehendes Blatt ist, so enthält Gleichung (32) folgenden Satz: Die geometrische Summe der mit

<sup>3)</sup> Geometrische Sätze über die Projektionen eines Blattes in Form von Sätzen der Mechanik auszusprechen, wird überhaupt immer dadurch erschwert oder beinahe unmöglich gemacht, daß, obwohl in verschiedenen Teilen der technischen Mechanik und mathematischen Physik Flächenkräfte auftreten, man sie nicht als an ihre Ebenen gebunden anzusehen pflegt, sondern sie wie Kräftepaare der Mechanik als beliebig parallel verlegbar ansieht.

irgendwelchen Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  multiplizierten senkrechten Projektionen eines beliebigen Blattes auf irgendwelche feste Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ist ein Blatt, welches einen bestimmten festen Punkt enthält, nämlich den Mittelpunkt  $m$  des durch die Ebenen  $\alpha_i$  zusammen mit den Zahlen  $\lambda_i$  bestimmten Polarraumes. Ist  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ , so sind  $\xi$  und das aus ihm hervorgehende Blatt parallel.

### 8. Projektionen von Vielecken und von Kurven.

Im vorhergehenden ist unter „Blatt“ schon ein irgendwie begrenztes Stück einer Ebene, nicht eine unbegrenzte Ebene mit einem bestimmten Zahlwert verstanden worden. Wird ein solches parallel verschoben, so ändern seine senkrechten Projektionen auf irgendwelche Ebenen auch nur ihre Lage in diesen Ebenen, weshalb es bei den folgenden Betrachtungen genügt, Bivektoren, die ja beliebig parallel verlegt werden dürfen, ins Auge zu fassen. Nun hat schon Möbius bewiesen, daß die Seiten eines jeden windschiefen Vielecks, in fortlaufendem Sinne genommen und als Kräfte aufgefaßt, zusammen ein Kräftepaar ergeben, das bei der Parallelprojektion auf irgendeine Ebene dem Kräftepaar gleich wird, welches zu derselben Projektion des Vielecks gehört<sup>4)</sup>. Es ist klar, daß statt eines windschiefen Vielecks auch eine geschlossene Raumkurve mit einem bestimmten Durchlaufsinne genommen werden darf. Diese Darlegungen zeigen, daß der unter Nr. 7 gefundene Satz auch für die senkrechten Projektionen von windschiefen Polygonen und von geschlossenen Raumkurven auf beliebige Ebenen gilt.

### III. Projektion auf Geraden im Raum.

9. Im Raum bedeutet bei euklidischer Maßbestimmung  $|A$ , die Ergänzung einer Geraden  $A$  vom Zahlwert Eins, die unendlich ferne Gerade, die den zu  $A$  senkrechten Ebenen gemeinsam ist, folglich  $[x|A]$  die zu  $A$  senkrechte Ebene durch den Punkt  $x$  und  $[x|AA]$  die senkrechte Projektion von  $x$  auf  $A$ . Bezeichnet man sie durch  $x_a$ , so wird

$$(33) \quad x_a = [x|AA] = L(x, A^2),$$

welche Gleichung mit (3) übereinstimmt. Offenbar erhält  $x_a$  wieder denselben Zahlwert wie  $x$ , der wie früher Eins betrage.

Nehmen wir zuerst an,  $A^2$  sei eine homogene lineare Funktion der Quadrate von  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , so daß wie unter Nr. 1 ist

$$(34) \quad A^2 = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \dots + \lambda_n A_n^2.$$

<sup>4)</sup> F. A. Möbius, Lehrbuch der Statik (1837); S. 90.

Dann kommt, wenn  $x_i$  die senkrechte Projektion von  $x$  auf  $A_i$  bezeichnet, ganz entsprechend wie in der Ebene:

$$(35) \quad x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n,$$

welche Gleichung wieder unverändert für jede Lage von  $x$  gilt und sich ebenso wie Gleichung (5) in Worte fassen läßt. Wir wollen uns auf die Betrachtung der beiden einfachsten Fälle, des Falles  $n = 3$  (vier Geraden eines Büschels) und  $n = 6$  (sieben Geraden eines Bündels oder einer Regelschar) beschränken.

### 1. $n = 3$ .

$$A^2 = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \lambda_3 A_3^2,$$

also

$$x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3.$$

Zum Unterschied gegen früher (Nr. 1) braucht  $x$  nicht in der Ebene des Büschels zu liegen. Zur Bestimmung von  $\lambda_1$  nehmen wir irgend zwei Geraden  $G_1$  und  $H_1$  an, die nicht in der Ebene des Büschels liegen und von welchen  $G_1$  die Gerade  $A_2$  schneidet,  $H_1$  die Gerade  $A_3$ . Die äußere Multiplikation der vorletzten Gleichung mit  $G_1$  und  $H_1$  führt zu dem Werte

$$(36) \quad \lambda_1 = \frac{[A G_1][A H_1]}{[A_1 G_1][A_1 H_1]}.$$

Entsprechend lassen  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  sich bestimmen. Nur Momente je zweier Stäbe, anders ausgedrückt Momente von Kräften in bezug auf Achsen, kommen vor.

### 2. $n = 6$ .

$$A^2 = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \dots + \lambda_6 A_6^2.$$

Bezeichnet  $K_i$  einen Strahlenkomplex zweiten Grades, der die Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_6$  mit Ausnahme von  $A_i$  enthält, so fallen, wenn man die obige Gleichung mit  $K_i$  durch äußere Multiplikation verbindet, die  $\lambda_i$  nicht enthaltenden Glieder fort und man findet

$$(37) \quad \lambda_i = \frac{[A^2 K_i]}{[A_i^2 K_i]}.$$

## 10. Fortsetzung.

Ist  $\sum \lambda_i A_i^2$  nicht identisch Null, so setzen wir

$$(38) \quad \sum \lambda_i A_i^2 = K^{(2)},$$

welche Gleichung, obwohl mit Gleichung (6) übereinstimmend, jetzt auf eine Polarität im Strahlenraum und auf einen Strahlenkomplex zweiten Grades führt, wenn man die Geraden  $X$  und

$$[K^{(2)} X] = \sum \lambda_i [A_i X] \cdot A_i$$

einander zuordnet. Bezeichnet nämlich  $Y$  irgendeine zweite Gerade, so ist

$$[K^{(2)} X \cdot Y] = \sum \lambda_i [A_i X \cdot A_i Y] = \sum \lambda_i [A_i Y \cdot A_i X] = [K^{(2)} Y \cdot X],$$

es findet also involutorisches Entsprechen statt. (Der erwähnte Strahlenkomplex zweiten Grades hat zur Gleichung

$$[K^{(2)} X^2] = \sum \lambda_i [A_i X]^2 = 0,$$

braucht also nicht reell zu sein.) Wir führen wieder den Mittelpunkt  $m$  des Polarraumes und außerdem seine Hauptachsen  $B_1, B_2, B_3$  sowie die ihnen gegenüberliegenden, in die Hauptebenen fallenden Bivektoren  $V_1, V_2, V_3$  ein, diese als endliche Vertreter der unendlich fernen Geraden der Hauptebenen. Die räumliche Verwandte der Gleichung (7) kann jetzt geschrieben werden:

$$(39) \quad K^{(2)} = \kappa_1 B_1^2 + \kappa_2 B_2^2 + \kappa_3 B_3^2 + \sigma_1 V_1^2 + \sigma_2 V_2^2 + \sigma_3 V_3^2.$$

Für den „Lotpunkt“  $x_l = L(x, K^{(2)})$  von  $x$  ergibt Gleichung (39):

$$(40) \quad x_l = \kappa_1 L(x, B_1^2) + \kappa_2 L(x, B_2^2) + \kappa_3 L(x, B_3^2),$$

Der fragliche Lotpunkt liegt hiernach in der Verbindungsebene der senkrechten Projektionen von  $x$  auf die Achsen  $B_1, B_2, B_3$  und bildet mit ihnen ein Viereck, das bei beliebiger Lagenänderung von  $x$  affin zu sich selbst bleibt. Im Falle  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$  liegt  $x_l$  mit  $x$  und  $m$  in einer Geraden, und zwar so, daß

$$\overline{m x_l} = \frac{1}{3} \overline{m x}$$

ist. Ordnet man  $x$  und  $x_l$  einander zu, so entstehen zwei ähnlich liegende ähnliche Punktsysteme (vgl. den Schluß von Nr. 2).

## 11. Projektionen eines Stabes.

Auch im Raum ist, wie in der Ebene, die als Stab aufgefaßte senkrechte Projektion  $X_n$  eines Stabes  $X$  auf die Gerade  $A$  vom Zahlwert Eins durch

$$(41) \quad X_n = L(X, A^2)$$

dargestellt. Wir nehmen sogleich an,  $X$  werde auf  $n$  beliebige Geraden  $A_1, A_2, \dots, A_n$  senkrecht projiziert und zudem noch die  $i$ -te Projektion mit einer beliebigen Zahl  $\lambda_i$  multipliziert, so daß, wenn man wieder die Gleichungen (38) und (39) benutzt, auch  $L(X, K^{(2)})$  den Lotstab von  $X$  nennt und ihn mit  $X_l$  bezeichnet, man erhält:

$$(42) \quad X_l = \kappa_1 L(X, B_1^2) + \kappa_2 L(X, B_2^2) + \kappa_3 L(X, B_3^2).$$

Da die Glieder der rechten Seite, also die senkrechten Projektionen von  $X$  auf die Achsen, Stäbe in den Achsen vorstellen, so geht  $X_l$  durch deren Schnittpunkt  $m$ . Ist  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$ , dann wird sogar  $X_l$  parallel mit  $X$ .

## IV. Verallgemeinerungen.

## 12. Anwendung allgemeiner projektiver Maßbestimmung.

Bei sogenannter Cayley-Kleinscher Maßbestimmung bedeutet  $|A$  in der Ebene den absoluten Pol von  $A$ , im Raum die absolute Polare von  $A$ , und  $|\alpha$  den absoluten Pol von  $\alpha$ . Deshalb sind auch bei dieser Maßbestimmung durch die äußeren Produkte  $[x|AA]$ ,  $[x|\alpha\alpha]$ ,  $[X|AA]$ ,  $[X|\alpha\alpha]$  und  $[\xi|\alpha\alpha]$  bzw. die senkrechten Projektionen von  $x$  auf  $A$  oder  $\alpha$ , von  $X$  auf  $A$  und  $\alpha$ , sowie von  $\xi$  auf  $\alpha$  dargestellt <sup>5)</sup>. Von den früheren Gleichungen bleiben bei dieser allgemeineren Maßbestimmung viele bestehen, sie sind aber, wenn die Redeweise der nichteuklidischen Mechanik angewendet werden soll, neu zu fassen. Wenn es z. B. sich um die Addition von Stäben handelt, so treten Abstandslinien an die Stelle der beim gewöhnlichen Parallelogramm der Kräfte vorkommenden Parallelen zu den Wirkungslinien der als Kräfte aufgefaßten Stäbe. Diese Andeutungen mögen hier genügen.

## 13. Anwendung allgemeinsten Korrelationen.

Weiter läßt sich alles Vorhergehende dadurch verallgemeinern, daß man beliebige Korrelation statt Polaritäten benutzt. Ist z. B.  $K$  das Zeichen einer Korrelation, die Ebenen in Punkte überführt, so kann man dem veränderlichen Punkt  $x$  den Punkt

$$x_\alpha = [x K \alpha \alpha]$$

zuordnen, d. h. man denkt sich  $x$  mit dem der Ebene  $\alpha$  entsprechenden Punkte verbunden und die Verbindungslinie mit  $\alpha$  geschnitten. Mit Hilfe des Lückenausdrucks

$$L = [\star K \star_1 \star_1]$$

läßt sich dann schreiben

$$x_\alpha = L(x, \alpha^2),$$

so daß nun ähnliche Anwendungen wie früher sich machen lassen. Aber der Zahlwert von  $x_\alpha$  ist nicht mehr konstant, sondern hängt von der Lage des Punktes  $x$  ab <sup>6)</sup>.

<sup>5)</sup> Die der nichteuklidischen Geometrie angepaßte Punktrechnung ist ausführlich behandelt worden von A. N. Whitehead in seiner „Universal Algebra“, Cambridge 1898, S. 349–455. Auf die sphärische Geometrie hatte Möbius schon 1846 die Punktrechnung angewendet in einer Abhandlung, die in Bd. 2 seiner gesammelten Werke abgedruckt ist.

<sup>6)</sup> Über die Änderung der Zahlwerte geometrischer Elemente bei linearen Transformationen siehe meine Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, I 1, S. 383 bis 388.

## Schlußbemerkungen.

Im vorhergehenden sind immer nur Quadrate geometrischer Elemente betrachtet worden. Man kann aber auch Sätze bilden, in denen höhere Potenzen vorkommen, z. B. dritte Potenzen von Ebenen im gewöhnlichen Raum, und im Zusammenhang damit Flächen dritter Ordnung. Das einfachste Beispiel dafür ist wohl das folgende. Sind  $K$  und  $K'$  Symbole für zwei beliebige Korrelationen im Raum, so entsprechen in diesen einer beliebigen Ebene  $\alpha$  die beiden Punkte  $K\alpha$  und  $K'\alpha$ , deren Verbindungslinie mit einem veränderlichen Punkt  $x$  die Ebene  $\alpha$  in der Geraden

$$X_\alpha = [x K\alpha K'\alpha]$$

schneidet. Mit Hilfe des Lückenausdrucks

$$L = [*K * K' * 1]$$

läßt sich diese Gerade durch  $L(x, \alpha^3)$  ausdrücken. Da nun die dritten Potenzen von fünf beliebigen Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$  eines Büschels linear abhängig sind, also geschrieben werden kann:

$$\lambda_1 \alpha_1^3 + \lambda_2 \alpha_2^3 + \dots + \lambda_5 \alpha_5^3 = 0,$$

wo die  $\lambda_i$  nicht von der Lage des Punktes  $x$  abhängen, sondern bloß von der gegenseitigen Lage der Ebenen  $\alpha_i$ , so kommt mit

$$X_i = L(x, \alpha_i^3),$$

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_5 X_5 = 0,$$

also gehören die fünf Geraden  $X_i$  einem Strahlennetz an. Faßt man die  $X_i$  als Kräfte auf, so lassen sich, was nicht näher ausgeführt werden soll, ihre Stärken angeben, und vorstehende Gleichung erhält außer dem rein lagengeometrischen Inhalt noch einen metrischen, denn sie sagt aus, daß fünf gewisse Kräfte im Gleichgewicht sind.

(Eingegangen am 24. 3. 1939.)

# Eine Geometrie mit unvollständiger Anordnung.

Von

O. Bottema in Deventer (Holland).

1. Wir denken uns die (ebene) affine Geometrie so weit entwickelt, daß die Punkte durch zwei geordnete Zahlen  $x, y$  dargestellt werden können, welche einem (kommutativen) Zahlkörper  $L$  entnommen sind, der eine Charakteristik ungleich 2 hat, aber übrigens beliebig ist. Es bleibe dahingestellt, in welcher Weise die Entwicklung sich vollzogen hat: „analytisch“, wobei die Geometrie als Koordinatengeometrie definiert worden ist und ein Punkt mit einem Zahlenpaar identifiziert wird; oder „geometrisch“, wobei man die unbestimmten Elemente (Punkt, Gerade, Inzidenz) durch die Verknüpfungsaxiome und die Axiome, welche die Schnittpunktsätze von Desargues und Pascal verbürgen, weiter determiniert und dann mittels der Staudtschen Wurfrechnung oder eines äquivalenten Verfahrens Koordinaten einführt. Letztere, für die projektive Geometrie klassisch gewordene Methode kann man so ausgeführt denken, daß sie von vornherein auf die affine Geometrie zugeschnitten wird, oder man kann die projektive Geometrie selber entwickeln und nachher durch die Auswahl der uneigentlichen Geraden zur affinen Geometrie übergehen. Der Zahlkörper, welcher die Geometrie begleitet, hat eine Charakteristik ungleich 2, wenn das Fanosche Axiom gilt, d. h. wenn zwei Punkte einen Mittelpunkt haben, die Diagonalen eines Parallelogramms sich schneiden usw.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun folgendes. Anknüpfend an die genannte Phase der geometrischen Entwicklung wollen wir durch Einführung unseres Axioms (I) eine (unvollständige) Anordnung definieren, welche in mancher Hinsicht mit der üblichen übereinstimmt und gewissermaßen eine Zwischenstation bedeuten kann auf dem Wege zur vollständigen Anordnung<sup>1)</sup>.

Die Anordnung ist für die Geometrie ausgearbeitet (wobei wir uns auf die Ebene beschränkt haben) und geometrisch formuliert, kann aber natürlich ohne Bezug auf geometrische Anwendungen als eine Anordnung für die Elemente des Körpers  $L$  aufgefaßt werden.

2. Wir wollen einen nicht zerfallenden Kegelschnitt mit der Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

<sup>1)</sup> Vgl. die ausführliche Darstellung in meinem (holländisch geschriebenen) Buche „De elementaire meetkunde van het platte vlak“, Groningen 1938.

eine *Ellipse* nennen, wenn  $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  ein Quadrat und ungleich Null ist und es außerdem mindestens einen Punkt  $P$  gibt, dessen Koordinaten der Gleichung genügen. Offenbar gibt es dann auf jeder Geraden durch  $P$ , welche nicht mit der Tangente zusammenfällt, einen neuen Punkt des Kegelschnitts.

Da  $D_1 \neq 0$ , hat die Ellipse einen Mittelpunkt  $O$  mit den Koordinaten  $\frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$ ,  $\frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$ . Wählt man den Ursprung des Koordinatensystems in diesem Punkte, dann wird die Gleichung des Kegelschnitts

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{D}{D_1} = 0,$$

wo

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und somit ungleich Null ist.

Die Gerade  $px + qy = 0$  hat einen Schnittpunkt mit der Ellipse, wenn die Gleichung

$$(a_{11}q^2 - 2a_{12}pq + a_{22}p^2)x^2 + q^2 \cdot \frac{D}{D_1} = 0$$

eine Wurzel (und dann offenbar zwei entgegengesetzte Wurzeln) hat; d. h. wenn

$$-D(a_{11}q^2 - 2a_{12}qp + a_{22}p^2)$$

ein Quadrat und ungleich Null ist. Für den konjugierten Durchmesser

$$p_1x + q_1y \text{ gilt } p_1 = a_{11}q - a_{12}p, \quad q_1 = a_{12}q - a_{22}p,$$

und man findet

$$a_{11}q_1^2 - 2a_{12}q_1p_1 + a_{22}p_1^2 = D_1(a_{11}q^2 - 2a_{12}qp + a_{22}p^2).$$

Hieraus geht hervor: *Hat ein Durchmesser der Ellipse zwei Schnittpunkte mit der Ellipse, so hat auch der konjugierte Durchmesser zwei Schnittpunkte mit der Ellipse.*

Wir setzen voraus, daß die Ellipse einen Punkt  $P$  enthält. Wählt man die Gerade  $OP$  zur  $X$ -Achse, die konjugierte Gerade zur  $Y$ -Achse. dann wird die Gleichung der Ellipse

$$x^2 + ky^2 = l.$$

Die Gleichungen  $x^2 = l$  und  $ky^2 = l$  müssen je zwei verschiedene Wurzeln haben;  $k$  und  $l$  sind also Quadrate, ungleich Null, und durch geeignete Wahl des Einheitspunktes kann man somit der Ellipse die kanonische Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

geben.

3. Wir geben jetzt folgende Definitionen:

*Der Punkt  $P$  liegt innerhalb der Ellipse  $E$ , wenn jede Gerade durch  $P$  mit  $E$  zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat.*

*Der Punkt  $P$  liegt außerhalb der Ellipse  $E$ , wenn durch  $P$  zwei verschiedene Tangenten von  $E$  gehen.*

Wir weisen darauf hin, daß die Begriffe „innerhalb“ und „außerhalb“ der Ellipse nicht als Gegensätze definiert sind. Zwar schließen sich die Aussagen „ $P$  liegt innerhalb  $E$ “, „ $P$  liegt auf  $E$ “, „ $P$  liegt außerhalb  $E$ “ offenbar gegenseitig aus, aber es ist möglich, daß für einen bestimmten Punkt  $P$  keine dieser Aussagen gilt<sup>2)</sup>.

Wir führen jetzt folgendes Axiom ein:

(I). *Der Mittelpunkt einer Ellipse liegt innerhalb derselben.*

Die Schnittpunkte der Geraden  $y = mx$  und der Ellipse  $x^2 + y^2 = 1$  werden aus der Gleichung  $x^2(1 + m^2) = 1$  bestimmt; für jedes  $m$  soll sie also zwei verschiedene Wurzeln haben. D. h.:

*Im Körper  $L$  ist die Summe von zwei Quadraten, die nicht beide gleich Null sind, wiederum ein Quadrat ungleich Null.*

$L$  enthält also den Körper der total-reellen Zahlen. Durch Einführung des Axioms (I) bleiben z. B. die endlichen Zahlkörper, der Körper der rationalen Zahlen und der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen nicht länger als Koordinatenkörper möglich.

4.  $P$  sei ein Punkt innerhalb der Ellipse  $E$  mit dem Mittelpunkt  $O$ ,  $A_1$  und  $A_2$  seien die Schnittpunkte von  $E$  mit der Geraden  $OP$ . Wir wählen  $OP$  zur  $X$ -Achse und geben der Ellipse die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$ . Sind  $\xi, 0$  die Koordinaten von  $P$ , so ist  $x = \xi$  eine durch  $P$  gehende Gerade; ihre Schnittpunkte mit  $E$  werden bestimmt aus  $y^2 = (1 - \xi)(1 + \xi)$ . D. h. wenn  $P$  innerhalb  $E$  liegt, so ist der Ausdruck  $A_1P \cdot PA_2$  notwendig ein Quadrat,

<sup>2)</sup> Dieselben Definitionen für die Lage eines Punktes in bezug auf einen Kegelschnitt findet man bei Liebmann, Synthetische Geometrie, Leipzig-Berlin 1934. Es wird dabei aber (S. 37) sofort axiomatisch festgelegt, daß es außer „parabolischen“ und „hyperbolischen“ Punkten nur „elliptische“ Punkte gibt. — Vgl. auch Steck, Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie II, Monatsh. f. Math. u. Phys. 47 (1937), S. 93—121; Bottema, Zur Axiomatik der projektiven Geometrie, ebenda 47 (1939), S. 234—239.

ungleich Null. Betrachten wir eine willkürliche Gerade durch  $P$ , nämlich  $y = m(x - \xi)$ , so werden ihre Schnittpunkte mit  $E$  gefunden aus der Gleichung  $x^2(1 + m^2) - 2m^2\xi x - (1 - m^2\xi^2) = 0$ , welche die Diskriminante  $D \equiv 1 + m^2(1 - \xi^2)$  hat. Wenn  $1 - \xi^2$  ein Quadrat ungleich Null ist, so gilt offenbar dasselbe von  $D$ . Wir haben also:

*Ist  $P$  ein Punkt des Durchmessers  $A_1A_2$  einer Ellipse  $E$ , so liegt  $P$  dann und nur dann innerhalb  $E$ , wenn  $A_1P \cdot PA_2$  ein Quadrat ungleich Null ist.*

Wir bemerken noch, daß der Ausdruck  $A_1P \cdot PA_2$  sich nicht ändert, wenn man  $A_1$  und  $A_2$  vertauscht; er ist zwar nicht invariant bei affinen Transformationen, aber wenn er ein Quadrat ungleich Null ist, so bleibt diese Eigenschaft bei einer affinen Transformation erhalten.

Ist  $P$  ein Punkt des Durchmessers  $A_1A_2$  und außerhalb der Ellipse, sind  $Q_1$  und  $Q_2$  die Berührungspunkte der Tangenten durch  $P$ , so ist die Gerade  $Q_1Q_2$  die Polare von  $P$  in bezug auf den Kegelschnitt und der Schnittpunkt  $P'$  von  $Q_1Q_2$  und  $OP$  liegt harmonisch mit  $P$  in bezug auf  $A_1$  und  $A_2$ . Hat umgekehrt der mit  $P$  harmonische Punkt  $P'$  die Eigenschaft, daß die durch ihn gehende, mit  $OP$  konjugierte Gerade zwei Schnittpunkte,  $Q_1$  und  $Q_2$ , mit  $E$  hat, so sind  $PQ_1$  und  $PQ_2$  Tangenten von  $E$  und  $P$  liegt außerhalb der Ellipse. Dieser Fall tritt also nur dann ein, wenn  $P'$  innerhalb  $E$  liegt, und da  $A_1P' \cdot P'A_2 = -A_1P \cdot PA_2$ , haben wir:

*Ist  $P$  ein Punkt des Durchmessers  $A_1A_2$  einer Ellipse  $E$ , so liegt  $P$  dann und nur dann außerhalb  $E$ , wenn  $-A_1P \cdot PA_2$  ein Quadrat ungleich Null ist.*

Wenn  $P \equiv (\xi, 0)$  auf der  $X$ -Achse liegt, die Gerade  $y = m(x - \xi)$  die Ellipse in  $B_1$  und  $B_2$  schneidet,  $B'_1$  und  $B'_2$  die Projektionen von  $B_1$  und  $B_2$  auf der  $X$ -Achse sind, wobei in der Richtung der  $Y$ -Achse projiziert worden ist,  $B'_1 \equiv (x_1, 0)$ ,  $B'_2 \equiv (x_2, 0)$ , so sind  $x_1$  und  $x_2$  die Wurzeln der Gleichung  $x^2(1 + m^2) - 2m^2\xi x - (1 - m^2\xi^2) = 0$ . Man hat also  $B'_1P \cdot PB'_2 = (\xi - x_1)(x_2 - \xi) = \xi(x_1 + x_2) - x_1x_2 - \xi^2 = \frac{1 - \xi^2}{1 + m^2}$ . Ist  $B'_1P \cdot PB'_2$  ein Quadrat ungleich Null, so gilt dasselbe von  $\frac{B'_1P}{PB'_1} = \frac{B_1P}{PB_1}$  und mithin von  $B_1P \cdot PB_2$ . Wir haben also:

*Liegt der Punkt  $P$  auf einer Geraden, welche die Ellipse  $E$  in den Punkten  $B_1$  und  $B_2$  schneidet, so liegt  $P$  innerhalb bzw. außerhalb  $E$ , wenn  $B_1P \cdot PB_2$  bzw.  $-B_1P \cdot PB_2$  ein Quadrat ungleich Null ist, und umgekehrt.*

Eine Folgerung dieses Satzes ist:

Wenn der Punkt  $P$  innerhalb (außerhalb) einer Ellipse liegt, welche durch die Punkte  $A$  und  $B$  geht, dann liegt  $P$  innerhalb (außerhalb) jeder Ellipse durch  $A$  und  $B$ .

Wir geben nun folgende Definitionen:

Der Punkt  $P$  liegt innerhalb (außerhalb) der Punkte  $A$  und  $B$ , wenn er innerhalb (außerhalb) einer durch  $A$  und  $B$  gehenden Ellipse liegt.

Hieraus geht hervor:

$P$  liegt innerhalb  $AB$ , wenn  $AP \cdot PB$  ein Quadrat ungleich Null ist;  
 $P$  liegt außerhalb  $AB$ , wenn  $-AP \cdot PB$  ein Quadrat ungleich Null ist.

Wir hätten auch diese letzte Eigenschaft zum Ausgangspunkt der Anordnungstheorie nehmen können, ohne jeden Bezug auf die Theorie der Kegelschnitte; man kann auch auf jede Beziehung mit der Geometrie überhaupt verzichten und mittels der Definitionen: „die Zahl  $x$  liegt innerhalb der Zahlen  $a$  und  $b$ , wenn  $(a - x)(x - b)$  ein Quadrat ungleich Null ist usw.“ eine Anordnung definieren in einem Zahlkörper  $L$  mit der obenerwähnten Eigenschaft.

5. Im folgenden geben wir einige einfache Eigenschaften unserer Anordnung an. Wir stellen dabei Quadrate ungleich Null durch  $q_1, q_2, \dots$  dar.

I. Liegt  $P$  innerhalb  $AB$ , dann liegt  $B$  außerhalb  $AP$  und  $A$  außerhalb  $BP$ . Man hat  $AP \cdot PB = q_1$ , also  $AB \cdot BP = (AP + PB)BP = AP \cdot BP - PB^2 = -q_1 - q_2 = -q_3$ .  $B$  liegt also außerhalb  $AP$ .

II. Wenn  $A$  außerhalb  $PB$  liegt und  $B$  außerhalb  $AP$ , dann liegt  $P$  innerhalb  $AB$ . Man hat  $PA \cdot AB = -q_1$ ,  $AB \cdot BP = -q_2$ , also  $AP \cdot PB = q_1 q_2 = q_3$ .

III. Wenn  $P$  innerhalb  $AB$  liegt, dann sind  $\frac{AP}{AB}$  und  $\frac{BP}{BA}$  Quadrate. Gegeben ist  $AP \cdot PB = q_1$ , man hat also  $AP \cdot AB = AP^2 + q_1 = q_2$ , so daß  $\frac{AP}{AB} = \frac{q_2}{AB^2} = q_3$ .

IV. Wenn  $P$  auf der Geraden  $AB$  liegt und  $\frac{AP}{AB}$  und  $\frac{BP}{BA}$  Quadrate ungleich Null sind, dann liegt  $P$  innerhalb  $AB$ . Da  $\frac{AP}{AB} = q_1$ ,  $\frac{BP}{BA} = q_2$ , hat man  $AP \cdot PB = q_1 q_2 \cdot AB^2 = q_3$ .

V. Wenn  $P$  innerhalb  $AB$  und  $Q$  innerhalb  $AP$  liegt, dann liegt  $Q$  innerhalb  $AB$ . Man hat  $\frac{AP}{AB} = q_1$ ,  $\frac{BP}{BA} = q_2$ ,  $\frac{AQ}{AP} = q_3$ ,  $\frac{PQ}{PA} = q_4$ , also  $\frac{AQ}{AB} = q_1 q_3$  und weiter  $\frac{BQ}{BA} = \frac{BP + PQ}{BA} = q_2 + q_1 q_4$ .

VI. Wenn  $P_1$  und  $P_2$  beide innerhalb  $AB$  liegen und  $Q$  innerhalb  $P_1 P_2$ , dann liegt  $Q$  innerhalb  $AB$ . Aus  $\frac{AP_1}{AB} = q_1$ ,  $\frac{BP_1}{BA} = q_2$ ,  $\frac{AP_2}{AB} = q_3$ ,  $\frac{BP_2}{BA} = q_4$ ,  $\frac{P_1 Q}{P_1 P_2} = q_5$ ,  $\frac{P_2 Q}{P_2 P_1} = q_6$  geht hervor  $\frac{AQ}{AB} = \frac{AP_1 + P_1 Q}{AB} = q_1 + q_5 \frac{P_1 A + AP_2}{AB} = q_1 + q_5 (-q_1 + q_3) = q_1 q_6 + q_3 q_5$ . In ähnlicher Weise erhält man  $\frac{BQ}{BA} = q_2 q_6 + q_4 q_5$ .

VII. Wenn eine Gerade die Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  in den Punkten  $P$ ,  $Q$  und  $R$  schneidet und zwei der Schnittpunkte innerhalb der bezüglichen Eckpunkte liegen, dann liegt der dritte außerhalb derselben; liegt einer der Punkte innerhalb, ein zweiter außerhalb, so liegt der dritte innerhalb; liegen zwei außerhalb, so auch der dritte. Der Beweis geht unmittelbar aus dem Satz des Menelaus hervor. Ebenso folgt ein analoger Satz über drei durch einen Punkt gehende Ecktransversalen aus dem Cevaschen Satze.

6. Ist  $P$  ein Punkt in der Ebene des Dreiecks  $ABC$ , sind  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  die Schnittpunkte von  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  mit  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$ , dann sagen wir, daß  $P$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$  liegt, wenn zwei (und somit drei) der Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  innerhalb der bezüglichen Eckpunkte liegen.

Liegt einer der Punkte innerhalb der Eckpunkte, während ein anderer entweder nicht existiert oder außerhalb der Eckpunkte liegt, so liegt  $P$  außerhalb des Dreiecks.

Wir führen ohne Beweise folgende einfachen Sätze an.

I. Wenn  $C'$  innerhalb  $AB$ ,  $P$  innerhalb  $CC'$  liegt, dann liegt  $P$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$ .

II. Wenn  $P$  innerhalb  $AC$ ,  $Q$  innerhalb  $BC$ ,  $R$  innerhalb  $PQ$  liegt, dann liegt  $R$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$ .

III. Wenn  $P$ ,  $Q$  und  $R$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$  liegen und  $S$  innerhalb des Dreiecks  $PQR$  liegt, dann liegt  $S$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$ .

IV. Liegen  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf der Ellipse  $E$  oder innerhalb  $E$ ,  $P$  innerhalb  $ABC$ , dann liegt  $P$  innerhalb  $E$ .

V. Wenn  $A'$  innerhalb  $BC$ ,  $B'$  innerhalb  $CA$ ,  $C'$  innerhalb  $AB$  liegt, dann ist das Verhältnis der Inhalte von den Dreiecken  $A'B'C'$  und  $ABC$  ein Quadrat; dasselbe gilt für die Dreiecke  $A''B''C''$  und  $ABC$ , wenn  $A''B''C''$  das Dreieck mit den Seiten  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  ist.

7.  $O$  und  $P$  seien zwei verschiedene Punkte einer Geraden  $l$ . Wir sagen: ein Punkt  $A$  auf  $l$  liegt auf derselben Seite von  $O$  wie  $P$ , wenn  $O$  außerhalb  $AP$  liegt, also wenn  $\frac{OA}{OP}$  ein Quadrat ungleich Null ist. Dagegen liegt  $A$  auf der entgegengesetzten Seite von  $O$  wie  $P$ , wenn  $O$  innerhalb  $AP$  liegt, also wenn  $-\frac{OA}{OP}$  ein Quadrat ungleich Null ist.

Wir betonen noch einmal, daß diese beiden Begriffe zwar einander ausschließen, aber nicht als Gegensätze definiert sind. Im allgemeinen wird ein Punkt weder auf derselben, noch auf der entgegengesetzten Seite von  $O$  liegen als  $P$ , und von einer Zerlegung der Punkte von  $l$  durch den Punkt  $O$  in zwei Halbstrahlen ist nicht die Rede. Wir nennen aber einige Eigenschaften, welche auch bei unserer unvollständigen Anordnung richtig bleiben.

I. Liegt  $A$  auf derselben Seite von  $O$  wie  $P$ , dann liegt  $P$  auf derselben Seite von  $O$  wie  $A$ , usw.

II. Liegen  $A_1$  und  $A_2$  beide auf derselben Seite von  $O$  wie  $P$ , dann liegt  $A_1$  auf derselben Seite von  $O$  wie  $A_2$ , usw.

Wir betrachten die Ebene der Geraden  $l$  und des nicht auf  $l$  liegenden Punktes  $P$  und definieren: ein Punkt  $A$  dieser Ebene liegt auf derselben Seite von  $l$  wie  $P$ , wenn die Gerade  $PA$  entweder mit  $l$  parallel ist, oder  $l$  schneidet in einem Punkte  $S$ , der außerhalb  $PA$  liegt;  $P$  liegt auf der anderen Seite von  $l$  wie  $P$ , wenn  $PA$  die Gerade  $l$  schneidet in einem Punkt  $S$ , der innerhalb  $PA$  liegt. Auch für diese Definitionen gelten obige Bemerkungen. Wir führen weiter folgende Eigenschaften an.

III. Liegen  $A_1$  und  $A_2$  beide auf derselben Seite von  $l$  wie  $P$ , dann liegt  $A_1$  auf derselben Seite von  $l$  wie  $A_2$  usw. (Der Beweis gelingt am einfachsten mittels des Satzes von Menelaus.)

IV. Wenn  $A_1$  und  $A_2$  auf derselben Seite von  $l$  liegen und  $B$  innerhalb  $A_1A_2$  liegt, dann liegt  $B$  auf derselben Seite von  $l$  wie  $A_1$  und wie  $A_2$ .

V. Wenn zwei Punkte einer Ellipse auf entgegengesetzten Seiten von  $l$  liegen, dann hat  $l$  zwei Schnittpunkte mit der Ellipse.

VI. Ein Punkt  $P$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$  liegt auf derselben Seite von  $BC$  wie  $A$ , usw.

VII. Wenn  $P$  auf derselben Seite von  $BC$  liegt wie  $A$ , auf derselben Seite von  $CA$  als  $B$  und auf derselben Seite von  $AB$  wie  $C$ , dann liegt  $P$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$ .

8. Ein einfaches  $n$ -Eck  $A_1A_2 \dots A_n$  nennen wir *konvex*, wenn für jeden Wert von  $k$  die Bedingung gilt: sämtliche von  $A_k$  und  $A_{k+1}$  verschiedenen Eckpunkte liegen auf derselben Seite von  $A_kA_{k+1}$ .

Wir nennen folgende Sätze, ohne auf die zumeist einfachen Beweise einzugehen.

I. Sind  $A_1, A_2, A_3$  drei Eckpunkte des konvexen  $n$ -Ecks  $A_1A_2 \dots A_n$  und  $A_k$  ein beliebiger Eckpunkt ( $k = 1, 2, 3$ ), dann liegen  $A_1$  und  $A_3$  auf entgegengesetzten Seiten von  $A_2A_k$ .

II. Wenn man die Eckpunkte eines konvexen  $n$ -Ecks beliebig (nicht-zyklisch) permutiert, dann entsteht ein  $n$ -Eck, das nicht konvex ist.

III. Der Inhalt eines konvexen  $n$ -Ecks ist ungleich Null.

9. Obige Beispiele dürften genügen, um zu zeigen, daß verschiedene affine Anordnungsbegriffe und Anordnungseigenschaften ihre Gültigkeit behalten, obwohl der Satz: „ein von den Punkten  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt der Geraden  $AB$  liegt entweder innerhalb  $AB$  oder außerhalb  $AB$ “, nicht gilt.

Es zeigt sich weiter, daß man nicht nur die affine, sondern auch die (euklidische) metrische Geometrie sehr weit entwickeln kann. So kann man durch  $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ , welcher Ausdruck für zwei voneinander verschiedene Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  offenbar ein Quadrat ungleich Null ist, das „Quadrat der Entfernung zweier Punkte“ definieren; es gelingt natürlich nicht, die Entfernung selbst eindeutig festzulegen, da man die zwei Zahlen, deren Quadrat gleich  $d^2$  ist, nicht als „positive“ und „negative“ unterscheiden kann. In den Sätzen der Elementargeometrie tritt aber sehr oft nur das Entfernungsquadrat auf, wie z. B. in dem pythagoreischen Lehrsatz und seinen Folgerungen. Es gelingt auch die ebene Trigonometrie fast vollständig zu entwickeln.

Um einen Eindruck von den metrischen Sätzen zu geben, welche man mit unserer unvollständigen Anordnung zeigen kann, führen wir beispielsweise folgende Sätze an, indem wir für eine systematische Behandlung der Elementargeometrie unter diesen Gesichtspunkten nach dem in Fußnote <sup>1)</sup> genannten Buche verweisen.

1. Sind  $C_1$  und  $C_2$  zwei Kreise mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$ , schneidet  $M_1M_2$  den Kreis  $C_1$  in  $A_1$  und  $B_1$  und den Kreis  $C_2$  in  $A_2$  und  $B_2$  und liegen  $A_2$  und  $B_2$  beide innerhalb  $A_1B_1$ , so liegen die Punkte von  $C_2$  sämtlich innerhalb  $C_1$  und diejenigen von  $C_1$  sämtlich außerhalb  $C_2$ . — 2. Wenn der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks innerhalb des Dreiecks liegt, so gilt dasselbe für den Höhenschnittpunkt. — 3. Die zwei Brocardschen Punkte eines Dreiecks liegen innerhalb des Dreiecks, usw.

10. Im vorhergehenden haben wir besonders solche Aussagen hervorgehoben, die in der von uns betrachteten Geometrie ihre Gültigkeit behalten. Jetzt nennen wir einige Sätze, in denen der Unterschied mit einer vollständig angeordneten Geometrie klar hervortritt.

Es kann zwei Kreise,  $C_1$  und  $C_2$ , geben, welche *keinen gemeinsamen Punkt* haben und wobei *weder  $C_1$  außerhalb  $C_2$ , noch  $C_2$  außerhalb  $C_1$  liegt*. Man betrachte z. B. in der Geometrie über dem Körper der total-reellen Zahlen die konzentrischen Kreise  $C_1$  und  $C_2$  mit den Radien  $R_1^2 = 1$ ,  $R_2^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2$ ; die Zahl  $R_1^2 - R_2^2 = 4(3\sqrt{2} - 4)$  ist weder ein Quadrat, noch das entgegengesetzte eines Quadrates, die Punkte von  $C_2$  liegen also weder innerhalb, noch außerhalb  $C_1$ .

Beschränken wir uns auf die Punkte einer Geraden, ist  $A$  der Nullpunkt,  $B$  der Punkt mit der Koordinate  $b$ , so gilt für einen Punkt  $P$  (mit der Koordinate  $p$ ), welcher innerhalb  $AB$  liegt:  $pb$  ist ein Quadrat (5, III). Ist weder  $b$  noch  $-b$  ein Quadrat, so kann weder  $p$ , noch  $-p$  ein Quadrat sein;  $p$  kann also z. B. keine rationale Zahl sein; d. h. *die Menge der rationalen Zahlen ist nicht überall dicht*.

Wir legen der Geometrie den Körper der total-reellen Zahlen zugrunde und betrachten die Punkte  $A, B, C$  mit den Koordinaten  $a = -1, b = 0, c = 1$ . Der Punkt  $B$  liegt innerhalb  $AC$  und wir wissen (5, V), daß jeder Punkt innerhalb  $AB$  oder innerhalb  $BC$  auch innerhalb  $AC$  liegt. Dieser Satz ist aber nicht umkehrbar. Der Punkt  $P$  mit  $p = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  liegt innerhalb  $AC$ , da  $1 - p^2$  ein Quadrat ist; er liegt aber weder innerhalb  $AB$ , noch innerhalb  $BC$ , denn weder  $p$ , noch  $-p$  ist ein Quadrat. Ein Intervall wird also nicht durch einen seiner Punkte in zwei Intervalle geteilt.

Es zeigt sich also, daß die Theorie der Punktmengen in unserer Geometrie sich ganz anders gestaltet, als wenn eine vollständige Anordnung vorliegt. Wir wollen darum noch einige der bezüglichen Sätze ins Auge fassen.

I. Eine endliche Menge ist beschränkt, d. h. sie gehört immer einem Intervall an. Sind nämlich  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Koordinaten der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , so liegen diese innerhalb  $P_1P_2$ , wo  $p_1 = -p_2$  und  $p_i^2 = \sum a_i^2$ .

II. Liegt  $P$  im Intervall  $AB$ , so ist  $P$  der Mittelpunkt eines Intervalls  $A'B'$ , das innerhalb  $AB$  liegt. Ist  $a = 0, b = 1$ , so nehme man  $a' = p^2, b' = 2p - p^2$ . Man hat dann  $a' + b' = 2p$ ; da  $P$  innerhalb  $AB$  liegt, sind  $p$  und  $1 - p$  Quadrate. Hieraus geht hervor, daß  $a' = p^2$  und  $1 - a' = 1 - p^2 = (1 - p)(1 + p)$  und auch  $b' = 2p - p^2 = p\{1 + (1 - p)\}$  und  $1 - b' = 1 - 2p + p^2 = (1 - p)^2$  Quadrate sind.  $A'$  und  $B'$  liegen also innerhalb  $AB$  (5, IV).

III. Ist  $P$  ein Punkt im Intervall  $AB$ , so liegt in jedem Intervall  $PQ$  ein von  $P$  verschiedener Punkt des Intervalls  $AB$ . Wir können uns wegen II beschränken auf den Fall:  $a = -1, b = 1, p = 0$ . Im Intervall  $PQ$  liegt für jeden Wert von  $q$  der Punkt  $R$ , wo  $r = \frac{q}{1+q^2}$ , denn  $r(q-r) = \frac{q^4}{(1+q^2)^2}$  ist ein Quadrat.  $R$  liegt auch in  $AB$ , denn  $1 - r^2 = \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2}$  ist ebenfalls ein Quadrat.

IV. Dieser Satz gilt nicht für die Endpunkte  $A$  und  $B$  des Intervalls. Ist  $a = 0, b = 1$ , so gilt für einen Punkt  $R$  im Intervall  $AQ$ :  $r = k_1q$ , wo  $k_1$  ein Quadrat ist; ist  $q$  kein Quadrat, dann ist aber  $k_1q = k_2$  nicht möglich.

V. Ist  $P$  ein Punkt im Intervall  $AB$ , so geht aus III hervor, daß in einem Intervall  $Q_1Q_2$ , das  $P$  enthält, immer ein von  $P$  verschiedener Punkt von  $AB$  liegt. Dieser Satz gilt auch für die Endpunkte  $A$  und  $B$ . Ist  $a = 0, b = 1, q_1 = -q, q_2 = q, r = \frac{q^3}{1+q^2}$ , dann sind  $q^2 - r^2 = \frac{q^3+q^4+q^6}{(1+q^2)^2}$  und  $r(1-r) = \frac{q^2}{(1+q^2)^2}$  Quadrate;  $R$  liegt also in  $Q_1Q_2$  und in  $AB$ .

VI. Ist  $\lambda^2 + \mu^2 = 1, \lambda\mu \neq 0$ , und  $x = \lambda^2 a + \mu^2 b$ , dann liegt  $X$  innerhalb  $AB$ . Denn  $\frac{x-a}{b-a} = \mu^2, \frac{x-b}{a-b} = \lambda^2$ . Umgekehrt: wenn  $X$  innerhalb

$AB$  liegt, dann ist  $x = \lambda^2 a + \mu^2 b$ , wenn  $\lambda$  und  $\mu$  geeignet gewählt sind, hierbei ist  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ,  $\lambda\mu \neq 0$ .

VII. Sind  $A$ ,  $B$  und  $C$  beliebige Punkte und  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ , dann ist die Menge der Punkte  $X$ , für die  $x = \lambda^2 a + \mu^2 b + \nu^2 c$  gilt, konvex. Sind nämlich  $X_1$  und  $X_2$  zwei Punkte der Menge,  $X_3$  ein Punkt innerhalb  $X_1 X_2$ , so ist  $x_1 = \lambda_1^2 a + \mu_1^2 b + \nu_1^2 c$ ,  $x_2 = \lambda_2^2 a + \mu_2^2 b + \nu_2^2 c$ ,  $x_3 = p_1^2 x_1 + p_2^2 x_2$ , wo  $p_1^2 + p_2^2 = 1$ . Man hat:  $x_3 = (p_1^2 \lambda_1^2 + p_2^2 \lambda_2^2) a + (p_1^2 \mu_1^2 + p_2^2 \mu_2^2) b + (p_1^2 \nu_1^2 + p_2^2 \nu_2^2) c$ , woraus hervorgeht, daß  $X_3$  zur Menge  $X$  gehört.

VIII. Die Punktmenge  $X$  ist die konvexe Hülle der Menge  $A, B, C$ .  $X$  sei ein von  $A$  verschiedener Punkt der Menge,  $x = \lambda^2 a + \mu^2 b + \nu^2 c$ ,  $\lambda^2 \neq 1$ ,  $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$ , dann ist  $x = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \nu^2} \{\lambda^2 a + (\mu^2 + \nu^2) b\} + \frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2} \{\lambda^2 a + (\mu^2 + \nu^2) c\} = p_1^2 (q_1^2 a + q_2^2 b) + p_2^2 (q_1^2 a + q_2^2 c)$ , wo  $p_1^2 + p_2^2 = 1$ ,  $q_1^2 + q_2^2 = 1$ . Man hat also:  $x = p_1^2 r_1 + p_2^2 r_2$ , d. h.  $X$  liegt innerhalb  $R_1 R_2$ ,  $R_1$  liegt innerhalb  $AB$  und  $R_2$  liegt innerhalb  $AC$ . — Die Sätze lassen sich durch vollständige Induktion erweitern auf die Figur von  $n$  Punkten.

IX. Eine Limesdefinition für eine Zahlenreihe könnte man so geben: die Reihe  $a_1, a_2, \dots$  hat den Limes  $l$ , wenn es für jedes  $\varepsilon \neq 0$  ein  $N$  gibt, so daß  $a_n$  für  $n \geq N$  innerhalb  $l - \varepsilon$ ,  $l + \varepsilon$  liegt, d. h. also, daß  $\varepsilon^2 - (l - a_n)^2$  ein Quadrat ist. Wir lassen hier die Frage, inwieweit man Begriffe wie Kontinuität, Differentialquotient und Integral entwickeln kann, unerörtert.

(Eingegangen am 22. 2. 1939.)

## Determinanten aus $S$ -Funktionen.

Von

Chr. Foussianis in Leipzig.

Wir betrachten die Determinante

$$\Delta = |S(\alpha_n - (\lambda - 1), k_j) S(\alpha_n - (\lambda - 2), k_j - 1) \dots S(\alpha_n, k_j - (\lambda - 1))|,$$

$$j = 1, 2, \dots, \lambda.$$

Dabei sei

$$S(\alpha_n, k) = \sum \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_n^{q_n} \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_n = k)$$

und die  $q$  seien ganze positive Zahlen oder Null. Sie läßt sich schreiben

$$(1) \quad \Delta = S(\alpha_n, k_\lambda - \lambda + 1) \Delta(n-1, k_1, \dots, k_{\lambda-1})$$

$$- S(\alpha_n, k_{\lambda-1} - \lambda + 1) \Delta(n-1, k_1, \dots, k_{\lambda-2}, k_\lambda) + \dots$$

$$+ (-1)^{\lambda-1} S(\alpha_n, k_1 - \lambda + 1) \Delta(n-1, k_2, k_3, \dots, k_\lambda)$$

$$= \Delta(n, k_1, k_2, \dots, k_\lambda),$$

wo

$$\Delta(n-1, k_1, \dots, k_{\mu-1}, k_{\mu+1}, \dots, k_\lambda), \quad \mu = 1, 2, \dots, \lambda,$$

die Determinante bezeichnet, die man aus  $\Delta$  erhält, indem man die  $\mu$ -te Zeile und  $\lambda$ -te Spalte wegläßt.

Wir betrachten noch die Determinanten

$$D = |\alpha_j \alpha_j^2 \dots \alpha_j^n|$$

und

$$\Omega = |\alpha_j \alpha_j^2 \dots \alpha_j^{n-\lambda} \alpha_j^{n-\lambda+1+k_1} \dots \alpha_j^{n-\lambda+1+k_\lambda}|,$$

deren  $n$  Spalten den  $n$  Werten  $j = 1, 2, \dots, n$  entsprechen, und wir nehmen an, es wäre die Relation

$$(2) \quad \Omega = D \cdot \Delta$$

bei festem  $\lambda$  für alle ganzen und positiven Werte von  $n$  und  $k_j$  und für beliebige  $\alpha$  gültig. Dann untersuchen wir das System der  $n$  Gleichungen

$$\sum \alpha_r x_r = 0, \quad \sum \alpha_r^2 x_r = 0, \dots, \quad \sum \alpha_r^{n-\lambda-1} x_r = 0,$$

$$\sum \alpha_r^{n-\lambda+k_1} x_r = D S(\alpha_n, k_1 - \lambda), \dots, \quad \sum \alpha_r^{n-\lambda+k_\lambda+1} x_r = D S(\alpha_n, k_{\lambda+1} - \lambda),$$

wobei die Zahl  $r$  die Werte  $1, 2, \dots, n$  durchläuft.

## Die Summen

$$S(\alpha_n, k_m - \lambda) \text{ mit } k_m < \lambda$$

müssen wir als Null definieren.

Eine Lösung des obigen Systems sind die Unterdeterminanten von  $D$

$$(3) \quad x_p = (-1)^{n+p} D_{n,p} \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

die dem Elemente  $\alpha_p^n$  in  $D$  entsprechen. In der Tat sind für die Werte (3) die  $n - \lambda - 1$  ersten Gleichungen des Systems Entwicklungen der Determinanten

$$(4) \quad |\alpha_j \alpha_j^2 \dots \alpha_j^{n-1} \alpha_j^t|, \quad t = 1, 2, \dots, n - \lambda - 1.$$

Die  $(\lambda + 1)$  letzten Gleichungen sind auch Entwicklungen derselben Determinanten (4), indem man  $t$  durch die Werte  $n - \lambda + k_1, n - \lambda + k_2, \dots, n - \lambda + k_{\lambda+1}$  ersetzt; weil bekanntlich<sup>1)</sup> die Relation

$$(5) \quad |\alpha_j \alpha_j^2 \dots \alpha_j^{n-1} \alpha_j^{n+k}| = |\alpha_j \alpha_j^2 \dots \alpha_j^n| S(\alpha_n, k)$$

für jeden ganzen und positiven Wert von  $k$  gilt.

Wäre  $A$  die Determinante des Gleichungssystems, hätten wir demnach

$$(6) \quad D_{n,p} A = D S(\alpha_n, k_{\lambda+1} - \lambda) A_{n,p} + \dots + (-1)^{\lambda} D S(\alpha_n, k_1 - \lambda) A_{n-1,p},$$

$$p = 1, 2, \dots, n,$$

wobei  $A_{m,p}$  die Determinanten sind, die aus  $A$  entstehen, indem man die  $m$ -te Zeile und  $p$ -te Spalte wegläßt. Wenn wir jetzt

$$\Omega = \Omega(n, k_1, k_2, \dots, k_{\lambda})$$

schreiben, so folgt

$$A_{n-q,n} = \Omega(n-1, k_1, \dots, k_{\lambda-q}, k_{\lambda-q+2}, \dots, k_{\lambda+1}), \quad q \leq \lambda,$$

und wegen der Voraussetzung (2)

$$A_{n-q,n} = D_{n,n} \Delta(n-1, k_1, \dots, k_{\lambda-q}, k_{\lambda-q+2}, \dots, k_{\lambda+1}), \quad q \leq \lambda.$$

Mit Rücksicht auf die obigen Formeln erhält man aus (6) für  $p = n$

$$A = D[S(\alpha_n, k_{\lambda+1} - \lambda) \Delta(n-1, k_1, \dots, k_{\lambda})$$

$$- S(\alpha_n, k_{\lambda} - \lambda) \Delta(n-1, k_1, \dots, k_{\lambda-1}, k_{\lambda+1}) + \dots$$

$$+ (-1)^{\lambda} S(\alpha_n, k_1 - \lambda) \Delta(n-1, k_2, k_3, \dots, k_{\lambda+1})].$$

Aber die Klammer auf der rechten Seite dieser Formel ist die Funktion (1) für  $\lambda + 1$  statt  $\lambda$ , es ist also

$$A = D \cdot \Delta(n, k_1, k_2, \dots, k_{\lambda+1}).$$

Die Determinante  $A$  ist aber gleich  $\Omega$ , gebildet für  $(\lambda + 1)$  statt  $\lambda$ , d. h.

$$A = \Omega(n, k_1, k_2, \dots, k_{\lambda+1}),$$

<sup>1)</sup> Vgl. v. B. D. E. Littlewood and A. R. Richardson, Group characters and algebra. Philos. Trans. Roy. Soc. London (A) 233 (1934), S. 99—141.

also hat man

$$\Omega(n, k_1, k_2, \dots, k_{\lambda+1}) = D \cdot \Delta(n, k_1, k_2, \dots, k_{\lambda+1}).$$

Folglich gilt die Relation (2) auch für  $\lambda + 1$  statt  $\lambda$ . Sie ist auch erfüllt für  $\lambda = 1$ , weil sie in diesem Falle mit (5) zusammenfällt; also gilt (2) für jeden ganzen und positiven Wert von  $\lambda$ .

Mithin ist bewiesen:

I. Zwischen  $\Delta$ ,  $D$  und  $\Omega$  besteht für jeden ganzen und positiven Wert von  $\lambda$  die Beziehung

$$\Omega = D \cdot \Delta,$$

wobei  $k_j$  ganze und positive Zahlen oder Null und  $\alpha_j$  beliebig sind.

Wir wollen hier hinzusetzen, daß  $\Delta$  nichts anderes ist als die Determinante

$$\Delta' = |S(\alpha_n, k_j) S(\alpha_n, k_j - 1) \dots S(\alpha_n, k_j - (\lambda - 1))|, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda.$$

Es ist ja

$$(7) \quad S(\alpha_n, k) = S(\alpha_{n-1}, k) + \alpha_n S(\alpha_n, k - 1);$$

wenn man also in  $\Delta$  die Elemente

$$S(\alpha_{n-(\lambda-\varrho)}, k_j - (\varrho - 1)), \quad \varrho = 2, 3, \dots, \lambda,$$

mit  $\alpha_{n-(\lambda-\varrho)}$ ,  $\varrho = 2, 3, \dots, \lambda$ , multipliziert und zu den entsprechenden Elementen der vorangehenden Spalte addiert, dann bekommt man, wegen (7),

$$|S(\alpha_{n-(\lambda-2)}, k_j) S(\alpha_{n-(\lambda-3)}, k_j - 1) \dots S(\alpha_n, k_j - (\lambda - 2)) S(\alpha_n, k_j - (\lambda - 1))|, \\ j = 1, 2, \dots, \lambda.$$

In der letzten Determinante tut man dasselbe für die Elemente

$$S(\alpha_{n-(\lambda-\varrho)}, k_j - (\varrho - 2)), \quad \varrho = 3, 4, \dots, \lambda,$$

und, in dieser Art weitergehend, kommt man schließlich zu  $\Delta'$ .

Aus dem bewiesenen Satz I können wir das folgende Ergebnis für die Determinanten  $\Delta = \Delta'$  schließen. Im Falle  $\lambda = n$  und gleichzeitig  $k_{m+1} = k_m + 1$ ,  $m = 1, 2, \dots, (n - 1)$ , ist offenbar

$$\Omega = D \cdot (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^{k_1}$$

und folglich

$$(8) \quad \Delta = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^{k_1}.$$

Die Relation (8) gilt auch für negative Werte von  $k_1$ , indem man jedem Gliede

$$\alpha_1^{\varrho_1} \alpha_2^{\varrho_2} \dots \alpha_n^{\varrho_n},$$

wo  $\varrho$  ganze und positive Zahlen oder Null sind, das Glied

$$\alpha_1^{-\varrho_1} \alpha_2^{-\varrho_2} \dots \alpha_n^{-\varrho_n}$$

entsprechen läßt, nämlich

$$S(\alpha_n, -k) = \sum \alpha_1^{-e_1} \alpha_2^{-e_2} \dots \alpha_n^{-e_n} \quad (e_1 + e_2 + \dots + e_n = k),$$

definiert. Bezeichnen wir dann durch  $\Delta_k$  die Determinanten  $\Delta = \Delta'$  für den obigen Fall, so ist für jedes Paar ganzer Zahlen  $\mu, \nu$

$$\Delta_\mu \cdot \Delta_\nu = \Delta_{\mu+\nu}.$$

Damit ist bewiesen:

II. Jede ganze Zahl  $k$  genügt der Gleichung

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} S(\alpha_n, k) & S(\alpha_n, k-1) & \dots & S(\alpha_n, k-n+1) \\ S(\alpha_n, k+1) & S(\alpha_n, k) & \dots & S(\alpha_n, k-n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S(\alpha_n, k+n-1) & S(\alpha_n, k+n-2) & \dots & S(\alpha_n, k) \end{vmatrix} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^k,$$

also bilden die Determinanten

$$\dots \Delta_{-2}, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$$

eine Gruppe.

(Eingegangen am 30. 11. 1938.)

# The internal problems of two dimensional potential theory.

Von

Rosa M. Morris in Cambridge (England).

## Introduction.

1. In a previous paper<sup>1)</sup> under this same title a complete solution was given to certain two dimensional potential problems relating to the interior of a general and inclusive class of cylinder. These cylinders were of a type whose boundary curve could be described as the curve  $\eta = 0$  in a net defined by a conformal transformation of the "internal" type

$$z = x + iy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\zeta}; \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

in which  $\eta = \alpha$  is the only possible singular point of the transformation inside the curve.

It was pointed out in that paper that there are certain simple cylinders — the elliptic cylinder is the most familiar — whose cross section curves cannot be simply expressed in this way. And as simple solutions of the relevant boundary value problems are known to exist for some of these boundaries, some modification of our general solution should be available which would make it applicable even in these cases. After discussing with me several unsuccessful attempts to determine the necessary modification, Professor Livens pointed out that an extension and generalisation of one of the methods of Wilton's original paper<sup>2)</sup>, enables the solution to be obtained for a new class of problem which includes these outstanding cases. This solution is on somewhat different lines to that employed in the previous paper and has therefore been reserved for special treatment in this paper.

On examination it was found that, while the internal transformation for the curves concerned were either unknown or intractable, simple external transformation formulae were always attainable and they always exhibited the boundary as the equipotential or level surface of one or more unclosed curves in the plane. The ellipse, for example, is a curve  $\eta = 0$  in a net defined by an equation of the type

$$z = c \cos(\zeta + i\alpha),$$

<sup>1)</sup> Math. Annalen 116 (1939), p. 374.

<sup>2)</sup> J. R. Wilton, Phil. Mag. 30 (1916), p. 761.

and in this net the curve  $\eta = -\alpha$  or

$$z = c \cos \xi,$$

is the (double) edge of the straight cut joining the points  $z = \pm c$ .

Other cases correspond to

(i) The four-bladed "propeller"

$$z = c \sqrt{\cos 2(\zeta + i\alpha)},$$

for which the level surface  $\eta = -\alpha$  is the cross cut joining the points  $z = \pm c$ ,  $z = \pm ic$ .

(ii) The more general  $n$ -bladed "propeller"

$$z = c \{\cos \frac{1}{n} n(\zeta + i\alpha)\}^{\frac{2}{n}},$$

for which the level surface  $\eta = -\alpha$  is an  $n$ -bladed cut of equal branches joining pairs of points  $z = c \{\cos k\pi\}^{\frac{2}{n}}$ ;  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ .

(iii) The unsymmetrical "propeller"

$$z = c \sqrt{\cos 2(\zeta + i\alpha) - \cos 2\beta},$$

for which the level surface  $\eta = -\alpha$  is the cross cut of unequal branches joining the points

$$z = \pm c \sqrt{1 - \cos 2\beta}, \quad z = \pm ic \sqrt{1 + \cos 2\beta}.$$

(iv) The more general case

$$z = c [\cos \frac{1}{n} n(\zeta + i\alpha) - \cos \frac{1}{n} n\beta]^{\frac{2}{n}},$$

for which the level surface  $\eta = -\alpha$  is an  $n$ -bladed cut of alternate long and short branches joining pairs of points

$$z = c [\cos k\pi - \cos \frac{1}{n} n\beta]^{\frac{2}{n}}; \quad k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

(v) In addition there are other cases such as the circular arc subtending an angle  $2\beta$  at the centre, for which the transformation is

$$\frac{z - a e^{2i\beta}}{z - a e^{-2i\beta}} = \left\{ \frac{e^{-i\zeta} - i e^{i\beta}}{e^{-i\zeta} + i e^{-i\beta}} \right\}^2;$$

and finally

(vi) The "keel and rudder" surface

$$z = A e^{-i(\zeta + i\alpha)} \{e^{i(\zeta + i\alpha)} - e^{-i\alpha}\}^{1+k} \{e^{i(\zeta + i\alpha)} - e^{+i\alpha}\}^{1-k},$$

the cross cuts for which are quite obvious.

In each of these cases we see that the curve defines an external transformation of the type

$$z = f(\zeta + i\alpha).$$

which continues across the boundary to the internal space in such a way that

(i) The equipotential  $\eta = -\alpha$  given by

$$z = f(\xi),$$

is a curve of zero area inside the plane, so that in the range

$$+\infty > \eta > -\alpha, \quad 0 < \xi < 2\pi,$$

the transformation covers uniquely the whole of the interior space as well as the exterior space.

(ii) The singular points of the transformation are all on the interior equipotential. This, of course, is essential to the uniqueness of the representation of the internal space, but is not otherwise very relevant to the solution to be obtained.

The finiteness of the range for  $\eta$  relieves us of the responsibility of securing the convergency of the potentials at  $\eta = \pm \infty$ . Instead however we concentrate our attention on securing the finiteness of the potential gradients at the singular points of the transformation.

### The Torsion Problem.

2. To illustrate the method we shall solve the general torsion problem for a uniform cylinder with a cross section curve of the type mentioned, which is  $\eta = 0$  in the net defined by

$$z = z(\zeta) = e^{-i\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\zeta},$$

the inner curve  $\eta = -\alpha$  being a curve of zero area.

In a previous paper the problem was reduced to that of determining a real function  $F(\zeta)$  so that the complex potential

$$\Omega = \varphi + i\psi = \frac{1}{2} iz(\zeta) \bar{z}(\zeta) + F(\zeta),$$

whose imaginary part complies with the usual boundary condition, and also satisfies the conditions of regularity over the space involved. Regularity chiefly requires in the present instance that the gradients of  $\Omega$  should not become infinite anywhere in the space considered. Using dashes to denote differentiation with respect to  $\zeta$  we have  $(d\Omega/dz) = \Omega'/z'$  so that infinities in the gradient of  $\Omega$ , if any, will occur at the points where  $z' = 0$ , that is, at the singular points of the transformation. To ensure then that there are no such infinities we must make  $\Omega'$  vanish whenever  $z'$  vanishes, and to the same order at least: this is done simply by making  $\Omega'$  proportional to  $z'$ . But

$$\Omega' = \frac{1}{2} i \{z' \bar{z} + z \bar{z}'\} + F'(\zeta),$$

of which the first term is already proportional to  $z'$ . To ensure that the remainder, or  $F'(\zeta) + \frac{1}{2} i z \bar{z}'$  also contains  $z'$  as a factor we write

$$F'(\zeta) + \frac{1}{2} i z \bar{z}' = G z',$$

$G$  being a function of  $\zeta$  holomorphic in the region concerned. Thus

$$F'(\zeta) = -\frac{1}{2} i z \bar{z}' + G z'$$

But  $F(\zeta)$  and therefore  $F'(\zeta)$  are real functions of  $\zeta$ ; we must therefore take

$$F'(\zeta) = -\frac{1}{2} i \{z \bar{z}' - z' \bar{z}\} + k z' \bar{z}',$$

where  $k$  is real. This means that

$$F(\zeta) = -\frac{1}{2} i \int^{\zeta} \{z(t) \bar{z}'(t) - z'(t) \bar{z}(t) + 2 i k z'(t) \bar{z}'(t)\} dt.$$

One further condition is necessary and this enables us to determine  $k$ . Generally speaking the value of  $F(\zeta)$  (and therefore of  $\Omega$ ) determined by this integral would contain a term of the type  $K\zeta$ . This means that the potential is cyclic in character and this by the physical conditions of the problem is impossible. We must therefore choose  $k$  to make any such term zero. If the inner boundary  $\eta = -\alpha$  is simple, and this is the only case we shall deal with, there is only one cyclic constant for the space, so that  $k$  can be taken as a real constant to be determined by this one condition. With this restriction on  $k$  therefore the function

$$\Omega = \frac{1}{2} i z(\zeta) \bar{z}(\zeta) - \frac{1}{2} i \int^{\zeta} \{z(t) \bar{z}'(t) - z'(t) \bar{z}(t) + 2 i k z'(t) \bar{z}'(t)\} dt,$$

satisfies all the conditions of the problem. The torsion potential is thus completely determined, and then by our previous argument the torsion constant is given by

$$\frac{1}{4} \tau \mu \int_c \left\{ 2 \frac{d\Omega}{dz} - i \bar{z} \right\} z \bar{z} dz,$$

taken round the curve of cross section of the cylinder. This of course is simply

$$\frac{1}{4} \tau \mu \int_c \{ 2 i \bar{z} + 2 k \bar{z}' - i \bar{z} \} z \bar{z} dz,$$

but it is better to retain the more complex form as this is necessary to determine the value of  $k$ .

3. These are the general results. They can be completed in some simple cases without resort to the series expansions, but it is only by defining  $z$  by the coefficients in such expansion that we can give an explicit form to the final results. We therefore proceed to the details of the solution when the

cylinder boundary is the curve  $\eta = 0$  in the net defined by the transformation

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n-1)\epsilon\zeta}.$$

We have introduced our notation in the previous paper and we retain it again here. With this form for  $z$  we have

$$z(\zeta) \bar{z}(\zeta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{n\epsilon\zeta} + \bar{b}_n e^{-n\epsilon\zeta}),$$

where

$$b_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} \bar{a}_r;$$

and

$$\begin{aligned} z' \bar{z} &= i \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) a_n e^{(n-1)\epsilon\zeta} \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n e^{-(n-1)\epsilon\zeta} \right] \\ &= i \{ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{n\epsilon\zeta} + c_{-n} e^{-n\epsilon\zeta}) \}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{r=0}^{\infty} (n+r-1) a_{n+r} \bar{a}_r, \\ c_{-n} &= \sum_{r=0}^{\infty} (r-1) \bar{a}_{n+r} a_r. \end{aligned}$$

This gives

$$z' \bar{z} - z' \bar{z} = -i \{ c_0 + \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + \bar{c}_{-n}) e^{n\epsilon\zeta} + (\bar{c}_n + c_{-n}) e^{-n\epsilon\zeta}] \}.$$

We also have

$$\begin{aligned} z' \bar{z}' &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) a_n e^{(n-1)\epsilon\zeta} \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \bar{a}_n e^{-(n-1)\epsilon\zeta} \right] \\ &= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (d_n e^{n\epsilon\zeta} + \bar{d}_n e^{-n\epsilon\zeta}), \end{aligned}$$

where

$$d_n = \sum_{r=0}^{\infty} (n+r-1)(r-1) a_{n+r} a_r$$

Thus altogether we have for the complex potential

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} i \{ b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{n\epsilon\zeta} + \bar{b}_n e^{-n\epsilon\zeta}) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int [c_0 + \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + \bar{c}_{-n}) e^{n\epsilon\zeta} + (\bar{c}_n + c_{-n}) e^{-n\epsilon\zeta}]] d\zeta \\ &\quad + k \int [d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (d_n e^{n\epsilon\zeta} + \bar{d}_n e^{-n\epsilon\zeta})] d\zeta. \end{aligned}$$

To find  $k$  to ensure that  $\Omega$  does not contain a cyclic term, we must make the constant term in the complete integral zero. That is we take

$$2kd_0 = c_0 + \bar{c}_0.$$

This gives immediately for the complete potential

$$\begin{aligned}\Omega = & \frac{1}{2}i \left\{ b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{n\zeta} + \bar{b}_n e^{-n\zeta}) \right\} \\ & + \frac{1}{2}i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (c_n + \bar{c}_{-n}) e^{n\zeta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\bar{c}_n + c_{-n}) e^{-n\zeta} \right\} \\ & - i \{ (c_0 + \bar{c}_0)/2d_0 \} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (d_n e^{n\zeta} - \bar{d}_n e^{-n\zeta}).\end{aligned}$$

4. Having found the complex potential function in the general case we can proceed at once to find the torsional couple. This is the real part of

$$\frac{1}{4} \tau \mu \int_c \left\{ \frac{2d\Omega}{dz} - i\bar{z} \right\} z \bar{z} dz,$$

and writing as above

$$\bar{z} z' = i \{ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{n\zeta} + c_{-n} e^{-n\zeta}) \},$$

the last part of the integral

$$- \frac{1}{4} \tau \mu i \int z \bar{z}^3 dz$$

is found immediately to be

$$\frac{1}{4} \pi \tau \mu \{ b_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n c_{-n} + \bar{b}_n c_n) \}.$$

Also we have

$$\frac{1}{2} \tau \mu \int_c \frac{d\Omega}{dz} z \bar{z} dz = \frac{1}{2} \tau \mu \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{d\zeta} z \bar{z} d\zeta,$$

where

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{d\zeta} = & -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n e^{n\zeta} - \bar{b}_n e^{-n\zeta}) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (c_n + \bar{c}_{-n}) e^{n\zeta} + (\bar{c}_n + c_{-n}) e^{-n\zeta} \} \\ & + \{ (c_0 + \bar{c}_0)/2d_0 \} \sum_{n=1}^{\infty} (d_n e^{n\zeta} + \bar{d}_n e^{-n\zeta}),\end{aligned}$$

and the above integral then gives

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \pi \tau \mu [ & \sum_{n=1}^{\infty} \{ -b_n (\bar{c}_n + c_{-n}) - \bar{b}_n (c_n + \bar{c}_{-n}) \} \\ & + \{ (c_0 + \bar{c}_0)/d_0 \} (b_n \bar{d}_n + \bar{b}_n d_n) ],\end{aligned}$$

so that altogether the torsional couple is the real part of

$$\frac{1}{2} \pi \tau \mu [b_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{-b_n \bar{c}_n - \bar{b}_n c_{-n}\} + \{(c_0 + \bar{c}_0)/d_0\} (b_n \bar{d}_n + \bar{b}_n d_n)].$$

5. The simplest example of this type of cylinder is of course the elliptic cylinder whose transformation is of the form

$$z = c \cos (\zeta + i\alpha).$$

We have immediately

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} c e^{\alpha}; & a_1 &= 0; & a_2 &= \frac{1}{2} c e^{-\alpha}; \\ b_0 &= \frac{1}{2} c^2 \cosh 2\alpha; & b_1 &= 0; & b_2 &= \frac{1}{2} c^2; \\ c_0 &= -\frac{1}{2} c^2 \sinh 2\alpha; & c_1 &= 0; & c_2 &= \frac{1}{2} c^2; \\ d_0 &= \frac{1}{2} c^2 \cosh 2\alpha; & d_1 &= 0; & d_2 &= -\frac{1}{2} c^2; \end{aligned}$$

so that in this case we have

$$\Omega = \text{const} + \frac{1}{2} i c^2 \{\cosh 2(\zeta + i\alpha)\} / \cosh 2\alpha,$$

and the couple is

$$\frac{1}{2} \pi \tau \mu c^4 \{\sinh^2 2\alpha\} / \cosh 2\alpha.$$

In terms of  $z$  these results are

$$\Omega = \frac{1}{2} i \frac{(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} z^2,$$

and the couple

$$\pi \tau \mu a^3 b^3 / (a^2 + b^2),$$

where  $a, b$  have their usual values. These are the usual forms of the results.

The results for the other cases follow equally readily although of course they are more complex in form.

### The Hydrodynamical Problem and Conclusion.

6. In the previous paper we worked out not only the above torsion problem but also the somewhat similar hydrodynamical problem, generalised however to include also the instantaneous linear motion of the boundary and involving therefore first as well as second order boundary values. Assuming then that the cylinder is moving with velocity components  $u, v$  and angular velocity  $\omega$ , for the condition at the boundary to be satisfied we can reduce the problem to that of finding a real function  $F(\zeta)$  so that the complex potential function

$$\Omega = \bar{w} z(\zeta) - \frac{1}{2} i \omega z(\zeta) \bar{z}(\zeta) + F(\zeta); \quad w = u + i v,$$

with its derivatives is regular everywhere inside the cylinder, and more particularly at the points where  $z' = 0$ . As we see the additional linear terms

already have a derivative which is proportional to  $z'$  so that their presence does not affect the determination of  $F(\zeta)$ . We have in fact exactly as in the above discussion

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} i \omega \int \{z(t) \bar{z}'(t) - z'(t) \bar{z}(t) + 2 i k z'(t) \bar{z}'(t)\} dt,$$

$k$  being still determined so that the potential does not represent a physically impossible cyclic motion.

The details of the discussion therefore vary but little from that previously given and we shall not therefore pursue them further.

In conclusion we may say that this paper completes the solution of two typical internal boundary value problems for two very general types of cylinder, which now include all those for which solutions of this character are known, and of course many others. Elsewhere we hope to be able to give details of the corresponding solution for the most complex problem of this type yet formulated in any detail, viz. the flexure problem of St. Venant (which involves third order boundary values), when it will be seen that the method is perfectly general and applicable to any problem of this character. The solutions we obtain are in fact so general and explicit that they reduce the problem of determining the solution of one of these potential problems for any particular cylinder, to the problem of determining the conformal transformation of either (i) the interior of the curve of section of the cylinder on to the interior of a circle, or (ii) the exterior of the curve of section of the cylinder on to the exterior of the circle by a transformation which continues in the interior in such a way as to map the interior of the curve on to a ring inside the circle. Once either of these transformations is obtained in the form in which we have used them, the solution of the particular potential problem is obtained simply by substituting the values of the particular coefficients of the transformation in the appropriate general formulae of our analysis.

There are of course other types of potential problems to which these methods apply but each type has its own peculiar difficulties some of which we have not yet been able to overcome, so that they must wait another occasion.

(Eingegangen am 18. 5. 1939.)

# Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II.

Von

Hans Petersson in Hamburg.

## Einleitung und Inhaltsübersicht.

In dieser Arbeit behandle ich die Theorie der Stufe  $Q$  und beweise hier zunächst den in der Inhaltsübersicht des ersten Teils <sup>1)</sup> genannten Satz über die simultane Transformation der in einer Schar  $S_i(t, \varepsilon, Q)$  nach (T<sub>n</sub>, II) erklärten Matrizen  $\lambda(n)$  mit  $(n, Q) = 1$  auf Diagonalgestalt. Dieses erste Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen besagt genau folgendes:

**Satz 5.** *Es sei  $Q$  eine feste natürliche Zahl,  $t$  ein Teiler von  $Q$  und  $t_1 = \frac{Q}{t}$ .*

*Die Schar der sämtlichen ganzen Spitzenformen der Stufe  $Q$  von der (negativen ganzen) Dimension  $-\tau$ , welche überdies zum Teiler  $t$  und zum Restcharakter  $\varepsilon(n) \bmod Q$  gehören, werde mit  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  bezeichnet. Es sei  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  eine Teilschar von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ , welche durch alle  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  in sich übergeführt wird,  $\mu$  der Rang von  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$ . Dann existiert eine normierte Orthogonalbasis*

$$v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_\mu(\tau)$$

*von  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  derart, daß die Gleichungen*

$$(16) \quad v_i(\tau) | T_n = \omega_i(n) v_i(\tau) \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

*mit geeigneten Konstanten  $\omega_i(n)$  für alle  $n$  mit  $(n, Q) = 1$  gelten. Die Eigenwerte  $\omega_i(n)$  genügen den Beziehungen*

$$(17) \quad \omega_i(n) = \varepsilon(n) \overline{\omega_i(n)} \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

*für alle  $n$ . Wenn  $t = 1$  oder jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht, so sind die Formen  $v_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) aus  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  durch ihre lineare Unabhängigkeit und ihre Eigenschaft, Eigenfunktionen zu allen Operatoren  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  zu sein, bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig fixiert. Ist (unter dieser Zusatzannahme über  $t$ ) eine Form  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  Eigenfunktion gegenüber allen  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$ , so stimmt sie bis auf einen konstanten Faktor mit einer der Formen  $v_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) überein.*

<sup>1)</sup> Math. Annalen 116 (1939), S. 401–412; im Text gelegentlich mit (K I) zitiert.

Der Beweis dieses Satzes verläuft in voller Analogie zu dem des Hauptsatzes für  $Q = 1$ , und ich habe den diesbezüglichen Entwicklungen des ersten Teils methodisch nicht viel Neues hinzuzufügen. Immerhin erfordern aber die Abweichungen dieses Beweises von den Beweisen im ersten Teil eine ausführliche Darstellung, die ich mit Rücksicht auf die späteren Anwendungen in Beweise einzelner Hilfssätze zerlegt habe (§ 1). Da die Operatoren  $T_m^t$  mit  $(m, t_1) > 1$  alle Formen von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  in Null überführen, ist mit diesem Satz 5 die simultane Diagonaltransformation für alle  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ), also das vollständige Analogon des Satzes 4 des ersten Teils, bewiesen, falls  $t = 1$  ist und ebenso, falls jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht. Für die Primzahlpotenzstufe  $Q = q^n$  besteht mithin dieser Sachverhalt in allen Scharen  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  mit Ausnahme derjenigen, bei denen  $t = Q = q^n$ .

Zu diesem Problem der simultanen Diagonaltransformation für alle  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ) ist im übrigen zu bemerken, daß es durch den Satz 36 in (T<sub>n</sub> II) eine gewisse Reduktion erfährt. Denn nach diesem Satze sind die Scharen  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  und  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon\chi^2, Q)$  einander linear-isomorph, wenn  $\chi$  einen beliebigen Restcharakter mod  $t_1$  bezeichnet; die dem Operator  $T_m^t$  in der zweiten Schar zugeordnete Matrix geht aus der entsprechenden Matrix der ersten Schar durch Multiplikation mit dem skalaren Faktor  $\chi(m)$  hervor. Hat man also die simultane Diagonaltransformation für alle  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ) in einer dieser Scharen, etwa  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  ausgeführt, so ist sie damit bereits in allen Scharen  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon\chi^2, Q)$  vollzogen. Im Spezialfalle der Primzahlstufe  $Q = q$  bedeutet dies z. B., daß man nur eine der Scharen  $\mathfrak{S}(1, \varepsilon, q)$  vom Teiler  $t = 1$  in der genannten Richtung zu untersuchen hat.

Nach den Ergebnissen von (T<sub>n</sub> II) beruht nun die Existenz eines Euler-Produkts von der Gestalt (T<sub>n</sub> II) Gleichung (20), (20a) [gebildet mit Zahlen an Stelle von Matrizen] für die den Formen von  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  zugeordneten [einzelnen] Dirichlet-Reihen auf dem zu (16) analogen Verhalten der Formen gegenüber allen Operatoren  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ). Deshalb existiert ein volles System linear-unabhängiger Dirichlet-Reihen der betreffenden Schar mit den angegebenen Produktentwicklungen, wenn  $t = 1$  oder jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht. Wenn dagegen diese Zusatzbedingung nicht erfüllt ist und wenn man nur weiß, daß die Gleichungen (16) für die zu  $Q$  primen  $n$  bestehen, so erschließt man aus (T<sub>n</sub> II), Satz 42, daß die den Formen  $v_i(\tau)$  zugeordneten Dirichlet-Reihen Euler-Produkte bezüglich der in  $Q$  nicht aufgehenden Primzahlen  $p$  sind. Daher gilt insgesamt die folgende Verschärfung des Satzes 39 in (T<sub>n</sub> II):

**Satz 6.** Es sei in den Bezeichnungen von Satz 5  $\mathfrak{L}_0(t, \varepsilon, Q)$  die lineare Schar der den Formen

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{Q}} \text{ von } \mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$$

zugeordneten Dirichlet-Reihen

$$D(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (m t)^{-s}.$$

Dann hat die Schar  $\mathfrak{I}_0(t, \varepsilon, Q)$  den Rang  $\mu$ , und es gibt eine Basis von  $\mathfrak{I}_0(t, \varepsilon, Q)$ , bestehend aus den Dirichlet-Reihen  $H_i(s)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ), welche sämtlich eine Produktzerfällung von der Gestalt

$$(18) \quad H_i(s) = t^{-s} H_i^{(Q)}(s) \prod_{(p, Q)=1} \sum_{r=0}^{\infty} c_i(p^r) p^{-rs} \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

zulassen. Hier ist  $c_i(1) = 1$ , das Produkt wird über alle Primzahlen  $p > 1$  erstreckt, die nicht in  $Q$  aufgehen, und  $H_i^{(Q)}(s)$  bezeichnet eine Dirichlet-Reihe

$$H_i^{(Q)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{i,n} n^{-s} \quad (1 \leq i \leq \mu),$$

in der  $b_{i,1} = 1$  und  $b_{i,n} = 0$ , wenn  $n$  andere als diejenigen Primfaktoren enthält, die in  $t$  und nicht in  $t_1$  aufgehen. Die Faktoren der Produkte auf der rechten Seite von (18) haben, wenn  $H_i(s)$  die  $A_i \cdot v_i(\tau)$  ( $A_i$  eine geeignete Konstante) zugeordnete Dirichlet-Reihe darstellt, die Form

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_i(p^r) p^{-rs} = \left( 1 - \frac{\omega_i(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p) p^{r-1}}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

Besitzt eine einzelne Dirichlet-Reihe  $H(s)$  aus  $\mathfrak{I}_0(t, \varepsilon, Q)$  eine Produktzerlegung von der Gestalt

$$(19) \quad H(s) = t^{-s} H^{(Q)}(s) \prod_{(p, Q)=1} \sum_{r=0}^{\infty} c(p^r) p^{-rs}, \quad (c(1) = 1),$$

wo in  $H^{(Q)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$  außer  $n = 1$  höchstens diejenigen  $n$  vorkommen, deren Primfaktoren in  $Q$  aufgehen, so stimmt das unendliche Produkt auf der rechten Seite dieser Darstellung mit einem der Produkte

$$\prod_{(p, Q)=1} \left( 1 - \frac{\omega_i(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p) p^{r-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

überein; die in  $H^{(Q)}(s)$  vorkommenden  $n > 1$  enthalten nur Primteiler von  $t$ , die nicht in  $t_1$  aufgehen. Ist eine beliebige Basis  $K_i(s)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) von  $\mathfrak{I}_0(t, \varepsilon, Q)$  vorgelegt, deren Elemente  $K_i(s)$  sämtlich eine Produktzerfällung (19) gestatten, so stimmen die unendlichen Produkte auf den rechten Seiten dieser Darstellungen bei geeigneter Anordnung der  $K_i(s)$  mit den Produkten

$$\prod_{(p, Q)=1} \left( 1 - \frac{\omega_i(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p) p^{r-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

überein. Sämtliche Dirichlet-Reihen  $D(s)$  aus  $\mathfrak{L}_0(t, \varepsilon, Q)$  sind ganze Funktionen von  $s$ .

Wenn  $t = 1$  ist oder jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht, so gilt ersichtlich  $H_i^{(Q)}(s) = 1$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) und daher folgender Eindeutigkeitsatz: Die Dirichlet-Reihen  $H_i(s)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) sind als Angehörige der Schar  $\mathfrak{L}_0(t, \varepsilon, Q)$  durch ihre lineare Unabhängigkeit und die Existenz einer Produktentwicklung (18) bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt; besitzt eine einzelne Dirichlet-Reihe aus  $\mathfrak{L}_0(t, \varepsilon, Q)$  eine Produktzerlegung von der Gestalt (19) mit  $b_1 = 1$ , so stimmt sie mit einer der Reihen  $H_i(s)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) überein.

Dieser Satz 6 ist abgesehen von der im allgemeinen Fall bestehenden Eindeutigkeitsaussage über die Funktionen  $K_i(s)$  eine unmittelbare Folge von Satz 5 und der Theorie in ( $T_n$  II). Insbesondere ergeben sich die Eindeutigkeitsaussagen für  $t = 1$  und wenn jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht, aus ( $T_n$  II), Satz 40a. Zur Begründung der Eindeutigkeitsaussage im allgemeinen Fall und als methodische Ergänzung zu den Beweisen von Satz 5 werden im § 2 einige Überlegungen ausgeführt, die sich auf die Frage der Darstellung der hier untersuchten Transformationen in vorgegebenen Formenscharen beziehen.

Ist erstens  $\mathfrak{N}$  ein Normalteiler von endlichem Index der Modulgruppe  $\bar{\Gamma}(1)$ , so erweisen sich die Transformationen von  $\bar{\Gamma}(1)$ , angewandt auf die zu  $\mathfrak{N}$  gehörigen ganzen Spitzenformen, als metrikerhaltende Transformationen bezüglich der im ersten Teil aufgestellten Metrisierung. Sind also zwei Formenscharen  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  zu  $\mathfrak{N}$  vorgelegt, deren Basen sich bei Anwendung der Transformationen einer Zwischengruppe  $\mathfrak{U}$  zwischen  $\bar{\Gamma}(1)$  und  $\mathfrak{N}$  nach zwei inäquivalenten irreduziblen Darstellungen der Faktorgruppe  $\mathfrak{U}/\mathfrak{N}$  umsetzen, so stehen die beiden Scharen aufeinander senkrecht (Satz 11). Daraus folgt insbesondere, daß zwei ganze Spitzenformen der Stufe  $Q$ , die zu verschiedenen Teilern oder zu verschiedenen Charakteren gehören, stets aufeinander senkrecht stehen müssen (Satz 12).

An zweiter Stelle werden die Darstellungen, welche die Operatoren  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  in verschiedenen invarianten Scharen von ganzen Spitzenformen der Stufe  $Q$  erfahren, mit ähnlichen Methoden untersucht. Hier ergibt sich zunächst ein Zusammenhang zwischen den Matrizen, die einem Operator  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  in zwei Formenscharen vom gleichen Teiler und Charakter zugeordnet sind. Da nach Satz 5 nur eingliedrige Formenscharen eine irreduzible Darstellung des von den  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  erzeugten Operatorringes vermitteln können, hat man als Analogon des oben genannten Satzes 11 (über die zu einem Normalteiler  $\mathfrak{N}$  gehörigen ganzen Spitzenformen) die allgemeine Aussage des Satzes 15 über Paare von Eigenfunktionen gegenüber einem Operator  $T_n$  zu betrachten. Sind danach  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  zwei ganze Spitzenformen der Stufe  $Q$  vom gleichen Teiler und Charakter und beide

Eigenfunktionen eines Operators  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$ , so stimmen entweder die zugehörigen Eigenwerte von  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  miteinander überein, oder  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  stehen aufeinander senkrecht.

Dieser Satz läßt erkennen, daß die Metrisierung das naturgemäße Mittel ist, um die in der vorliegenden Arbeit behandelte Aufgabe der simultanen Diagonaltransformation für die den  $T_n$  zugeordneten Matrizen zu lösen. Denn nach der im ersten Teil entwickelten Theorie der Stufe 1 haben z. B. die in Satz 4 des ersten Teils genannten Eigenwerte  $\varrho_i(n)$  die Eigenschaft, daß die (reellen) Vektoren

$$r_i = \{\varrho_i(1), \varrho_i(2), \dots, \varrho_i(\mu)\} \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

linear unabhängig sind. Dies allein hat nach dem genannten Satz bereits zur Folge, daß die Formen  $v_i(\tau)$ ,  $v_m(\tau)$  mit  $m \neq i$  aufeinander senkrecht stehen müssen.

In der Theorie der Stufe  $Q$  gibt dieser Satz 15 die Existenz einer Zerlegung jeder gegenüber allen  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  invarianten Formenschar von festem Teiler und Charakter in paarweise orthogonale Teilscharen, die aus lauter Eigenfunktionen für alle  $T_n$  ( $(n, Q) = 1$ ) bestehen. Die Eigenwerte der Formen einer Teilschar sind die gleichen, während die Eigenwertssysteme  $\varrho(n)$ ,  $\sigma(n)$  ( $(n, Q) = 1$ ) zweier Formen  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  aus verschiedenen Teilscharen nicht übereinstimmen (Satz 16). Das Beispiel der in § 3 untersuchten Formenschar der Primzahlstufe  $Q = q$  vom Teiler  $q$ , die aus den normierten Darstellungen des Grades  $q$  entspringt, zeigt, daß man genötigt sein kann, solche Formenscharen zu betrachten, deren Teilscharen nicht sämtlich eingliedrig sind. Immerhin gelangt man durch diesen Satz zu der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß eine Basis aus lauter Eigenfunktionen gegenüber allen  $T_n$  [ $(n, Q) = 1$ ] als solche bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt sei. Die Gültigkeit dieses Eindeutigkeitsatzes hat zur Folge, daß die genannten Basisformen automatisch Eigenfunktionen gegenüber allen Operatoren  $T_m^i$  ( $m \geq 1$ ) sind, falls die Formenschar durch alle diese  $T_m^i$  als ganzes in sich übergeführt wird (Satz 17).

Die weiteren Ergebnisse dieser Arbeit beziehen sich auf die gegenüber allen  $T_m^i$  ( $m \geq 1$ ) invarianten Scharen  $\Xi_0(t, \varepsilon, Q)$ , deren Teiler die Zusatzbedingung aus Satz 5 nicht erfüllen, also Primfaktoren enthalten, die nicht in dem zugehörigen  $t_1$  aufgehen. Hier verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Hecke ein Beispiel für eine solche Formenschar mit  $Q = t = q^3$  ( $q$  eine ungerade Primzahl), in der die in (T<sub>n</sub> II) erklärte Matrix  $\lambda(q)$  sicher nicht auf Diagonalform transformierbar ist. Dieses Beispiel ist von ähnlicher Beschaffenheit wie das Beispiel des analogen Effekts bei den Eisenstein-Reihen, (T<sub>n</sub> II), § 10, Satz 45a. Nach Kenntnis dieses Sachverhalts liegt es nahe, anzunehmen, daß die simultane Diagonaltransformation für die den sämtlichen

$T_m^i$  ( $m \geq 1$ ) in einer bei diesen invarianten Formenschar zugeordneten Matrizen, wenn sie überhaupt möglich ist, nur auf Grund sehr genauer Strukturaussagen über die betreffenden Formenscharen bewiesen werden kann. Daher werden in § 3 die Formen der Primzahlstufe  $Q = q$  auf Grund der Theorie in (T, II), § 11 und 12 eingehend in dieser Richtung untersucht; bei der folgenden Darstellung der Ergebnisse wird der soeben genau formulierte Satz von der simultanen Diagonaltransformation zur Abkürzung als das „Hauptachsentheorem“ bezeichnet.

Nach jener Theorie lassen sich die invarianten Formenscharen vom Teiler  $q$  in eine Anzahl von invarianten Teilscharen zerlegen, die aus der Heckschen Darstellungstheorie durch den Begriff der normierten Darstellung erklärt sind [(T, II), Satz 56, 57 und 55; die zugehörigen Darstellungsgrade sind  $f = q + 1, \frac{1}{2}(q + 1), q$ ]. Zum Beweise des Hauptachsentheorems werden die einzelnen Teilscharen getrennt untersucht. Hinsichtlich der Beweisführung ist an erster Stelle hervorzuheben, daß sie nicht auf einer neuerlichen Anwendung der Metrisierung beruht, sondern daß bereits die systematische Ausnutzung des Hauptsatzes 5 der vorliegenden Arbeit in jedem Falle das Erreichbare liefert. Die erfolgreiche Heranziehung des Hauptsatzes 5 wird durch zwei von Herrn Hecke herrührende Gedanken ermöglicht.

Der eine Gedanke besteht in folgendem: Zu jeder der genannten Teilscharen  $\mathfrak{S}_q$  vom Teiler  $q$  gibt es eine „Parallelschar“  $\mathfrak{S}_1^*$  vom Teiler 1 derart, daß die Matrizen  $\lambda(n)$  mit  $(n, q) = 1$  in beiden Scharen bis auf einen skalaren Faktor übereinstimmen. Der von den in  $\mathfrak{S}_1^*$  gebildeten  $\lambda(n)$  erzeugte Matrizenring ist maximal und enthält daher die in  $\mathfrak{S}_q$  gebildete Matrix  $\lambda(q)$ , weil diese mit allen diesen  $\lambda(n)$  vertauschbar ist. Mithin gewinnt  $\lambda(q)$  automatisch Diagonalgestalt, wenn man die  $\lambda(n)$  mit  $(n, q) = 1$  nach Satz 5 auf Diagonalgestalt transformiert.

Durch dieses Vorgehen ergibt sich das Hauptachsentheorem für alle Typen von Teilscharen mit Ausnahme des Typus  $f = q$  [(T, II), Satz 55]; die Ausnahme besteht nur in dem allgemeinen Fall, daß die dort auftretende Anzahl  $e$  positiv ist. Um in dieser Schar  $\mathfrak{S}_0(q)$  der Invarianten der Gruppe  $\bar{\Gamma}_0(q)$  eine Basis zu bestimmen, die eine übersichtliche Umsetzung bei dem Operator  $T_q^q$  erfährt, nimmt man zunächst ein volles System von linear-unabhängigen ganzen Spitzenformen  $f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_e(\tau)$  der vollen Modulgruppe, welche Eigenfunktionen bei allen auf der ersten Stufe erklärten Operatoren  $T_n$  ( $n \geq 1$ ) sind, unter die Basisformen auf. Nach Herrn Hecke wählt man dann als weitere  $e$  Basisformen zweckmäßig die Formen  $f_1(q\tau), f_2(q\tau), \dots, f_e(q\tau)$ . Ergänzt man die bisher bestimmten  $2e$  Basisformen durch  $x - e$  zu diesen orthogonale Eigenfunktionen der Operatoren  $T_n$  ( $(n, q) = 1$ ), so gewinnt man eine Basis von  $\mathfrak{S}_0(q)$ , in der die Matrix  $\lambda(q)$  eine sehr übersichtliche Zerlegung auf Grund der folgenden beiden Tatsachen

gestattet: Erstens gelingt es, die Maximalität eines gewissen Ringes von Diagonalmatrizen auszunutzen, und zweitens setzen sich die beiden Formen  $f_i(\tau); f_i(q\tau)$  für jedes einzelne  $i = 1, 2, \dots, e$  bei Anwendung von  $T_q^i$  untereinander um. Hieraus folgt nun, daß das Hauptsachentheorem in der Schar  $\mathfrak{S}_0(q)$  dann und nur dann gilt, wenn die charakteristischen Wurzeln der zweireihigen Umsetzungsmatrix der Formen  $f_i(\tau), f_i(q\tau)$  für jedes  $i = 1, 2, \dots, e$  voneinander verschieden sind.

Diese charakteristischen Wurzeln verdienen ein besonderes Interesse. Sie sind die Nullstellen des quadratischen Polynoms

$$p_{i,q}(x) = x^2 - \varrho_i(q)x + q^{r-1}; \quad i = 1, 2, \dots, e.$$

$\varrho_i(q)$  ist der Eigenwert von  $f_i(\tau)$  bei Anwendung des auf der ersten Stufe erklärten Operators  $T_q$ . Eine von Ramanujan aufgestellte Vermutung besagt im Spezialfall  $r = 12$ , wo

$$e = 1, f_1(\tau) = \Delta(\tau) = e^{2\pi i \tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24},$$

daß  $|\varrho_1(q)| \leq 2q^{\frac{11}{12}}$ , d. h. daß  $p_{1,q}(x)$  nicht zwei verschiedene reelle Nullstellen besitzt. In dieser algebraischen Fassung ist die Ramanujansche Vermutung unmittelbar auf beliebige gerade Dimensionen  $-r \leq -12$  übertragbar; die Aussage, daß  $p_{i,q}(x)$  für  $i = 1, 2, \dots, e$  nicht zwei verschiedene reelle Nullstellen besitzt, bedeutet soviel wie

$$|\varrho_i(q)| \leq 2q^{\frac{1}{2}(r-1)} \quad (1 \leq i \leq e).$$

Diese Vermutung steht in bemerkenswerter Analogie zu der Riemannschen Vermutung für die Kongruenz-Zetafunktionen elliptischer Funktionenkörper. Denn ersichtlich gilt

$$q^{-2s} p_{i,q}(q^s) = 1 - \frac{\varrho_i(q)}{q^s} + \frac{q^{r-1}}{q^{2s}},$$

und überdies steht rechts der  $q$ -Bestandteil des Euler-Produkts der  $f_i(\tau)$  auf der ersten Stufe zugeordneten Dirichlet-Reihe;  $f_i(\tau)$  muß dabei so normiert werden, daß der niedrigste Fourier-Koeffizient von  $f_i(\tau)$  gleich 1 ist.

Für das vorliegende Problem ist nur die Gleichung

$$|\varrho_i(q)| = 2q^{\frac{1}{2}(r-1)}$$

von Bedeutung. Hier kann man durch eine einfache arithmetische Überlegung erkennen, daß diese Gleichung bei fest gegebenem  $r$  nur für endlich viele Primzahlen zutreffen kann. Die damit nach den Gedankengängen von Herrn Hecke bewiesenen Sätze haben folgenden Wortlaut:

**Satz 7.** Es sei  $q$  eine ungerade Primzahl,  $t = 1$  oder  $q$ ,  $\varepsilon(n)$  ein Restcharakter mod  $q$ ,  $\mathfrak{B}$  eine gegenüber allen  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ) invariante Schar von

ganzen Modulformen (Spitzenformen oder nicht) der Art  $\{\bar{\Gamma}(q), -r\}$ , die zum Teiler  $t$  und zum Charakter  $\varepsilon(n)$  gehören,  $\mu$  der Rang von  $\mathfrak{B}$ . Dann gilt unter einer gleich zu nennenden Einschränkung das Hauptachsenteiletheorem, also folgender Satz: Es gibt eine Basis

$$v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_\mu(\tau)$$

von  $\mathfrak{B}$  derart, daß die Gleichungen

$$v_i(\tau) | T_m^t = \omega_i(m) v_i(\tau) \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

für alle natürlichen  $m$  bestehen. Die Formen  $v_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) sind als Formen aus  $\mathfrak{B}$  durch ihre lineare Unabhängigkeit und ihre Eigenschaft, Eigenfunktionen bei allen  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ) zu sein, bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt. Ist eine Form  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{B}$  Eigenfunktion gegenüber allen  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ), so stimmt sie bis auf einen konstanten Faktor mit einer der Formen  $v_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) überein.

Der Satz gilt ohne Ausnahme, wenn  $\mathfrak{B}$  keine der Invarianten der Gruppe  $\bar{\Gamma}_0(q)$  enthält. In der Schar  $\mathfrak{S}_0(q)$  der Invarianten von  $\bar{\Gamma}_0(q)$  gilt der Satz bei gegebenem  $r$  für alle Primzahlstufen  $q$  mit Ausnahme von endlich vielen Primzahlen  $q = q_1(r), q_2(r), \dots, q_N(r)$ ,  $N = N(r)$ .

**Satz 8.** Es sei  $\mathfrak{Z}$  die lineare Schar der den Formen von  $\mathfrak{B}$  auf der Stufe  $q$  zugeordneten Dirichlet-Reihen; wenn  $\mathfrak{B}$  eine Invariante von  $\bar{\Gamma}_0(q)$  enthält, so sei  $q$  von den in Satz 7 genannten Ausnahmeprimzahlen verschieden. Dann gilt: Die Schar  $\mathfrak{Z}$  hat den Rang  $\mu$ , und es gibt eine Basis von  $\mathfrak{Z}$ , bestehend aus den Dirichlet-Reihen  $H_i(s)$  mit den Eulerschen Produktentwicklungen von der Gestalt

$$(20) \quad H_i(s) = t^{-s} \left(1 - \frac{\eta_i}{q^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \sum_{r=0}^{\infty} c_i(p^r) p^{-rs}, \quad c_i(1) = 1 \quad (1 \leq i \leq \mu).$$

Die  $H_i(s)$  sind als Funktionen aus  $\mathfrak{Z}$  durch ihre lineare Unabhängigkeit und ihre Produktentwicklungen (20) bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Bei geeigneter Wahl dieser Reihenfolge gilt

$$H_i(s) = t^{-s} \left(1 - \frac{\omega_i(q)}{q^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\omega_i(p)}{p^s} + \frac{\varepsilon(p) p^{r-1}}{p^{2s}}\right)^{-1} \quad (1 \leq i \leq \mu).$$

Besitzt eine einzelne Dirichlet-Reihe  $D(s)$  aus  $\mathfrak{Z}$  eine Produktentwicklung von der Gestalt

$$D(s) = t^{-s} \left(1 - \frac{\eta}{q^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \sum_{r=0}^{\infty} c(p^r) p^{-rs}$$

mit  $c(1) = 1$ , so stimmt sie mit einer der Reihen  $H_i(s)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) überein.

Im Anschluß an die Beweise dieser Sätze wird noch eine rein algebraische Frage erörtert. Die von Herrn Hecke eingeführte Basis der Schar  $\mathfrak{S}_0(q)$

enthält in den  $f_i(q\tau)$  Formen, welche sich aus den Formen  $f_i(\tau)$  der Stufe 1 und solchen Formen der Stufe  $q$  zusammensetzen, die als Formen vom Teiler  $q$  unmittelbar durch eine normierte irreduzible Darstellung  $\mathfrak{G}_q$  gegeben sind. Auf Grund der Ergebnisse des § 2 gelingt es, die Struktur derjenigen Matrix zu bestimmen, durch welche die Hecke'sche Basis mit einer Basis verknüpft ist, in der die Formen  $f_i(\tau)$  und die genannten Formen der Stufe  $q$  vom Teiler  $q$  getrennt auftreten (Satz 20).

### Bezeichnungen.

Die Bezeichnungen sind, soweit sie dort bereits auftreten, die gleichen wie im ersten Teil. Im übrigen stimmen sie, von geringfügigen Änderungen abgesehen, mit denen von ( $T_n$  I) und ( $T_n$  II) überein. Hinsichtlich der Schreibweise für die Transformation einer Funktion mit einer reellen linearen Substitution werde folgende Festsetzung getroffen:

Es sei  $r$  eine fest gegebene natürliche Zahl,  $f(\tau)$  irgendeine in der oberen Halbebene der komplexen Variablen  $\tau$  reguläre analytische Funktion,  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit reellen  $a, b, c, d$  und  $ad - bc > 0$  das Koeffizientenschema einer linearen Substitution in  $\tau$ . Wir setzen

$$f(\tau)|S = f(S\tau)(c\tau + d)^{-r}.$$

Dann gilt stets, wenn zwei solche Substitutionsschemata  $S_1, S_2$  mit positiven Determinanten vorgelegt sind und ihr Produkt wie üblich im Sinne der Matrizenmultiplikation gebildet wird:

$$[f(\tau)|S_1]|S_2 = f(\tau)|S_1S_2.$$

Ist  $f(\tau)$  eine (eigentlich-) automorphe Form von der Dimension  $-r$  zu einer gewissen Substitutionsgruppe  $\Gamma$ , so besagt die Invarianzeigenschaft von  $f(\tau)$  gegenüber der Substitution mit dem Schema  $L$  aus  $\Gamma$ , daß

$$f(\tau)|L = f(\tau).$$

Daher gilt für eine solche automorphe Form  $f(\tau)$ :

$$f(\tau)|S_1 = f(\tau)|S_2,$$

wenn  $S_1$  und  $S_2$  sich um einen vorderen Faktor  $L$  aus  $\Gamma$  unterscheiden.

Hieraus ergibt sich nun die allgemeine Erklärung des Operators  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  für eine Form  $f(\tau)$  der Art  $\{\bar{F}(Q), -r\}$ : Es sei  $\mathfrak{B}$  ein Vertretersystem der Linksklassen von  $\mathfrak{D}_n$  nach der vollen Modulgruppe derart, daß alle Vertreter  $S$  von  $\mathfrak{B}$  die Kongruenz  $S \equiv S_n \pmod{Q}$  erfüllen, wo  $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$f(\tau)|T_n = n^{r-1} \sum_{S \in \mathfrak{B}} f(\tau)|S.$$

## Durchführung der Beweise.

## § 1.

Die Operatoren  $T_n$  zur beliebigen Stufe  $Q$  mit  $(n, Q) = 1$ .

Hilfssatz 2. Es sei  $p$  eine Primzahl, die nicht in  $Q$  aufgeht. Dann existiert ein gemeinsames Vertretersystem  $\mathfrak{B}$  der Rechts- und Linksklassen von  $\mathfrak{D}_p$  nach  $\bar{F}(1)$  derart, daß sämtliche Vertreter  $\equiv S_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \pmod{Q}$  sind.

Beweis (kleine Buchstaben bedeuten ganze Zahlen. Die Vertreter  $R, W$  der Rechtsklassen und der Linksklassen seien wie im Hilfssatz 1 des ersten Teils gewählt und bezeichnet): Es sei

$$R = \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_p \equiv \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \pmod{Q}, \quad R_p \subset \bar{F}(1),$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \equiv -rp \pmod{Q}.$$

Dann ist, wie man durch Ausrechnen bestätigt,

$$RL \equiv S_p \pmod{Q} \text{ mit } L = R_p U^\lambda \subset \bar{F}(1).$$

Für  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$  und  $L \subset \bar{F}(Q)$  ist dagegen offenbar  $RL \equiv S_p \pmod{Q}$ .

Wir beweisen zunächst, daß die  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = RL$  mit  $L \subset \bar{F}(1)$ , die  $S \equiv S_p \pmod{Q}$  erfüllen, bei gegebenem  $R$  durch Wahl von  $L$  allein ein vorgeschriebenes  $(a, c) = \mu = 1$  oder  $p$  erhalten können. Sei erstens  $R = \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dann ist  $\mu = (p\alpha, \gamma)$ . Man setze einerseits  $R_p = \begin{pmatrix} p' & uQ \\ Q & p \end{pmatrix}$ ; dann kommt  $\mu = (pp', Q) = 1$ . Man setze andererseits

$$R_p = \begin{pmatrix} p' & uQ \\ pQ & p_0 \end{pmatrix} \text{ mit } p_0 = p + Q^2, \quad p_0 p' \equiv 1 \pmod{pQ^2};$$

dann kommt  $\mu = (pp', pQ) = p$ . Sei zweitens  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = S_p$ , also  $\mu = (\alpha, p\gamma)$ ;  $\mu = 1$  ergibt sich für  $L = I$ ,  $\mu = p$  für

$$L = \begin{pmatrix} 1 + xQ & -xQ \\ xQ & 1 - xQ \end{pmatrix} \text{ mit } xQ + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wir beweisen ferner: Wenn  $\mu = 1$  (also  $\lambda = p$ ), so ist bei gegebenem  $R$  durch Wahl der  $L$  und  $L'$  aus  $\bar{F}(1)$  allein ein gegebenes  $\nu$  erreichbar, für welches

$$S = RL = L'W \equiv S_p \pmod{Q}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Sei  $R$  gegeben. Wie bereits bewiesen, existieren eine Matrix  $W_0 = \begin{pmatrix} 1 & v_0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$  und zwei Matrizen  $L, L'$  aus  $\bar{F}(1)$  mit  $RL = L'W_0 \equiv S_p \pmod{Q}$ . Zu dem gegebenen  $v$  bestimme man  $j$  und  $k$  so, daß  $jQ + v_0 = v + kp$ . Dann gilt

$$W_0 U^{jQ} = U^k W, \quad R L U^{jQ} = L' U^k W \equiv S_p \pmod{Q}, \text{ q. e. d.}$$

**Hilfssatz 3.** Es sei  $g$  eine natürliche Zahl,  $S \in \mathfrak{D}_g$ . Dann gilt

$$\bar{F}(Qg) \subset S^{-1} \bar{F}(Q) S, \quad \bar{F}(Qg^2) \subset S^{-1} \bar{F}(Qg) S \subset \bar{F}(Q).$$

**Hilfssatz 4.** Es seien  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  zwei ganze Spitzenformen  $\{\bar{F}(Q), -r\}$ , es sei  $g$  eine natürliche Zahl,  $S \in \mathfrak{D}_g$ . Dann gilt

$$(f(\tau)|S, \varphi(\tau))_{\bar{F}(Qg)} = (f(\tau), \varphi(\tau)|gS^{-1})_{\bar{F}(Qg)}.$$

**Beweis.** Wir setzen  $S^* = \frac{1}{\sqrt{g}} S$ , so daß  $f(\tau)|S = g^{-\frac{r}{2}} f(\tau)|S^*$ . Nach (10), Hilfssatz 3 und den Überlegungen des dritten Abschnitts in (K I) ergibt sich

$$\begin{aligned} (f(\tau)|S, \varphi(\tau))_{\bar{F}(Qg)} &= g^{-\frac{r}{2}} (f(\tau)|S^*, \varphi(\tau))_{S^{-1}\bar{F}(Qg)S} \\ &= g^{-\frac{r}{2}} (f(\tau), \varphi(\tau)|S^{*-1})_{\bar{F}(Qg)} \\ &= (f(\tau), \varphi(\tau)|gS^{-1})_{\bar{F}(Qg)}. \end{aligned}$$

Aus der Integralumformung des dritten Abschnitts in (K I) erschließt man ferner den folgenden

**Hilfssatz 5.** Ist  $\mathfrak{N}$  ein Normalteiler von endlichem Index der Modulgruppe, und sind  $f(\tau), \varphi(\tau)$  ganze Spitzenformen der Art  $\{\mathfrak{N}, -r\}$  mit ganzem  $r > 0$ , so gilt für jedes  $L$  aus  $\bar{F}(1)$ :

$$(f(\tau)|L, \varphi(\tau))_{\mathfrak{N}} = (f(\tau), \varphi(\tau)|L^{-1})_{\mathfrak{N}}.$$

Dieser Hilfssatz bedeutet, daß die Matrizen  $L$  aus  $\bar{F}(1)$  metrikerhaltende Transformationen in der metrisierten Schar der ganzen Spitzenformen  $\{\mathfrak{N}, -r\}$  vermitteln.

**Hilfssatz 6.** Es seien  $f(\tau), \varphi(\tau)$  ganze Spitzenformen  $\{\bar{F}(Q), -r\}$ , beide vom gleichen Teiler  $t$  und vom gleichen Charakter  $\varepsilon(n)$ . Ist  $p$  eine Primzahl, die nicht in  $Q$  aufgeht,  $T_p$  der eingangs erklärte Operator, so gilt

$$(f(\tau)|T_p, \varphi(\tau)) = \varepsilon(p) (f(\tau), \varphi(\tau)|T_p).$$

Die Skalarprodukte ohne Index sind hier und im folgenden in bezug auf die Gruppe  $\bar{F}(Q)$  zu bilden.

Beweis. Es sei  $j(Q, p)$  der Index von  $\Gamma(Qp)$  in  $\Gamma(Q)$ ,  $\mathfrak{B}$  ein Vertretersystem von  $\mathfrak{D}_p$  nach  $\bar{F}(1)$  von den in Hilfssatz 2 angegebenen Eigenschaften. Man hat nach Hilfssatz 4

$$\begin{aligned} (f(\tau) | T_p, \varphi(\tau)) &= \frac{1}{j(Q, p)} (f(\tau) | T_p, \varphi(\tau))_{\bar{F}(Qp)} = \frac{p^{r-1}}{j(Q, p)} \sum_{s \in \mathfrak{B}} (f(\tau) | S, \varphi(\tau))_{\bar{F}(Qp)} \\ &= \frac{p^{r-1}}{j(Q, p)} \sum_{s \in \mathfrak{B}} (f(\tau), \varphi(\tau) | pS^{-1})_{\bar{F}(Qp)}. \end{aligned}$$

Hier bilden die  $pS^{-1}$  nach Hilfssatz 2 ein Vertretersystem der Linksklassen von  $\mathfrak{D}_p$  nach  $\bar{F}(1)$  mit  $pS^{-1} \equiv \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{Q}$ . Daher bilden die  $X = R_p, pS^{-1}$  ein Vertretersystem der Linksklassen von  $\mathfrak{D}_p$  nach  $\bar{F}(1)$  mit  $X \equiv S_p \pmod{Q}$ . Ersetzt man in den Skalarprodukten der letzten Summe  $\varphi(\tau)$  durch

$$\varepsilon(p) \varphi(\tau) | R_p = \varphi(\tau),$$

so ergibt sich die Behauptung.

**Satz 9.** Es seien  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  ganze Spitzenformen  $\{\bar{F}(Q), -r\}$ , beide vom gleichen Teiler  $t$  und vom gleichen Charakter  $\varepsilon(n)$ . Dann gilt für beliebiges natürliches  $n$  mit  $(n, Q) = 1$ , wenn  $T_n$  die in  $(T_n, II)$  und eingangs erklärte Bedeutung hat:

$$(f(\tau) | T_n, \varphi(\tau)) = \varepsilon(n) (f(\tau), \varphi(\tau) | T_n).$$

Beweis. Es genügt ersichtlich, den Satz für  $n = p^h$  zu beweisen, wo  $p$  eine nicht in  $Q$  aufgehende Primzahl und  $h$  eine natürliche Zahl ist. Der Satz sei für  $n = p^l$  ( $1 \leq l \leq h$ ) bereits bewiesen. Aus

$$T_{p^l} = T(p^l), \quad T(p^{h+1}) = T(p^h) T(p) - p^{r-1} R_p T(p^{h-1})$$

[( $T_n, II$ ), S. 320], Hilfssatz 6 und der Induktionsannahme folgt

$$\begin{aligned} &(f(\tau) | T(p^{h+1}), \varphi(\tau)) \\ &= (f(\tau) | T(p^h) T(p), \varphi(\tau)) - p^{r-1} \varepsilon(p) (f(\tau) | T(p^{h-1}), \varphi(\tau)) \\ &= \varepsilon(p^{h+1}) (f(\tau), \varphi(\tau) | T(p^h) T(p)) - \varepsilon(p^{h+1}) p^{r-1} \varepsilon(p) (f(\tau), \varphi(\tau) | T(p^{h-1})) \\ &= \varepsilon(p^{h+1}) (f(\tau), \varphi(\tau) | T(p^{h+1})). \end{aligned}$$

Beweis von Satz 5. Es sei  $q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)\}$  eine normierte Orthogonalbasis von  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  und

$$q(\tau) | \hat{T}_n = \Lambda(n) q(\tau), \quad \Lambda(n) = (\lambda_{ik}(n)) \quad (i, k = 1, 2, \dots, \mu).$$

Man erhält nach dem Vorgehen in (K I), Abschnitt 4

$$\lambda_{ik}(n) = (\varphi_i | T_n, \varphi_k) = \varepsilon(n) (\varphi_i, \varphi_k | T_n) = \varepsilon(n) \overline{\lambda_{ki}(n)}$$

für  $i, k = 1, 2, \dots, \mu$ , also

$$(21) \quad \Lambda(n) = \varepsilon(n) \overline{\Lambda(n)}'.$$

Nun läßt sich bekanntlich eine quadratische Matrix  $A$  mit komplexen Elementen dann und nur dann unitär auf Diagonalform transformieren, wenn  $A$  mit  $\bar{A}'$  vertauschbar ist. Daher ist zunächst jedes einzelne  $\Lambda(n)$  unitär auf Diagonalform transformierbar, und das in (K I), Abschnitt 4 angewendete Verfahren gestattet jetzt den Nachweis dafür, daß die endlich vielen linear-unabhängigen  $\Lambda(n)$  durch eine unitäre Matrix simultan auf Diagonalgestalt transformiert werden können.

Die beiden am Schluß von Satz 5 gemachten Eindeutigkeitsaussagen folgen aus (T<sub>n</sub> II), Satz 40a.

Zum Schluß dieses Paragraphen werde der eingangs angedeutete Gedanke über die simultane Diagonaltransformation der Matrizen, die in einer Basis von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  den sämtlichen Operatoren  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ) entsprechen, kurz ausgeführt.

Es sei  $\chi$  ein Restcharakter mod  $t_1$ . Der Operator  $X = X_\chi$ , der der Form  $F(\tau)$  aus  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  mit der Fourier-Entwicklung

$$F(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i \frac{k\tau}{t_1}}$$

die Form

$$F(\tau) | X_\chi = G(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(k) e^{2\pi i \frac{k\tau}{t_1}}$$

aus  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon\chi^2, Q)$  zuordnet, vermittelt nach (T<sub>n</sub> II), Satz 36 eine eindeutige und gegenüber Linearkombinationen isomorphe Abbildung der Schar  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  auf die Schar  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon\chi^2, Q)$ . Nach (T<sub>n</sub> II), Gleichung (16) gilt bei Zusammensetzung dieses Operators  $X_\chi$  mit einem  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ):

$$F(\tau) | X_\chi T_m^t = \chi(m) \cdot F(\tau) | T_m^t X_\chi.$$

Bezeichnet nun  $q(\tau)$  einen Basisvektor von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ ,  $q^*(\tau) = q(\tau) | X_\chi$  den zugeordneten Basisvektor von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon\chi^2, Q)$ , wird ferner

$$q(\tau) | T_m^t = \Lambda(m) q(\tau), \quad q^*(\tau) | T_m^t = \Lambda^*(m) q^*(\tau)$$

geschrieben, so folgt die in der Einleitung genannte Relation

$$\Lambda^*(m) = \chi(m) \Lambda(m) \quad [m \geq 1, (m, t_1) = 1].$$

Daher erhalten in der Tat alle  $\Lambda^*(m)$  ( $m \geq 1$ ,  $\chi$  ein beliebiger Restcharakter mod  $t_1$ ) automatisch Diagonalgestalt, wenn man die sämtlichen  $\Lambda(m)$  mit  $m \geq 1$  auf Diagonalgestalt transformiert.

## § 2.

### Ergänzungen.

In dem Beweise von Satz 5 spielt die simultane unitäre Transformierbarkeit endlich vieler Matrizen mit komplexen Elementen auf Diagonalgestalt eine entscheidende Rolle. Deshalb soll unter die Sätze dieses Paragraphen, die

die bisher aufgestellte Theorie in einigen Richtungen abschließen, ein algebraischer Satz aufgenommen werden, der die genauen Bedingungen für den genannten Effekt formuliert; er kann nach den bereits zitierten Aussagen als bekannt gelten.

**Satz 10.** Es seien  $A_1, A_2, \dots, A_s$  quadratische Matrizen mit komplexen Elementen von  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten. Notwendig und hinreichend dafür, daß diese Matrizen mit Hilfe einer einzigen unitären Matrix  $U$  auf Diagonalgestalt  $D_i = U A_i U^{-1}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) transformiert werden können, sind folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & A_i \bar{A}_i' = \bar{A}_i' A_i & (1 \leq i \leq s), \\ \text{b)} \quad & A_i A_k = A_k A_i & (i, k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

Die weiteren Sätze, die auch in der Inhaltsübersicht andeutungsweise genannt wurden, können als Aussagen über das Verhalten des Skalarprodukts zweier ganzen Spitzenformen  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  aufgefaßt werden, wenn  $f$  oder  $\varphi$  einer Transformation aus der vollen Modulgruppe oder einem Operator  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  unterworfen wird.

Über die Anwendung der Transformationen aus der vollen Modulgruppe gilt zunächst der folgende

**Satz 11.** Es sei  $\mathfrak{R}$  ein Normalteiler von endlichem Index der Modulgruppe  $\bar{\Gamma}(1)$ ,  $\mathfrak{U}$  eine Untergruppe der Modulgruppe mit  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{F}$  die Faktorgruppe  $\mathfrak{U}/\mathfrak{R}$ . Es seien ferner

$$\mathfrak{f} = \{f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_m(\tau)\}$$

und

$$\mathfrak{q} = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)\}$$

zwei Systeme von ganzen Spitzenformen  $f_i, \varphi_k$  der Art  $\{\mathfrak{R}, -r\}$ , und es seien sowohl die Komponenten von  $\mathfrak{f}$  als auch die Komponenten von  $\mathfrak{q}$  linear-unabhängig. Bei Ausübung der  $L$  von  $\mathfrak{U}$  mögen sich die  $f_i$  nach einer irreduziblen Darstellung  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{F}$ , die  $\varphi_k$  nach einer irreduziblen Darstellung  $\mathfrak{C}$  von  $\mathfrak{F}$  umsetzen, wo  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  einander nicht äquivalent sind. Bezeichnet  $\mathfrak{S}$  die von den  $f_i, \mathfrak{S}^*$  die von den  $\varphi_k$  aufgespannte Schar, so gilt

$$(f(\tau), \varphi(\tau))_{\mathfrak{R}} = 0$$

für alle  $f(\tau)$  aus  $\mathfrak{S}$  und alle  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{S}^*$ .

**Beweis.** Es seien  $B(L) = (b_{ik}(L))$ ,  $C(L) = (c_{ik}(L))$  die den  $L$  aus  $\mathfrak{U}$  zugeordneten Matrizen der Grade  $m$  bzw.  $\mu$  in den Darstellungen  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{C}$ . Wir setzen  $\gamma_{ik} = (f_i, \varphi_k)_{\mathfrak{R}}$  und bezeichnen die i. a. rechteckige Matrix  $(\gamma_{ik})$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq \mu$ ) mit  $\Gamma$ . Dann ergibt sich für beliebiges  $L$  aus  $\mathfrak{U}$  ohne Benutzung der Inäquivalenz von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  nach Hilfssatz 5:

$$(22) \quad (f_i | L, \varphi_k)_{\mathfrak{R}} = \sum_{r=1}^m b_{ir}(L) \gamma_{rk} = (f_i, \varphi_k | L^{-1})_{\mathfrak{R}} = \sum_{r=1}^{\mu} c_{kr}(L^{-1}) \gamma_{ir},$$

also

$$B(L)\Gamma = \Gamma C(L^{-1}).$$

Wendet man diese Formel zunächst auf den Spezialfall  $f = q$  an, nachdem man in der Schar  $\mathfrak{S}^*$  eine normierte Orthogonalbasis  $q^*$  an Stelle von  $q$  eingeführt hat, so erkennt man, daß die zur Basis  $q^*$  gehörigen Umsetzungsmatrizen  $C^*(L)$  für die  $L$  aus  $\mathfrak{U}$  sämtlich unitär sind. Die Behauptung folgt nun aus dem Schurschen Lemma, weil die Darstellung  $\mathfrak{C}$  offenbar als unitär vorausgesetzt werden darf.

Aus dem Schürschen Lemma ergibt sich überdies der folgende

**Zusatz zu Satz 11.** *Ist  $\Gamma$  nicht die Nullmatrix, so ist  $m = \mu$ , die Determinante  $|\Gamma|$  der Matrix  $\Gamma$  verschwindet nicht, und die Matrix  $\Gamma$  vermittelt die Äquivalenz zwischen der Darstellung  $\mathfrak{B}$  und der Darstellung der  $\overline{C(L^{-1})}$ ,  $L \in \mathfrak{U}$ .*

Für  $\mathfrak{N} = \overline{\Gamma}(Q)$  liefert die Anwendung des Satzes 11 speziell

**Satz 12.** *Es seien  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  ganze Spitzenformen  $\{\overline{\Gamma}(Q), -r\}$  und entweder beide Eigenfunktionen von  $U$  mit verschiedenen Multiplikatoren, oder zu den Teilern  $t$  bzw.  $t'$  von  $Q$  gehörig, wo  $t \neq t'$ , oder beide Eigenfunktionen für alle  $R_n [(a, Q) = 1]$ , aber mit verschiedenen Charakteren.*

*Dann sind  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  zueinander orthogonal.*

Zum Beweise der ersten Aussage wählt man als Zwischengruppe  $\mathfrak{U}$  die Gruppe der Matrizen  $L$  von  $\overline{\Gamma}(1)$  mit  $L \equiv U^k \pmod{Q}$  ( $k$  ganz). Aus der ersten Aussage folgt nach (T<sub>n</sub> II), S. 322 unmittelbar die zweite. Für die dritte Aussage setze man  $\mathfrak{U}$  gleich der Gruppe derjenigen  $L$  aus  $\overline{\Gamma}(1)$ , welche mod  $Q$  den  $R_n$  mit  $(a, Q) = 1$  kongruent sind. — Satz 12 ergibt sich im übrigen ohne Benutzung des Schurschen Lemmas unmittelbar aus Hilfssatz 5.

Nach diesem Satz 12 und (T<sub>n</sub> II), Satz 35 läßt sich Satz 9 dahin ergänzen, daß die Skalarprodukte

$$(f(\tau)|T_n, \varphi(\tau)) \quad \text{und} \quad (f(\tau), \varphi(\tau)|T_n)$$

beide verschwinden, wenn  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  zu verschiedenen Teilern oder zu verschiedenen Charakteren gehören.

Über das Verhalten der Skalarprodukte  $(f(\tau), \varphi(\tau))$  bei Ausübung eines Operators  $T_n [(n, Q) = 1]$  auf  $f(\tau)$  oder  $\varphi(\tau)$  erkennt man nach (21) zunächst

**Satz 13.** *Es sei in den Bezeichnungen von Satz 5  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(t, e, Q)$  eine echte Teilschar von  $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_0(t, e, Q)$ , welche durch einen Operator  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  in sich übergeführt wird. Dann geht auch die Schar  $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2(t, e, Q)$  der zu  $\mathfrak{S}_1$  orthogonalen Formen von  $\mathfrak{S}_0$  durch  $T_n$  in sich über; die Matrix  $\Lambda(n)$ , die die Wirkung von  $T_n$  in einer aus zwei normierten Orthogonalbasen von  $\mathfrak{S}_1$*

und  $\mathfrak{S}_2$  bestehenden Basis von  $\mathfrak{S}_0$  beschreibt, zerfällt vollständig in die  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  zugehörigen Teilmatrizen.

Die allgemeinste Aussage über das Verhalten der Skalarprodukte  $(f, \varphi)$  bei Anwendung eines  $T_n$  auf  $f$  oder  $\varphi$  besteht in dem folgenden Satz, der sich unmittelbar aus den elementaren Eigenschaften des Skalarprodukts und dem Satz 9 ergibt.

**Satz 14.** Es seien  $f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_m(\tau)$  und  $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\mu(\tau)$  zwei Systeme von Formen aus  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ ; jedes dieser Systeme bestehe aus linear-unabhängigen Formen und werde durch Anwendung eines Operators  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  in sich übergeführt. Ist demnach

$$f(\tau) = \{f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_m(\tau)\}, \quad q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\mu(\tau)\}$$

mit

$$f(\tau) | T_n = \Lambda(n) f(\tau), \quad q(\tau) | T_n = P(n) q(\tau),$$

ferner  $\Gamma = (\gamma_{ik})$  die Matrix der

$$\gamma_{ik} = (f_i(\tau), \varphi_k(\tau)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq \mu),$$

so gilt die Matrixgleichung

$$\Lambda(n) \Gamma = \varepsilon(n) \Gamma \overline{P(n)}.$$

Zum Beweise schließt man nach Satz 9 analog zu (22) mit

$$\Lambda(n) = (\lambda_{ik}(n)), \quad P(n) = (\varrho_{ik}(n)) \quad (i, k = 1, 2, \dots, m \text{ bzw. } \mu):$$

$$(f_i(\tau) | T_n, \varphi_k(\tau)) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}(n) (f_j(\tau), \varphi_k(\tau))$$

$$= \varepsilon(n) (f_i(\tau), \varphi_k(\tau) | T_n) = \varepsilon(n) \sum_{j=1}^{\mu} \overline{\varrho_{kj}(n)} (f_i(\tau), \varphi_j(\tau)).$$

Aus diesem Satz folgt zunächst von neuem, daß die beim Beweise von Satz 5 auftretende Matrix  $\Lambda(n)$  der Gleichung (21) genügt; darüber hinaus aber noch folgendes:

**Satz 15.** Es seien  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  zwei ganze Spitzenformen  $\{\bar{\Gamma}(Q), -r\}$  vom gleichen Teiler  $t$  und vom gleichen Charakter  $\varepsilon(n)$ . Es seien ferner  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  Eigenfunktionen für einen Operator  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$ , also

$$f(\tau) | T_n = \lambda_n f(\tau), \quad \varphi(\tau) | T_n = \varrho_n \varphi(\tau).$$

Dann ist entweder

$$(23) \quad \lambda_n = \varrho_n,$$

oder  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  stehen aufeinander senkrecht.

Zum Beweise wende man Satz 13 auf die volle Schar  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  und die von  $\varphi(\tau)$  erzeugte eingliedrige Teilschar  $\mathfrak{S}_1(t, \varepsilon, Q)$  an. Dann ergibt sich nach (21)  $\varrho_n = \varepsilon(n) \overline{\varrho_n}$  und daraus nach Satz 14 die Behauptung.

Aus diesem Satze geht hervor, daß zwei Formen aus  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$ , welche Eigenfunktionen bei allen Operatoren  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  sind, notwendig aufeinander senkrecht stehen müssen, wenn ihre Eigenwerte für ein einziges  $n$  nicht übereinstimmen.

Hieraus folgt

**Satz 16.** *Es sei (in den Bezeichnungen von Satz 5)  $\varphi(\tau)$  eine Form aus  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  und  $\varphi(\tau)$  Eigenfunktion für alle Operatoren  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$ . Bezeichnet  $\eta_n$  den Eigenwert von  $\varphi(\tau)$  bei Anwendung von  $T_n$ , so gibt es einen Indexwert  $i = a$ , so daß*

$$\eta_n = \omega_a(n) \text{ für alle natürlichen } n \text{ mit } (n, Q) = 1.$$

Jede der in Satz 5 erklärten Scharen  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  zerfällt auf eine und nur eine Weise in Teilscharen  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_k, \dots, \mathfrak{S}_m$  der folgenden Beschaffenheit: Jede Teilschar  $\mathfrak{S}_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) besteht aus lauter Eigenfunktionen gegenüber allen Operatoren  $T_n$   $[(n, Q) = 1]$ ; alle Formen von  $\mathfrak{S}_k$  haben bei Anwendung eines jeden  $T_n$  die gleichen Eigenwerte. Dagegen haben irgend zwei Formen, die aus den verschiedenen Teilscharen  $\mathfrak{S}_j, \mathfrak{S}_k$  ( $j \neq k$ ) stammen, bei Anwendung von mindestens einem  $T_n$   $[(n, Q) = 1]$  zwei voneinander verschiedene Eigenwerte und stehen daher aufeinander senkrecht.

Die (formal unendlichen) Eigenwertvektoren  $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_\mu$ , deren  $i$ -ter  $v_i$  die Komponenten  $\omega_i(n)$  ( $n \geq 1, (n, Q) = 1$ ) aufweist, zerfallen in genau  $m$  Systeme von untereinander gleichen Vektoren. Jeder solche Vektor  $v_i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) faßt die Eigenwerte der Formen genau einer Teilschar  $\mathfrak{S}_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) zusammen; er tritt unter allen  $v_i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) genau so oft auf, wie der Rang von  $\mathfrak{S}_k$  angibt. Jede Basis von  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$ , die aus lauter Eigenfunktionen gegenüber allen  $T_n$   $[(n, Q) = 1]$  besteht, setzt sich aus Basen der sämtlichen Teilscharen  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_k, \dots, \mathfrak{S}_m$  zusammen. Die in Satz 5 genannte Basis der  $v_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) ist als normierte Orthogonalbasis von lauter Eigenfunktionen gegenüber allen  $T_n$   $[(n, Q) = 1]$  dann und nur dann bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren des Betrages 1 eindeutig bestimmt, wenn alle Teilscharen  $\mathfrak{S}_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) eingliedrig sind, d. h. wenn  $m = \mu$  ist. Dieser Sachverhalt ( $m = \mu$ ) liegt dann, aber (wie die Theorie in § 3 zeigt) nicht nur dann vor, wenn  $t = 1$  ist, oder wenn jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht.

Aus Satz 16 folgen die Eindeutigkeitsaussagen über die Dirichlet-Reihen des Satzes 6. Denn selbstverständlich ist irgendeine, aus lauter Eigenfunktionen gegenüber allen  $T_n$   $[(n, Q) = 1]$  bestehende Basis von  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  als solche dann und nur dann bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt, wenn die in Satz 16 formulierte Eindeutigkeitsaussage über die  $v_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) zutrifft, d. h. wenn alle Teilscharen  $\mathfrak{S}_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) eingliedrig sind, d. h. wenn  $m = \mu$  ist, d. h. wenn alle  $\mu$  Vektoren  $v_i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) voneinander verschieden sind.

Die Gültigkeit dieses Eindeutigkeitsatzes hat, wie man leicht einsehen kann, eine sehr weittragende Bedeutung. Denn es besteht der folgende

**Satz 17.** *Es gelte der genannte Eindeutigkeitsatz, d. h. es seien die in Satz 16 erklärten Eigenwertvektoren  $v_i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) sämtlich voneinander verschieden. Bezeichnet  $T$  irgendeinen linearen Operator, der die Schar  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  als ganzes in sich überführt, und der mit allen  $T_n$  [ $(n, Q) = 1$ ] vertauschbar ist, so ist jede Form aus  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$ , die Eigenfunktion gegenüber allen  $T_n$  [ $(n, Q) = 1$ ] ist, auch Eigenfunktion des Operators  $T$ . Dies gilt also für die Formen  $v_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) (und nur für diese). Ist insbesondere die Schar  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  invariant gegenüber allen Operatoren  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ), so sind alle  $v_i(\tau)$  Eigenfunktionen gegenüber allen Operatoren  $T_m^t$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ,  $m \geq 1$ ), es gilt in  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$  also das Hauptsatztheorem.*

Die Schar  $\mathfrak{S}_0(q)$  der Invarianten der Gruppe  $\bar{F}_0(q)$  gibt ein Beispiel dafür, daß die Voraussetzung des Satzes 17 nicht eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Hauptsatztheorems darstellt.

### § 3.

#### Theorie der Primzahlstufe $Q = q$ .

Eine entscheidende Rolle spielt hier der folgende Satz von Hecke [(T<sub>n</sub> II), S. 329, s. auch (T<sub>n</sub> I), Satz 19], den ich unter den Voraussetzungen seiner späteren Anwendungen für beliebige Stufe  $Q$  formuliere.

**Satz 18.** *In den Bezeichnungen von Satz 5 sei entweder  $t = 1$  oder jeder Primteiler von  $t$  auch Teiler von  $t_1$ . Dann ist (bei Wahl einer beliebigen Basis von  $\mathfrak{S}_0(t, \varepsilon, Q)$ ) der Ring, der von den dieser Basis zugeordneten Matrizen  $\lambda(n)$  mit  $(n, Q) = 1$  erzeugt wird, maximal, d. h. jede mit allen  $\lambda(n)$  vertauschbare Matrix gehört dem Ringe an.*

Von hier ab wird vorausgesetzt, daß die Stufe  $Q$  eine Primzahl  $Q = q \geq 3$  ist.

Nach der Theorie in (T<sub>n</sub> II), § 12 treten drei Typen von invarianten Formenscharen vom Teiler  $t = q$  auf. Sie sind in (T<sub>n</sub> II), Satz 55, 56, 57 beschrieben. Dabei wird hier und im folgenden unter einer invarianten Formenschar eine Formenschar verstanden, die durch alle Operatoren  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ) in sich übergeführt wird;  $t$  bezeichnet den Teiler der Formenschar.

Die beiden Scharen aus Satz 56 gehören zu zwei verschiedenen konjugiert-komplexen Charakteren  $\varepsilon_0(n)$ ,  $\bar{\varepsilon}_0(n)$ . Da nach (T<sub>n</sub> II), Satz 48 die Matrizen  $\lambda_q(n)$  und  $\lambda_{q+1}(n)$  für  $(n, Q) = 1$  bis auf einen skalaren Faktor mit den zum gleichen  $n$  gehörigen Matrizen übereinstimmen, nach denen sich eine Basis einer Schar vom Teiler 1 umsetzt, ist der Ring, den die  $\lambda_q(n)$  erzeugen, und ebenso der Ring, den die  $\lambda_{q+1}(n)$  erzeugen, maximal [ $(n, Q) = 1$ ]. Der erste

enthält also die Matrix  $\lambda_q(q)$ , der zweite die Matrix  $\lambda_{q+1}(q)$ , und diese beiden Matrizen erlangen von selbst Diagonalgestalt, wenn man die  $\lambda_q(n)$  und die  $\lambda_{q+1}(n)$   $[(n, Q) = 1]$  gemäß Satz 5 auf Diagonalgestalt transformiert.

Die gleiche Methode liefert das analoge Ergebnis für die Schar vom Teiler  $q$  aus Satz 55 ( $T_n$  II), vorausgesetzt, daß die dort erklärte Rangzahl  $e$  verschwindet.

Die Schar vom Teiler  $q$  aus Satz 57, die aus den beiden verwandten Darstellungen des Grades  $f = \frac{1}{2}(q+1)$  entsteht, läßt sich wie folgt behandeln: Nach ( $T_n$  II), Satz 52 besteht die Untergruppe  $\mathfrak{A}$  aus den Automorphismen  $\xi_N$ , wo  $N$  ein quadratischer Rest mod  $q$  ist. Wir wählen den identischen Automorphismus  $\xi_1$  und den Automorphismus  $\xi_r$  mit einem festen Nichtrest  $r$  mod  $q$  als Repräsentanten der beiden Nebengruppen von  $\mathfrak{A}$ . Die in ( $T_n$  II), Satz 57 genannten  $\frac{1}{2}(q+1) = f$  invarianten Scharen bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}_i$  ( $1 \leq i \leq f$ );  $\mathfrak{S}_i$  sei die Schar vom Teiler  $q$ . Hier zeigt nach ( $T_n$  II), Satz 47a jede der beiden Teilscharen von  $\mathfrak{S}_i$  ( $1 \leq i \leq f$ ), die den Resten bzw. Nichtresten mod  $q$  gemäß ( $T_n$  II), Satz 52 zugeordnet sind, das Verhalten ( $T_n$  II), Gleichung (43) bei Ausübung derjenigen  $T_n$ , deren  $n$  ein quadratischer Rest mod  $q$  ist. Wenn dagegen  $n$  ein quadratischer Nichtrest mod  $q$  ist, dann vertauschen sich die beiden Teilscharen, und zwar so, daß wieder die Matrizen auf den rechten Seiten der ( $T_n$  II), (43) entsprechenden Gleichungen, welche die eine Teilschar in die andere überführen, von  $i$  unabhängig sind, daß aber links der Faktor  $\bar{\chi}_i(N)$  bzw.  $\bar{\chi}_i(N)\bar{\chi}_i(r^2)$  [ $N \equiv nr^{-1} \pmod{q}$ ] auftritt, je nachdem, ob man von den Resten zu den Nichtresten übergeht, oder umgekehrt. Nun finden sich nach ( $T_n$  II), Satz 36 unter den Charakteren  $\varepsilon_i(n)$  der  $\frac{1}{2}(q-1)$  Scharen  $\mathfrak{S}_i$  vom Teiler 1 ( $1 \leq i \leq \frac{1}{2}(q-1)$ ) sämtliche Restcharaktere  $\varepsilon(n) \pmod{q}$ , welche die Bedingung  $\varepsilon(-1) = (-1)^r$  erfüllen. Daher und wegen der Formel  $\varepsilon_i(n) = \chi_i(n^2)\chi(n)$  finden sich auch unter den  $\chi_i(n^2)$  ( $1 \leq i \leq \frac{1}{2}(q-1)$ ) sämtliche Charaktere auf der Gruppe der Reste mod  $q$ ; insbesondere gibt es also einen Indexwert  $i = h$ , für den  $\chi_i(n^2) = \chi_h(n^2)$  bei beliebigem  $n$ . Für die eine Schar  $\mathfrak{S}_r$  vom Teiler  $q$  bedeutet dies, daß der Ring, den die in  $\mathfrak{S}_r$  erklärten Matrizen  $\lambda_r(n)$  mit  $(n, q) = 1$  erzeugen, maximal ist, weil  $\lambda_r(n)$  mit  $\lambda_h(n)$  übereinstimmt. Hieraus folgt wieder, daß  $\lambda_r(q)$  automatisch Diagonalgestalt erhält, wenn man die  $\lambda_r(n)$  mit  $(n, q) = 1$  gemäß Satz 5 auf Diagonalgestalt transformiert.

Die in Satz 55 erklärte Schar vom Teiler  $q$  erfordert eine etwas ausführlichere Diskussion, falls, was nun vorausgesetzt werde, die Vielfachheit  $e > 0$  ist.

Diese Schar  $\mathfrak{S}_0(q)$  besteht aus den sämtlichen Invarianten der Gruppe  $\bar{T}_0(q)$ ; die Dimension  $-r$  der Formen von  $\mathfrak{S}_0(q)$  ist gerade. Wir verschaffen uns eine Basis von  $\mathfrak{S}_0(q)$  in folgender Weise: Es sei zunächst

$$f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_s(\tau)$$

ein volles System linear-unabhängiger ganzer Spitzenformen zur vollen Modulgruppe, und zwar sei nach Satz 4 des ersten Teils

$$f_i(\tau)|T_n = \varrho_i(n) f_i(\tau) \quad (1 \leq i \leq e, n \geq 1).$$

Dabei ist, wie angedeutet,  $n$  eine beliebige natürliche Zahl, und es kann unter  $T_n$ , wenn  $(n, q) = 1$ , der auf der Stufe  $q$  erklärte Operator verstanden werden. Hingegen hat man hier und im folgenden zwischen dem auf der ersten Stufe erklärten Operator  $T_q$  und dem auf der  $q$ -ten Stufe erklärten Operator  $T_q^q$  zu unterscheiden. Der Fourier-Koeffizient von  $e^{2\pi i \tau}$  einer jeden Form  $f_j(\tau)$  ( $1 \leq j \leq e$ ) sei  $= 1$ , so daß die  $f_j(\tau)$  auf der ersten Stufe zugeordnete Dirichlet-Reihe  $H_j(s)$  eine Eulersche Produktentwicklung besitzt.

Zu diesen Formen  $f_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq e$ ) nehmen wir nun die Formen

$$f_i^*(\tau) = f_i(q\tau) \quad (1 \leq i \leq e)$$

hinzu. Aus (T<sub>n</sub> II), Satz 41 folgt, daß die  $2e$  Formen  $f_i(\tau)$  und  $f_i^*(\tau)$  zusammen linear-unabhängig sind. Man zeigt überdies, etwa auf Grund von (T<sub>n</sub> II), Satz 42 oder nach dem Beweise von (T<sub>n</sub> II), § 7, Hilfssatz 3, daß

$$f_i^*(\tau)|T_n = \varrho_i(n) f_i(\tau) \quad [1 \leq i \leq e; T_n = T_n^q; n \geq 1, (n, q) = 1].$$

Schließlich ergänzen wir die  $2e$  Formen  $f_i(\tau)$ ,  $f_i^*(\tau)$  zu einer Basis von  $\mathfrak{S}_0(q)$ , indem wir eine orthogonal-normierte Basis der zu allen  $f_i, f_i^*$  ( $1 \leq i \leq e$ ) orthogonalen Teilschar innerhalb  $\mathfrak{S}_0(q)$  anfügen. Nach Satz 13 und Satz 5 werde erreicht, daß die neuen Basisformen  $g_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq x - e$ ) sämtlich Eigenfunktionen gegenüber allen auf der Stufe  $q$  erklärten  $T_n$  mit  $(n, q) = 1$  sind. Die Anordnung der damit aufgestellten Basisformen von  $\mathfrak{S}_0(q)$  sei mit  $p = x - e$  diese:

$$(24) \quad g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_p(\tau), f_1^*(\tau), f_2^*(\tau), \dots, f_e^*(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_e(\tau).$$

Das Verhalten der  $f_i(\tau)$ ,  $f_i^*(\tau)$  bei Anwendung des Operators  $T_q^q$  wird durch höchst einfache Formeln beschrieben. Man erkennt zunächst unmittelbar, daß

$$f_i^*(\tau)|T_q^q = f_i(\tau) \quad (1 \leq i \leq e).$$

Ferner ergibt sich aus der Definition der Operatoren  $T_q$  und  $T_q^q$ , daß

$$q^{r-1} f_i^*(\tau) + f_i(\tau)|T_q^q = f_i(\tau)|T_q = \varrho_i(q) f_i(\tau) \quad (1 \leq i \leq e),$$

also

$$f_i(\tau)|T_q^q = -q^{r-1} f_i^*(\tau) + \varrho_i(q) f_i(\tau) \quad (1 \leq i \leq e).$$

Demgemäß schreiben wir die Umsetzungsmatrizen der Basis (24) bei Anwendung der Operatoren  $T_n$   $[(n, q) = 1]$  und  $T_q^g$ , indem wir sie nach dem Besetzungsschema  $(x - e, e, e)$  aufteilen, wie folgt:

$$\Lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & O & O \\ O & P(n) & O \\ O & O & P(n) \end{pmatrix} \quad [(n, q) = 1].$$

$$P(n) = (\varrho_i(n) \delta_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \dots, e),$$

$$\lambda(n) = (\vartheta_i(n) \delta_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \dots, x - e),$$

$$\Lambda(q) = \begin{pmatrix} \lambda(q) & G & H \\ O & O & I \\ O & -q^{r-1}I & P(q) \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet  $O$  die Nullmatrix der betreffenden Zeilen- und Spaltenzahl,  $I = I_e$  die Einheitsmatrix von  $e$  Zeilen und Spalten,  $P(q)$  die oben erklärte Matrix  $P(n)$  mit  $q$  an Stelle von  $n$ .

Nun ziehen wir den wesentlichen Schluß dieser Untersuchung: Der Ring  $\mathfrak{R}$ , der von den Matrizen  $\begin{pmatrix} \lambda(n) & O \\ O & P(n) \end{pmatrix} [(n, q) = 1]$  erzeugt wird, ist maximal. Denn sind

$$(25) \quad \mathfrak{F}_h(\tau) = \{F_h^1(\tau), F_h^2(\tau), \dots, F_h^x(\tau)\} \quad (h = 1, 2, \dots, q)$$

die  $q$  gegenüber den  $T_n$  mit  $(n, q) = 1$  invarianten Systeme, die aus der normierten Darstellung von  $\mathfrak{G}_q$  nach (T<sub>n</sub> II), Satz 55 entspringen, und ist unter diesen  $\mathfrak{F}_q(\tau)$  das (einzige) System vom Teiler  $q$ , so bilden die Formen

$$(26) \quad F_q^1(\tau), F_q^2(\tau), \dots, F_q^x(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_e(\tau)$$

eine Basis von  $\mathfrak{S}_0(q)$ . Die Matrix, die die Basis (26) in die Basis (24) überführt, hat im Besetzungsschema  $(x, e)$  die Gestalt  $\begin{pmatrix} A & B \\ O & I \end{pmatrix}$ , und daher setzt sich das System  $\mathfrak{F}_q(\tau)$  bei Anwendung eines  $T_n$  mit  $(n, q) = 1$  nach der Matrix

$$M(n) = A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda(n) & O \\ O & P(n) \end{pmatrix} A$$

um. Andererseits erfährt jeder Vektor  $\mathfrak{F}_h(\tau)$  ( $1 \leq h \leq q - 1$ ) durch dieses  $T_n$  die Transformation mit der Matrix  $\chi_h^*(n) M(n)$ , wo  $\chi_h^*(n)$  einen Restcharakter mod  $q$  bezeichnet, also  $A \mathfrak{F}_h(\tau)$  die Transformation mit der Matrix  $\chi^*(n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda(n) & O \\ O & P(n) \end{pmatrix}$ , und damit ist nach Satz 18 die Maximalität des Ringes  $\mathfrak{R}$  bewiesen.

Nun hat die Vertauschbarkeit der Matrizen  $\Lambda(n)$  und  $\Lambda(q)$  zur Folge, daß

$$\begin{pmatrix} \lambda(n) & O \\ O & P(n) \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} \lambda(q) & G \\ O & O \end{pmatrix} \text{ und mit } \begin{pmatrix} \lambda(q) & H \\ O & P(q) \end{pmatrix}$$

vertauschbar ist. Daher besitzt  $\lambda(q)$  Diagonalgestalt und  $G$  und  $H$  sind beide gleich  $O$ .

Zur Diagonaltransformation von  $\Lambda(q)$  ändern wir die Reihenfolge der Basisformen (24) in die Anordnung

$$(27) \quad g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_e(\tau), f_1^*(\tau), f_2^*(\tau), \dots, f_e(\tau), f_e^*(\tau)$$

ab. Die Matrix  $\Lambda^*(q)$ , nach der sich diese Basisformen bei Anwendung von  $T_q^e$  umsetzen, hat im Besetzungsschema  $(x - e, 2e)$  die Gestalt

$$(28) \quad \Lambda^*(q) = \begin{pmatrix} \lambda(q) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix},$$

wo  $K$  eine Kästchenmatrix des Grades  $2e$  bezeichnet:  $K$  enthält  $e$  zweireihige Diagonalkästchen  $K_i$  ( $1 \leq i \leq e$ ) und außerhalb dieser nur Nullen als Elemente;

$$K_i = \begin{pmatrix} \varrho_i(q) & -q^{r-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq e).$$

Wir schreiben mit nicht-negativem oder positiv-imaginärem Wurzelzeichen

$$\xi_i = \xi_i(q) = \frac{1}{2} \varrho_i(q) + \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_i(q)^2 - 4q^{r-1}}, \quad (1 \leq i \leq e)$$

$$\xi'_i = \xi'_i(q) = \frac{1}{2} \varrho_i(q) - \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_i(q)^2 - 4q^{r-1}}$$

und erkennen, daß  $\Lambda^*(q)$  dann und nur dann auf Diagonalgestalt transformiert werden kann, wenn  $\xi_i + \xi'_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, e$ , oder, was dasselbe besagt, wenn  $\varrho_i(q) + \pm 2q^{\frac{1}{2}(r-1)}$  ( $1 \leq i \leq e$ ). In jedem Falle aber sind die Formen

$$\varphi_i(\tau) = f_i(\tau) - \xi_i f_i^*(\tau), \quad \psi_i(\tau) = f_i(\tau) - \xi'_i f_i^*(\tau) \quad (1 \leq i \leq e)$$

sämtlich Eigenfunktionen gegenüber allen Operatoren  $T_m^q$  ( $m \geq 1$ ), und zwar sind ihre Eigenwerte zum Operator  $T_q^e$  gleich  $\xi'_i$  bzw.  $\xi_i$ . Diese Zahlen  $\xi_i, \xi'_i$  sind die Nullstellen des  $q$ -Faktors in der  $f_i(\tau)$  auf der ersten Stufe zugeordneten Dirichlet-Reihe. Daher gestatten die den Formen  $\varphi_i(\tau)$  und  $\psi_i(\tau)$  auf der Stufe  $q$  zugeordneten Dirichlet-Reihen  $L_i(s), M_i(s)$  die Eulerschen Produktentwicklungen

$$L_i(s) = q^{-s} \left(1 - \frac{\xi'_i}{q^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\varrho_i(p)}{p^s} + \frac{p^{r-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

$$M_i(s) = q^{-s} \left(1 - \frac{\xi_i}{q^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\varrho_i(p)}{p^s} + \frac{p^{r-1}}{p^{2s}}\right)^{-1} \quad (1 \leq i \leq e).$$

Die Diagonaltransformation der Matrix  $\Lambda^*(q)$  wird, wenn sie möglich ist, durch Einführung der Formen  $\varphi_i(\tau), \psi_i(\tau)$  an Stelle der Formen  $f_i(\tau), f_i^*(\tau)$  ( $1 \leq i \leq e$ ) in die Basis (27) bewirkt. Man erhält dann durch diese Ersetzung eine Basis von  $\mathfrak{S}_0(q)$ , die aus lauter Eigenfunktionen gegenüber allen Operatoren  $T_m^q$  ( $m \geq 1$ ) besteht. Im übrigen existieren bei gegebenem  $r$  nur endlich viele Primzahlstufen  $q$ , bei denen die genannte Transformation nicht ausführbar ist. Denn alle  $\varrho_i(n)$  ( $1 \leq i \leq e, n \geq 1$ ) liegen in dem reellen algebraischen Zahlkörper  $K$ , der aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion der  $\varrho_i(n)$  mit  $i, n = 1, 2, \dots, e$  hervorgeht. Wenn sich  $\Lambda^*(q)$

nicht auf Diagonalgestalt transformieren läßt, so gilt eine der beiden Gleichungen  $\varrho_i(q) = \pm 2 q^{\frac{1}{2}(r-1)}$  für mindestens ein  $i$  ( $1 \leq i \leq e$ ),  $K$  enthält also wegen  $r \equiv 0 \pmod{2}$  die Zahl  $\sqrt{q}$ . Das aber kann nur für endlich viele Primzahlen  $q$  zutreffen.

Wir formulieren die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze über die invarianten Scharen vom Teiler  $q$  der Primzahlstufe  $q$  folgendermaßen:

**Satz 19.** *Es sei  $q$  eine Primzahl  $\geq 3$ . Die aus den irreduziblen normierten Darstellungen der Grade  $f = q + 1$  und  $f = \frac{1}{2}(q + 1)$  entspringenden invarianten Scharen vom Teiler  $q$  haben die Eigenschaft, daß der von den zugehörigen Matrizen  $\lambda(n)$  mit  $(n, q) = 1$  erzeugte Matrizenring maximal ist. Die (bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmten) Basisformen, die sämtlich Eigenfunktionen gegenüber allen Operatoren  $T_n$   $[(n, q) = 1]$  sind, sind automatisch paarweise orthogonal und Eigenfunktionen bei allen Operatoren  $T_m^q$  ( $m \geq 1$ ).*

Es bezeichne  $\Xi_0(q)$  die Schar der Invarianten der Gruppe  $\bar{\Gamma}_0(q)$ . Von den in Satz 16 erklärten Teilscharen  $\Xi_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ), die in der Anzahl  $m = x$  vorhanden sind, haben  $x - e$  den Rang 1 und  $e$  den Rang 2. Die Basisformen (27) von  $\Xi_0(q)$  sind sämtlich Eigenfunktionen für alle  $T_n$   $[(n, q) = 1]$ , und die ihnen (nach Hinzufügung geeigneter konstanter Faktoren) zugeordneten Dirichlet-Reihen haben sämtlich eine Eulersche Produktentwicklung bezüglich aller Primzahlen  $p$ , einschließlich  $p = q$ ; indessen ist der Nenner des  $q$ -Faktors bei den Dirichlet-Reihen zu  $f_i(\tau)$ ,  $f_i^*(\tau)$  (auch abgesehen von dem Faktor  $q^{-s}$ ), nicht linear, sondern quadratisch in  $q^{-s}$ . Die Basisformen (27) setzen sich bei Anwendung von  $T^q$  nach der Matrix  $\Lambda^*(q)$  aus (28) um. Dann und nur dann, wenn  $\varrho_i(q) \neq \pm 2 q^{\frac{1}{2}(r-1)}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, e$  (was bei gegebenem  $r$  für alle Primzahlen  $q$  mit höchstens endlich vielen Ausnahmen zutrifft), existiert eine Basis von  $\Xi_0(q)$ , die aus lauter Eigenfunktionen gegenüber allen  $T_m^q$  ( $m \geq 1$ ) besteht. Die Basisformen sind hierdurch bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt. Die ihnen zugeordneten Dirichlet-Reihen haben Produktentwicklungen von der Gestalt ( $T_n$  II), Gleichung (20) (mit Zahlen an Stelle von Matrizen).

Die charakteristischen Wurzeln der Matrix  $\Lambda^*(q)$  zerfallen gemäß der Darstellung (28) in zwei völlig verschiedene Typen. Der eine Typus, die charakteristischen Wurzeln der Teilmatrix  $\lambda(q)$ , ist nur durch die Theorie der Stufe  $q$  zugänglich. Ein von Herrn Hecke im Spezialfall  $e = 0$  kürzlich entwickeltes Verfahren<sup>2)</sup> zur Berechnung dieser Eigenwerte läßt sich wörtlich auf den allgemeinen Fall ( $e > 0$ ) übertragen. Es zeigt sich, daß die genannten

<sup>2)</sup> E. Hecke, Die Klassenzahl imaginär-quadratischer Körper in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen; erscheint im Furtwängler-Festband der Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien.

Eigenwerte sämtlich gleich  $+q^{\frac{r}{2}-1}$  oder  $-q^{\frac{r}{2}-1}$  sind, und daß der Anzahlenüberschuß, also die Spur der Matrix  $\lambda(q)$ , durch die am Schluß der zitierten Arbeit angegebene Formel mit der Klassenzahl des imaginärquadratischen Zahlkörpers  $R(\sqrt{-q})$  zusammenhängt. Den anderen Typus der charakteristischen Wurzeln bilden die Zahlen  $\xi_i, \xi'_i$  ( $1 \leq i \leq e$ ), die bereits durch die Theorie der ersten Stufe vollständig erklärt sind. Auf sie bezieht sich die eingangs erwähnte verallgemeinerte Ramanujansche Vermutung.

Zum Schluß soll unter Heranziehung der Ergebnisse des § 2 die Frage erörtert werden, durch welche Matrix sich der Übergang von der Basis (24) der Schar  $\mathfrak{S}_0(q)$  zu einer anderen Basis vollzieht, in der die Formen der normierten Darstellung  $\mathfrak{G}_i$  von den Formen  $f_i(\tau)$  der Stufe 1 getrennt auftreten.

Es bezeichne  $\mathfrak{S}_e$  die von den Komponenten von  $\mathfrak{F}_e(\tau)$  aufgespannte lineare Teilschar von  $\mathfrak{S}_0(q)$ .  $\mathfrak{S}_e$  ist gegenüber allen  $T_n$  mit  $(n, q) = 1$  invariant und überdies nach Satz 11 als die zu allen  $f_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq e$ ) orthogonale Teilschar von  $\mathfrak{S}_0(q)$  gekennzeichnet. Daher liegen die Formen

$$g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_p(\tau)$$

in  $\mathfrak{S}_e$ . Nach Satz 13 läßt sich das System dieser Formen zu einer normierten Orthogonalbasis

$$g(\tau) = \{g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_p(\tau), g_{p+1}(\tau), \dots, g_x(\tau)\}$$

von  $\mathfrak{S}_e$  ergänzen, deren Komponenten sämtlich Eigenfunktionen für alle Operatoren  $T_n$  mit  $(n, q) = 1$  sind.

Dieser Vektor  $g(\tau)$  spielt in dem ursprünglichen System der normierten Darstellungen  $\mathfrak{G}_i$  die Rolle des Vektors  $\mathfrak{F}_e(\tau)$ . Man erkennt dies, indem man die Matrix  $P$ , die  $\mathfrak{F}_e(\tau)$  in  $g(\tau) = P \mathfrak{F}_e(\tau)$  überführt, auf alle Vektoren  $\mathfrak{F}_h(\tau)$  ( $1 \leq h \leq q$ ) anwendet. Wird  $g_h(\tau) = P \mathfrak{F}_h(\tau)$  ( $1 \leq h \leq q$ ) geschrieben, so setzen sich die  $i$ -ten Komponenten ( $1 \leq i \leq x$ ;  $i$  fest) der sämtlichen Vektoren  $g_h(\tau)$  ( $h = 1, 2, \dots, q$ ) bei Anwendung der Substitutionen  $L$  aus  $\bar{F}(1)$  nach den gleichen Matrizen  $C(L)$  um, nach denen sich die  $i$ -ten Komponenten der Vektoren  $\mathfrak{F}_h(\tau)$  selbst umsetzen. Überdies erfahren alle  $g_h(\tau)$  bei Anwendung der  $T_n$  mit  $(n, q) = 1$  und in den Bezeichnungen von (T<sub>n</sub> II), Satz 48 die Umsetzung

$$g_h(\tau) | T_n = V_h(n) g_h(\tau); V_h(n) = \chi_h(n) V(n) = \chi_h(n) P \alpha(n) P^{-1} \\ (1 \leq h \leq q),$$

wo wieder  $V(n)$  von  $h$  unabhängig ist. Nach der angegebenen Konstruktion haben alle  $V(n)$  [( $n, q$ ) = 1] Diagonalgestalt.

Wir nennen jetzt  $\mathfrak{h}(\tau)$  den Basisvektor über  $\mathfrak{S}_0(q)$  mit den Komponenten (24),  $q(\tau)$  den Basisvektor über  $\mathfrak{S}_0(q)$  mit den Komponenten  $g_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq x$ ),

$f_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq e$ ). Die Komponenten von  $q(\tau)$  sind paarweise orthogonal. Für die Komponenten von  $h(\tau)$  gelten die folgenden Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} (g_i(\tau), f_k^*(\tau)) &= (g_i(\tau), f_k(\tau)) = 0 & (1 \leq i \leq x-e, 1 \leq k \leq e), \\ (g_i(\tau), g_k(\tau)) &= \delta_{ik} & (i, k = 1, 2, \dots, x-e), \\ (f_i(\tau), f_k(\tau)) &= 0 & (i, k = 1, 2, \dots, e; i \neq k). \end{aligned}$$

Aus der letzten Relation ergibt sich nach Hilfssatz 4  $\left[ Q = g = q, S = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ :

$$(f_i^*(\tau), f_k^*(\tau)) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, e; i \neq k).$$

Schließlich entnimmt man aus Satz 15, daß

$$(f_i(\tau), f_k^*(\tau)) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, e; i \neq k),$$

vorausgesetzt, daß  $q > e$  ist. Denn die Komponenten der voneinander linear unabhängigen Vektoren

$$r_i = \{g_i(1), g_i(2), \dots, g_i(e)\}, \quad r_k = \{g_k(1), g_k(2), \dots, g_k(e)\}$$

treten als Eigenwerte von  $f_i(\tau)$  bzw.  $f_k^*(\tau)$  bei Anwendung der  $T_n$  mit  $1 \leq n \leq e$  auf, weil diese  $n$  zu  $q$  prim sind.

Aus diesen Orthogonalitätsrelationen folgt zunächst, daß die Matrix  $W$ , die  $q(\tau)$  in  $h(\tau) = W q(\tau)$  überführt, im Besetzungsschema  $(x-e, e, e)$  die Gestalt

$$W = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & Y & D \\ O & O & I \end{pmatrix}$$

aufweist, wo  $D$  eine  $e$ -reihige Diagonalmatrix bezeichnet.

Hier kann nun durch eine Permutation, die auf die Komponenten

$$g_{x+1}(\tau), g_{x+2}(\tau), \dots, g_x(\tau)$$

von  $q(\tau)$  anzuwenden ist, erreicht werden, daß auch  $Y$  zu einer Diagonalmatrix wird. Denn sowohl der von den Matrizen  $V_q(n)$  als auch der von den Matrizen  $\begin{pmatrix} \lambda(n) & O \\ O & P(n) \end{pmatrix} [(n, q) = 1]$  aufgespannte Ring ist maximal. Beide Ringe fallen daher mit dem Ringe  $\mathfrak{R}_0$  aller Diagonalmatrizen des Grades  $x$  zusammen, in welchem durch die Transformation mit der Teilmatrix  $W^* = \begin{pmatrix} I & O \\ O & Y \end{pmatrix}$  von  $W$  ein Automorphismus induziert wird. Daraus folgt, daß  $Y$  nach einer Zeilenpermutation Diagonalgestalt annimmt.

**Satz 20.** *Es sei (in den Bezeichnungen von (T, II), Satz 55)  $q > e$ . Jeder Basis von der Gestalt und den Eigenschaften der Basis (24) von  $\mathfrak{S}_0(q)$  entspricht eine weitere Basis*

$$q(\tau) = \{g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_x(\tau), g_{x+1}(\tau), \dots, g_x(\tau), f_1(\tau), \dots, f_e(\tau)\}$$

von  $\mathfrak{S}_0(q)$  der folgenden Beschaffenheit: Zu jeder Form  $g_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq x$ ;  $i$  fest) gehören  $q$  Formen  $g_i^h(\tau)$  [ $h = 1, 2, \dots, q$ ;  $g_i^q(\tau) = g_i(\tau)$ ] derart, daß diese

$q$  Formen  $g_i^h(\tau)$  sich bei Anwendung der Substitutionen der vollen Modulgruppe nach der gegebenen irreduziblen normierten Darstellung  $\mathfrak{G}_q$  umsetzen; insbesondere haben also alle Formen  $g_i^h(\tau)$  ( $1 \leq i \leq x$ ,  $1 \leq h \leq q-1$ ) den Teiler 1. Die Formen  $g_1(\tau), \dots, g_x(\tau), g_{x+1}(\tau), \dots, g_x(\tau)$  bilden ein normiertes Orthogonalsystem und stehen überdies sämtlich auf allen Formen  $f_1(\tau), \dots, f_s(\tau)$  senkrecht. Bei Anwendung der Operatoren  $T_n$  mit  $(n, q) = 1$  verfährt jeder Vektor

$$g_h(\tau) = \{g_1^h(\tau), g_2^h(\tau), \dots, g_x^h(\tau)\} \quad (1 \leq h \leq q)$$

die Umsetzungen durch die Matrizen  $\chi_h(n) V(n)$ , wo  $V(n)$  eine von  $h$  unabhängige Diagonalmatrix,  $\chi_h(n)$  den in (T<sub>n</sub> II), Satz 48 definierten Charakter bezeichnet. Die Matrix  $W$ , welche  $q(\tau)$  in die Basis (24) von  $\mathfrak{S}_0(q)$  überführt, hat im Besetzungsschema  $(x-e, e, e)$  die Gestalt

$$W = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & D_1 & D_2 \\ O & O & I \end{pmatrix}.$$

Hier werden durch  $I$  Einheitsmatrizen der betreffenden Grade, durch  $O$  Nullmatrizen und durch  $D_1, D_2$  Diagonalmatrizen dargestellt.

(Eingegangen am 19. 4. 1939.)

#### Anmerkung bei der Korrektur.

1. In dieser Zerlegung der Matrix  $W$  sind die Elemente der Diagonalmatrix  $D_2$  reell. Denn ist  $f(\tau)$  eine ganze Spitzenform der vollen Modulgruppe,  $f^*(\tau) = f(q\tau)$ ,

$Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ , so gilt

$$f(\tau)Z = f^*(\tau), \quad Z^2 = -qI.$$

Daraus ergibt sich nach Hilfsatz 4:

$$(f^*, f)_{F(q)} = (f|Z, f)_{\bar{F}(q)} = (f, f|qZ^{-1})_{\bar{F}(q)} = (f, f^*)_{F(q)}.$$

Also ist  $(f, f^*)_{F(q)}$  reell und die Behauptung bewiesen.

2. Wenn eine Dirichlet-Reihe  $D(s)$ , die einer ganzen Modulform  $\{\bar{F}(Q), -r\}$  entspricht, eine Eulersche Produktentwicklung bezüglich aller Primzahlen  $p$  mit  $(p, Q) = 1$  besitzt, so hat sie die Gestalt

$$D(s) = K(s) P(s; \varepsilon, Q, 0);$$

hier bezeichnet  $P(s; \varepsilon, Q, 0)$  ein Produkt von der Gestalt der unendlichen Produkte (über die  $p$  mit  $(p, Q) = 1$ ) aus Satz 6, und  $K(s)$  eine Dirichlet-Reihe, in der nur über die aus Primteilern  $q$  der Stufe  $Q$  zusammengesetzten natürlichen Zahlen summiert wird. Ich habe nun inzwischen bemerkt, daß sich die Struktur der Funktionen  $K(s)$ , die in diesem Zusammenhange auftreten, mit völlig elementaren Methoden bestimmen läßt. Wenn zudem neben  $P(s; \varepsilon, Q, 0)$  auch  $K(s)$  in ein Produkt von Dirichlet-Reihen zerlegt werden kann, in deren jeder nur die Potenzen einer einzigen Primzahl vorkommen, so läßt sich auch die Struktur der Faktoren dieses Produkts bestimmen. Die in der Überschrift formulierte Aufgabe wird dadurch insofern gelöst, als sie auf die Diskussion der linearen Relationen zwischen denjenigen wohlbestimmten elementaren Funktionen zurückgeführt ist, aus denen sich die genannten  $K(s)$  linear mit konstanten Koeffizienten kombinieren.

# Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen, insbesondere von $\sin z$ und $\cos z$ <sup>1)</sup>.

Von

Hans Töpfer in Hilden (Rheinland).

Inhalt.	Seite
I. Einleitung . . . . .	65
II. Der einfache Zusammenhang der von $\mathfrak{F}$ erzeugten Gebiete; die Höchstanzahl vollständig invarianter Gebiete . . . . .	67
III. Beweis, daß die Menge $\mathfrak{F}$ kein isoliertes Jordan-Kurvenstück enthält	69
IV. Über die Struktur der Menge $\mathfrak{F}$ bei abstoßenden Fixpunkten . .	70
V. Die Iteration von $\sin z$ . . . . .	73
VI. Die Iteration von $\cos z$ . . . . .	80
VII. Erweiterung des Resultats Fatous bezüglich $F(z) = e^z$ . . . . .	83

## I. Einleitung.

Nachdem durch Fatou<sup>2)</sup> die Grundlagen für die Iteration ganzer transzendenter Funktionen mit dem Beweis der untenstehenden Sätze I, II und III gelegt worden sind, sollen in der vorliegenden Arbeit einige allgemeine Sätze bewiesen und die elementaren ganzen transzendenten Funktionen  $\sin z$  und  $\cos z$ , deren Behandlung mit auch anderweitig verwendbaren Methoden geschehen wird, iteriert werden.

Ist  $F(z)$  eine ganze transzendente Funktion, so sind ihre Iterierten  $F_v(z)$  definiert mit:

$$F_1(z) = F(z); \quad F_v(z) = F(F_{v-1}(z)), \quad (v = 2, 3, \dots).$$

Eine Punktmenge  $\mathfrak{P}$  heißt „invariant“, wenn mit  $z$  auch  $F(z)$  in  $\mathfrak{P}$  liegt; sie heißt „vollständig invariant“, wenn außerdem aus  $F(z) \in \mathfrak{P}$  stets  $z \in \mathfrak{P}$  folgt. Gilt  $z_v = F_v(z_0)$ , so ist  $z_v$  der „ $v$ -te Nachfolger“ von  $z_0$ ; wird für ein  $z_v$  die Gleichung  $F_v(z_v) = z_0$  erfüllt, so ist  $z_v$  ein „ $v$ -ter Vorgänger“ von  $z_0$ . Alle Nachfolger jedes Punktes einer invarianten Punktmenge  $\mathfrak{P}$  liegen in  $\mathfrak{P}$ ; alle Nachfolger und alle Vorgänger jedes Punktes einer vollständig invarianten Punktmenge  $\mathfrak{P}$  liegen in  $\mathfrak{P}$ .

<sup>1)</sup> D 38. Die vorliegende Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Köln als Dissertation angenommen. — Anregung und Förderung durch Prof. Dr. H. Cremer.

<sup>2)</sup> Fatou, Sur l'itération des fonctions transcendentes entières, Acta mathematica 47 (1926).

Falls  $F(z)$  einen Ausnahmewert  $A$  besitzt, ist er nach Picard der einzige und  $F(z)$  hat die Form:

$$F(z) = A + P(z)e^{G(z)},$$

wobei  $P(z)$  ein Polynom und  $G(z)$  eine ganze Funktion ist. Im speziellen Fall

$$F(z) = \alpha + (z - \alpha)^\mu e^{G(z)}$$

( $\mu$  ganze Zahl  $\geq 0$ ), heiße  $\alpha$  ein „Fatouscher Ausnahmewert“  $\mu$ -ter Ordnung. Offenbar besitzt jeder vom Fatouschen Ausnahmewert verschiedene Punkt unendlich viele Vorgänger zweiter und höherer Ordnung<sup>3)</sup>.

Alle Punkte, in denen die Gesamtheit der  $F_n(z)$  nicht kompakt<sup>4)</sup> ist, bilden die Menge  $\mathfrak{F}$ , der stets auch der Punkt  $\infty$  zugerechnet wird. Ein „abstoßender Fixpunkt“  $N$ -ter Ordnung  $z$  ( $F_N(z) = z$ ,  $|F'_N(z)| > 1$ ) gehört z. B. zur Menge  $\mathfrak{F}$ , ebenfalls ein „rational indifferenter Fixpunkt“  $z$  ( $F_N(z) = z$ ,  $F'_N(z) = e^{2\pi i \omega}$ , wobei  $\omega$  rational ist), während ein „anziehender Fixpunkt“  $z$  ( $F_N(z) = z$ ,  $|F'_N(z)| < 1$ ) in  $\mathfrak{F}$ , der Menge aller Punkte, in denen die Folge der  $F_n(z)$  kompakt ist, liegt<sup>5)</sup>.

Unter einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  (zur Unterscheidung mitunter auch  $\mathfrak{G}$ , genannt) wird ein von Punkten aus  $\mathfrak{F}$  gebildetes Gebiet verstanden, dessen Rand zu  $\mathfrak{F}$  gehört.

Die benutzten Sätze von Fatou lauten:

**Satz I.** *Bei der Iteration einer ganzen transzendenten Funktion entsteht stets eine vollständig invariante und perfekte Menge  $\mathfrak{F}$ .*

**Satz II.**  *$\mathfrak{F}$  ist identisch mit der Ableitung der Menge aller Fixpunkte.*

**Satz III.** *Ein beschränktes Gebiet  $\Delta$ , das den eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert weder im Innern noch auf dem Rande enthält und im übrigen beliebig ist, sei gegeben; dann gibt es zu jeder Umgebung  $\delta$  eines beliebigen Punktes  $P$*

<sup>3)</sup> Vgl. I. c., S. 338.

<sup>4)</sup> Die Funktionenfolge  $F_n(z)$  heißt im Anschluß an Montel bei  $z_0$  kompakt (Montel nannte es „normal“, siehe z. B. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Paris 1927; die Topologie verwendet seit Fréchet die Bezeichnung „kompakt“, der auch jetzt der Vorzug gegeben werden soll), wenn eine Umgebung um  $z_0$  existiert, in der folgendes gilt: Aus jeder beliebigen unendlichen Teilfolge der Gesamtheit aller  $F_n(z)$  läßt sich stets eine unendliche Teilfolge auswählen, die dort gleichmäßig gegen eine endliche und damit reguläre Funktion oder gleichmäßig gegen den Wert  $\infty$  konvergiert.

<sup>5)</sup> Eine Darstellung der Iteration der rationalen Funktionen, in der auch auf ganze transzendente Funktionen anwendbare Grundbegriffe und Sätze niedergelegt werden, gibt Cremer, *Über die Iteration rationaler Funktionen*, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 33 (1925); dort findet sich auch ein Beweis für den obigen Satz.

von  $\mathfrak{F}$  ein  $N(P, \delta, \Delta)$ , so daß  $\delta$  durch jedes  $F_\nu(z)$  mit  $\nu \geq N(P, \delta, \Delta)$  auf ein Gebiet abgebildet wird, welches  $\Delta$  enthält.

## II. Der einfache Zusammenhang der von $\mathfrak{F}$ erzeugten Gebiete; die Höchstanzahl vollständig invarianter Gebiete.

1. Ist eine der Grenzfunktionen der  $F_\nu(z)$  in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  nicht  $\equiv \infty$ , so erhält leicht<sup>\*)</sup>, daß  $\mathfrak{G}$  einfach zusammenhängend ist. Im Falle jedoch, daß in  $\mathfrak{G}$ :  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(z) \equiv \infty$  ist, läßt sich a priori keine Aussage über den Zusammenhang machen; hier sollen in gewissen Fällen die unten gebrachten Feststellungen Abhilfe schaffen.

Gegeben sei ein invariantes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $\mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{G}$  wird nach Riemann durch eine reguläre Funktion  $s \neq S(z)$ , die, abgesehen von einer umkehrbar eindeutigen Abbildung des Kreises auf sich, eindeutig bestimmt ist, auf das Gebiet  $|s| < 1$  eineindeutig abgebildet. Da  $F(z)$  das Gebiet auf sich abbildet, existiert eine reguläre eindeutige Funktion  $t = T(s)$ , die  $|s| < 1$  auf  $|t| < 1$  abbildet und die Funktionalgleichung

$$S(F(z)) = T(S(z))$$

erfüllt.  $T(s)$  ist zu untersuchen<sup>7)</sup>.

Im Falle eines Zentrums<sup>8)</sup> ist die Schrödersche Funktion  $S(z)$  identisch mit der eben genannten Funktion  $S(z)$ , während  $T(s)$  speziell gleich  $e^{2\pi i \omega s}$  ( $\omega$  irrational) ist.

Die Bestimmung von  $T(s)$  wird (bei der Untersuchung von  $F(z)$  in  $\mathfrak{G}$ ) in manchen Fällen einfache geometrische Sachverhalte aufdecken, während aber auch umgekehrt Abbildungen des Einheitskreises auf sich durch eine ganze transzendente Funktion, die ein invariantes Gebiet besitzt, dessen Abbildung der gegebenen Abbildung des Einheitskreises auf sich entspricht, geometrisch besser gedeutet werden können (siehe Iteration von  $\cos z$ ).

Wegen des Schwarzschen Spiegelungsprinzips und der Abbildung von  $|s| = 1$  auf  $|t| = 1$  kann  $T(s)$  nie ganz transzendent sein; dagegen besteht die Möglichkeit, daß  $T(s)$  rational wird (siehe Iteration von  $\sin z$ ).

<sup>\*)</sup> Satz von Weierstraß; siehe auch Cremer, Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem, Ber. d. Math.-Physik. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wissensch. zu Leipzig 84 (1933), S. 318.

<sup>7)</sup> Diese Untersuchungen lassen sich auch auf ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet übertragen.

<sup>8)</sup> Falls ein „irrational indifferenten Fixpunkt“ [ $F(z) = z$ ,  $F'(z) = e^{2\pi i \omega}$ ,  $\omega$  irrational] zu  $\mathfrak{F}$  gehört, ist er ein „Zentrum“. Bisher hat sich noch kein Beispiel für ein rationales oder ganz transzendentes Zentrum finden lassen. Vgl. hierzu Cremer, Über die Schrödersche Funktionalgleichung [siehe Fußnote 6)].

2. Nun ein Kriterium <sup>\*)</sup>: Existiert ein Gebiet  $G_0$ , das  $\infty$  als Randpunkt besitzt, so sind alle Gebiete  $G$ , die nicht mit  $G_0$  identisch sind, einfach zusammenhängend; ist  $G_0$  mehrfach zusammenhängend, so ist es vollständig invariant.

Dies läßt sich folgendermaßen beweisen: Sei  $G^*$  ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet; es enthält also eine Kurve, die einen Punkt von  $\mathfrak{F}$  umschlingt. Da eine ebenfalls von der Kurve eingeschlossene Umgebung des Punktes von  $\mathfrak{F}$  existiert, in die nach Satz III für alle  $n \geq N$  ein Vorgänger  $n$ -ter Ordnung von  $G_0$  hineinreicht, und jeder Vorgänger von  $G_0$  auch  $\infty$  als Randpunkt besitzt, so haben alle diese Vorgänger von  $G_0$  mit der einfach geschlossenen Kurve, d. h. auch mit  $G^*$  Punkte gemeinsam, sind mit diesem folglich identisch.  $G^*$  geht durch alle  $F_n(z)$  ( $n \geq N$ ) auf  $G_0$  über, das sich hiermit als invariant erweist. Nun ist aber jeder Vorgänger von  $G_0$  invariant, da er  $\infty$  als Randpunkt besitzt (Wiederholung des obigen Beweises),  $G_0$  ist folglich vollständig invariant und identisch mit dem mehrfach zusammenhängenden  $G^*$ .

3. Das eben gebrachte Kriterium vermittelt z. B. die folgenden Resultate: Besitzt die Funktion  $F(z)$  einen zu  $\mathfrak{F}$  gehörigen asymptotischen Wert  $b$  und enthält  $G_0$  den nach  $\infty$  laufenden Weg, auf dem  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = b$ , so sind alle nicht mit  $G_0$  identischen Gebiete  $G$ , einfach zusammenhängend.

Besitzt  $F(z)$  einen Fatouschen Ausnahmewert  $\alpha$  vom Grade  $\mu \geq 2$  (oder vom Grade  $\mu = 1$ ; in diesem letzteren Falle muß außerdem vorausgesetzt werden, daß er anziehend oder ein Zentrum ist), so sind alle durch  $\mathfrak{F}$  erzeugten Gebiete einfach zusammenhängend; die letzte Feststellung folgt leicht, wenn man bedenkt, daß Fatousche Ausnahmewerte vom Grad  $\mu \geq 2$  anziehende Fixpunkte sind ( $F'(\alpha) = 0$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} F_v(z) = \alpha$  in dem zu  $\alpha$  gehörenden Gebiet) und ebenso wie die vom Grade  $\mu = 1$  asymptotische Werte darstellen.

Weiter gilt: Existiert ein Gebiet  $G_0$  derart, daß unendlich viele Vorgänger erster Ordnung mindestens eines seiner Punkte einem Gebiet  $G_{-1}$  (eventuell  $= G_0$ ) angehören, so sind alle nicht mit  $G_{-1}$  identischen Gebiete und, wenn  $G_0 \neq G_{-1}$  ist, alle Gebiete einfach zusammenhängend.

Existiert ein vollständig invariantes Gebiet  $G$ , so sind alle übrigen eventuell noch existierenden Gebiete einfach zusammenhängend. Sind also mehr als ein vollständig invariantes Gebiet vorhanden, so sind alle durch  $\mathfrak{F}$  erzeugten Gebiete  $G$ , einfach zusammenhängend.

<sup>\*)</sup> Diesem Kriterium lassen sich, etwa von Beispielen ausgehend (z. B. Behandlung von  $e^z$ ), weitere in der gleichen oder ähnlichen Art hergeleitete zufügen; hier soll es nur auf die Darlegung der Methode ankommen.

4. Dieses letzte Ergebnis läßt leicht die Anwendung eines von Ahlfors<sup>10)</sup> ausgesprochenen Satzes zu, der sich auf einfach zusammenhängende Gebiete bezieht. Das Ergebnis dieser Anwendung ist der folgende Satz, der wegen der Möglichkeit, daß die Menge  $\mathfrak{F}$  gemeinsamer Rand von mindestens drei vollständig invarianten Gebieten sein kann<sup>11)</sup>, besonderes Interesse hat: *Es gibt höchstens zwei vollständig invariante Gebiete*<sup>12)</sup>. Dies ergibt sich, da die von Ahlfors mit  $m$ , bezeichneten Werte in einem vollständig invarianten Gebiet gleich  $\infty$  sind.

### III. Beweis, daß die Menge $\mathfrak{F}$ kein isoliertes Jordan-Kurvenstück enthält.

Bei der Iteration der rationalen Funktionen untersuchte Fatou<sup>13)</sup> die Beschaffenheit der Menge  $\mathfrak{F}$  vor allem in dem Falle, daß sie eine der topologisch einfachsten Punktmengen, nämlich eine Kurve darstellt<sup>14)</sup>. Die unten wiedergegebene Untersuchung für ganze transzendente Funktionen führt zu folgendem Satz:

*Die Menge  $\mathfrak{F}$  enthält kein isoliertes Jordankurvenstück.*

Anders formuliert: Es ist unmöglich, daß es einen Punkt  $P$  der Menge  $\mathfrak{F}$  gibt, um den eine Umgebung  $\mathfrak{U}$  existiert, so daß gilt: Es gibt eine solche topologische Abbildung des Kreises  $|s| < 1$  auf  $\mathfrak{U}$ , daß die reellen  $s$ , und nur diese, auf die in  $\mathfrak{U}$  liegenden Punkte von  $\mathfrak{F}$  abgebildet werden.

<sup>10)</sup> Siehe Ahlfors, Quelques Propriétés des Surfaces de Riemann correspondant aux Fonctions méromorphes, Bulletin de la Société Math. de France **60** (1932). Sein Satz lautet auf den vorliegenden Fall zugeschnitten: Sind  $q$  einfach zusammenhängende Gebiete gegeben, die keinen Punkt gemeinsam haben, und nimmt man an, daß ein beliebiger Zweig der Umkehrfunktion einer ganzen transzendenten Funktion sich im Innern des  $v$ -ten Gebietes so fortsetzen läßt, daß in einem Punkte des Gebietes zum mindesten  $m$ , verschiedene Zweige erzeugt werden, so ist:  $\sum_{i=1}^q \frac{1}{m_i} \geq q - 2$ .

<sup>11)</sup> Siehe Brouwer, Zur Analysis Situs, Math. Annalen **68** (1910), S. 427.

<sup>12)</sup> Fatou behandelte die Frage der Höchstanzahl der vollständig invarianten Gebiete für rationale Funktionen; seine Methode kann hier nicht übernommen werden, da er wesentlich die endliche Anzahl aller vorhandenen Verzweigungspunkte verwendet. Siehe Fatou, Sur les équations fonctionnelles, Bulletin de la Société Mathématique de France **47** (1919), S. 183ff.

<sup>13)</sup> Fatou, Sur les équations fonctionnelles, Bulletin de la Société Mathématique de France **48** (1920), S. 250.

<sup>14)</sup> Er bewies dort, daß die Menge  $\mathfrak{F}$  außer einem Kreisbogen keinen isolierten analytischen Kurvenbogen enthalten kann, und sprach aus, daß der Satz sich auch beweisen ließe, wenn statt des analytischen Kurvenbogens ein Jordanbogen, der an jeder Stelle eine Tangente besitzt, angenommen wird.

**Beweis.** Die Annahme, daß ein Punkt  $P$  existiert, wird zum Widerspruch geführt. Da in jedem Gebiet  $\mathfrak{G}$  höchstens ein Fixpunkt liegen kann<sup>15)</sup>, enthält  $\mathfrak{U}$  höchstens zwei in  $\mathfrak{F}$  gelegene Fixpunkte, alle übrigen (siehe Satz II) gehören zu  $\mathfrak{F}$ . Ein mit dem eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert  $\alpha$  nicht identischer Fixpunkt  $Q$  der Menge  $\mathfrak{F}$  wird ins Auge gefaßt; er habe die Ordnung  $L$ . Nach Satz III besitzt er in  $\mathfrak{U}$  mindestens drei auf  $\mathfrak{D}$ , dem Bild der reellen  $s$  in  $|s| < 1$ , liegende, nach wachsendem  $s$  geordnete Vorgänger  $Q_{-1}^1, Q_{-2}^1, Q_{-3}^1$  gleicher Ordnung  $L$ , wobei der „zwischen“  $Q_{-1}^1$  und  $Q_{-2}^1$  liegende Teil von  $\mathfrak{D}$ , er heiße  $\mathfrak{D}_0$ , keine weiteren Vorgänger  $L$ -ter Ordnung von  $Q$  enthält. Durch  $F_L(z)$  wird  $\mathfrak{D}_0$  auf eine in  $Q$  beginnende und endende und  $Q$  enthaltende Kurve  $\mathfrak{C}_0$  abgebildet. Aus der Abbildung von  $\mathfrak{D}_0$  durch  $F_L(z)$  ist klar, daß wegen der vollständigen Invarianz von  $\mathfrak{F}$  und  $\overline{\mathfrak{F}}$  in der Nähe eines jeden Punktes von  $\mathfrak{C}_0$  die Menge  $\mathfrak{F}$  lediglich aus den Punkten von  $\mathfrak{C}_0$  besteht.

Diese letzte Feststellung führt wesentlich die Entscheidung herbei: Da  $\mathfrak{C}_0$  den Fixpunkt  $Q$  enthält, ist es gegenüber der Iteration von  $F_L(z)$  eine invariante Menge. Für alle  $z$  aus  $\mathfrak{C}_0$  und ein hinreichend gewähltes reelles  $G$  gilt dann ( $\nu = 1, 2, \dots$ )

$$|F_{\nu L}(z)| \leq G.$$

Die bei der Iteration von  $F(z)$  entstehende Menge  $\mathfrak{F}$  ist identisch mit der bei der Iteration von  $F_L(z)$  entstehenden Menge  $\mathfrak{F}$ <sup>16)</sup>. Diese Feststellung vereint mit der Tatsache, daß in jeder Nähe von  $\infty$  Punkte aus  $\mathfrak{F}$  liegen, stellt einen Widerspruch zu Satz III dar, womit die Existenz eines Punktes  $P$  unmöglich wird.

#### IV. Über die Struktur der Menge $\mathfrak{F}$ bei abstoßenden Fixpunkten.

*Ist der abstoßende Fixpunkt  $\alpha$  ungleich dem Fatouschen Ausnahmewert  $\alpha$  erster Ordnung und erreichbarer Randpunkt eines invarianten, einfach zusammenhängenden Gebietes  $\mathfrak{G}$ , so gilt unter der Voraussetzung, daß der Multiplikator  $F'(a) = r e^{i\varphi}$  nicht positiv ist ( $r > 1, 0 < \varphi < 2\pi$ ): Für jeden in  $\mathfrak{G}$  liegenden*

<sup>15)</sup> Enthält ein Gebiet  $\mathfrak{G}$  einen anziehenden Fixpunkt  $l$   $n$ -ter Ordnung, so gilt für alle  $z$  in  $\mathfrak{G}$ :  $\lim_{\nu=1, 2, \dots} F_{\nu n}(z) = l$ . Würde in  $\mathfrak{G}$  neben  $l$  noch ein anderer Fixpunkt  $l'$

( $l'$  ist anziehend oder ein Zentrum) von der Ordnung  $n'$  liegen, so gilt  $\lim_{\nu=1, 2, \dots} F_{\nu n'}(l') = l'$ ;

dies steht im Widerspruch zu:  $l = \lim_{\nu=1, 2, \dots} F_{\nu n}(l') = \lim_{\nu=1, 2, \dots} F_{\nu n n'}(l')$ . Neben einem an-

ziehenden Fixpunkt kann also kein weiterer Fixpunkt in  $\mathfrak{G}$  liegen;  $\mathfrak{G}$  kann aber auch höchstens ein Zentrum besitzen, wie aus den Eigenschaften der in II, 1 angegebenen, zu einem „Zentrumgebiet“ gehörenden Funktion  $T(s)$  hervorgeht.

<sup>16)</sup> Dies gilt wegen des Satzes II, da die Menge der aus der Iteration von  $F(z)$  sich ergebenden Fixpunkte identisch ist mit der bei der Iteration von  $F_L(z)$  entstehenden.

Weg  $\mathfrak{C} = z(t)$  ( $0 < t \leq 1$ ) mit  $\lim_{t \rightarrow 0} z(t) = a$  erfüllt die stetig erklärte Funktion  $\arg \{z(t) - a\}$  die Bedingung:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \arg \{z(t) - a\} = +\infty \quad \text{oder} \quad -\infty.$$

Dieser Satz besagt geometrisch, daß abstoßende Fixpunkte ( $\neq \alpha$ ), in deren Nähe sich die Funktion wie eine echte Drehstreckung (Drehwinkel  $\neq 0!$ ) verhält, von einem einfach zusammenhängenden invarianten Gebiet  $\mathfrak{G}$  aus höchstens auf einer „spiralg“ gewundenen Kurve erreichbar sind. — Der Satz wird bei der Iteration von  $\cos z$  Verwendung finden.

Die Voraussetzung des nichtpositiven Multiplikators ist wesentlich, da Fatous Beispiel <sup>17)</sup>  $F(z) = z + 1 + e^{-z}$  abstoßende Fixpunkte mit positivem Multiplikator enthält, die von dem einfach zusammenhängenden und vollständig invarianten Gebiet  $\mathfrak{G}$  ( $= \bar{\mathfrak{F}}$ ) aus auf geradem Wege erreicht werden können.

Der Satz läßt gegebenenfalls die Möglichkeit zu, aus der Struktur der Menge  $\bar{\mathfrak{F}}$  festzustellen, daß alle abstoßenden Fixpunkte einen positiven Multiplikator besitzen <sup>18)</sup>.

Beweis. Der Bequemlichkeit diene folgende Transformation: Bekanntlich <sup>19)</sup> existiert bei  $a$  eine reguläre Funktion  $S(z) = s$ , die eine passend gewählte Umgebung  $\mathfrak{U}$  einschließlich deren aus einer einfach geschlossenen analytischen Kurve bestehenden Rand auf  $|s| \leq 1$  eineindeutig abbildet, so daß dort die Schrödersche Funktionalgleichung

$$S(F(z)) = r e^{t \varphi} S(z)$$

gilt. Wird nun noch die offenbar mögliche topologische Abbildung des Äußeren von  $\mathfrak{U}$  einschließlich dessen Rand auf  $|s| \geq 1$  vollzogen, wobei die Abbildung des Randes auf  $|s| = 1$  identisch ist mit der durch  $S(z)$  vollzogenen, so ist die  $z$ -Ebene topologisch auf die  $s$ -Ebene abgebildet. Die folgenden Untersuchungen spielen sich nur noch in der  $s$ -Ebene ab; dabei ist unter  $\mathfrak{G}'$  das Bild von  $\mathfrak{G}$ , unter  $\mathfrak{C}' = s(t)$  das Bild von  $\mathfrak{C} = z(t)$ , unter  $F'(s)$  die in die  $s$ -Ebene transformierte Abbildung  $F(z)$  usw. zu verstehen.

Im Kreise  $|s| < 1$  liegen Punkte von  $\mathfrak{G}'$ ; zu jedem dieser Punkte gehört ein Gebiet, dessen sämtliche Punkte in  $\mathfrak{G}'$  und  $|s| < 1$  liegen und das „größtmögliche Ausdehnung“ besitzt. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

<sup>17)</sup> Siehe Fatou, Acta math. 47 (1926), S. 358 ff.

<sup>18)</sup> Siehe z. B. die Iteration der rationalen Funktion  $z^2$  ( $\bar{\mathfrak{F}}$  ist identisch mit dem Einheitskreis), für die der Satz ebenfalls gilt; hier läßt sich das Resultat auch auf rechnerischem Wege erhalten.

<sup>19)</sup> Siehe Koenigs, Recherches sur les équations fonctionnelles, Annales de l'Ecole Normale (3) 1 (1884).

a) Es gibt mindestens ein derartiges Gebiet mit mindestens einem Punkt  $P_0^*$ , dessen Vorgänger erster Ordnung (vermöge der Iteration von  $r e^{i\varphi} s$ ) im selben Gebiet liegt.

b) Es gibt kein Gebiet mit der genannten Eigenschaft.

Zu a) Der Punkt  $P_0^*$  und sein Vorgänger  $P_{-1}^*$  lassen sich durch einen ganz im betreffenden Gebiet gelegenen Weg miteinander verbinden. Werden alle Vorgänger dieses Weges aufgesucht, die sich durch Umkehrung der Drehstreckung ( $F^s(s) = r e^{i\varphi} s$  in  $|s| \leq 1$ ) finden lassen, so ergibt sich ein Weg  $h^*(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), der  $s = 0$  mit  $P_0^*$  verbindet und bei dem die in  $0 < t \leq 1$  stetige Funktion  $\arg \{h^*(t)\} - \arg \{h^*(1)\}$  bei  $t = 0$  entweder gegen  $-\infty$  oder  $+\infty$  verläuft. Wird die  $s$ -Ebene vermöge  $v = \lg s$  in die  $v$ -Ebene abgebildet, so erscheint der Weg  $h^*(t)$  in unendlich vielen Exemplaren  $h^v(t)$ , deren jedes nur nichtäquivalente Punkte besitzt (zwei Punkte  $v_1$  und  $v_2$  heißen äquivalent, wenn  $v_1 - v_2$  ein ganzes Vielfaches von  $2\pi i$  ist); enthielte nämlich ein Exemplar zwei äquivalente Punkte, so folgte die Existenz einer den Punkt  $s = 0$  umschlingenden, ganz in  $\mathfrak{G}^*$  gelegenen Kurve, was der Annahme des einfachen Zusammenhangs von  $\mathfrak{G}^*$  widerspricht.

Vier benachbarte Exemplare  $h_I^v(t)$ ,  $h_{II}^v(t)$ ,  $h_{III}^v(t)$  und  $h_{IV}^v(t)$  beranden, wenn ein Teil einer zur imaginären Achse parallelen Geraden hinzugerechnet wird, drei verschiedene nach rechts beschränkte Gebiete. Der Weg  $\mathfrak{C}$  (siehe Satz) wird nur für hinreichend kleine  $t$  betrachtet! „Zwischen“  $h_{II}^v(t)$  und  $h_{III}^v(t)$  liegt mindestens ein Punkt von  $\mathfrak{C}^*$ , dem Bild von  $\mathfrak{C}$ ; für das zugehörige Exemplar gilt: es liegt ganz „zwischen“  $h_I^v(t)$  und  $h_{IV}^v(t)$ ; würde nämlich ein Punkt „außerhalb“ liegen, so hätte das betreffende Exemplar mit mindestens zwei  $h^v(t)$ -Exemplaren einen Punkt gemeinsam, es existierte also eine in  $\mathfrak{G}^*$  liegende, den Punkt  $s = 0$  umschlingende Kurve; dies ist wegen des einfachen Zusammenhangs von  $\mathfrak{G}^*$  unmöglich. Es folgt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \arg \{s(t)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \arg \{h^v(t)\} = \pm \infty.$$

Zu b) Es wird sich zeigen, daß dieser Fall nicht möglich ist.

Zu einem in  $\mathfrak{G}^*$  und  $r|s| < 1$  liegenden Punkt  $R_0^*$ , der sich durch einen ganz in  $\mathfrak{G}^*$  und  $|s| \leq |R_0^*|$  liegenden Weg  $\mathfrak{L}_0^*$  mit  $s = 0$  verbinden läßt, wird der Nachfolger  $R_1^*$  und der  $s = 0$  mit  $R_1^*$  verbindende Nachfolger  $\mathfrak{L}_1^*$  von  $\mathfrak{L}_0^*$  aufgesucht;  $\mathfrak{L}_1^*$  liegt ganz in  $|s| < 1$ .  $\mathfrak{L}_0^*$  und  $\mathfrak{L}_1^*$  haben außer  $s = 0$  keinen gemeinsamen Punkt.  $R_0^*$  und  $R_1^*$  werden durch einen nach  $|s| > 1$  gelangenden, ganz in  $\mathfrak{G}^*$  liegenden Weg  $\mathfrak{R}^*$  miteinander verbunden.  $\mathfrak{L}_0^* + \mathfrak{R}^* + \mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{M}^*$  ist bei passender Wahl von  $\mathfrak{R}^*$  eine einfache geschlossene Jordankurve, die das beschränkte Gebiet  $\mathfrak{M}^*$  berandet. Im Innern von  $\mathfrak{M}^*$  liegen Punkte von  $\mathfrak{G}^*$ , andernfalls  $R_0^*$  und  $R_1^*$  durch einen ganz in  $|s| < 1$  und  $\mathfrak{G}^*$  liegenden Weg miteinander hätten verbunden werden können, was mit der Annahme b) im Widerspruch stünde. Da  $\alpha \neq \alpha$ , gibt es nach Satz III in  $\mathfrak{M}^*$  einen Vor-

gänger  $N$ -ter Ordnung von  $s = 0$ . Das Gebiet  $\mathfrak{A}$  wird durch  $F_N^*(s)$  auf ein beschränktes Gebiet  $\mathfrak{A}_N^*$  abgebildet, das  $s = 0$  im Innern enthält.  $\mathfrak{A}_N^*$  besitzt wegen der analytischen Herkunft von  $F_N^*(s)$  ( $F_N^*(s)$  ist gebietstreu!) nur Randpunkte, die aus Nachfolgepunkten  $N$ -ter Ordnung von  $\mathfrak{M}^*$  bestehen. Der  $N$ -te Nachfolger  $\mathfrak{M}_N^*$  von  $\mathfrak{M}^*$  muß also eine Teilmenge enthalten, die ein Gebiet berandet, das  $s = 0$  im Innern enthält; dann würde  $s = 0$  aber mit zu dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathfrak{G}^*$  gehören, wie der folgende Satz ergibt: Bilden innere Punkte eines einfach zusammenhängenden Gebietes  $\mathfrak{J}$  den Rand eines beschränkten Gebietes  $\mathfrak{R}$ , so gehört jeder Punkt von  $\mathfrak{R}$  zu  $\mathfrak{J}$ , w. z. b. w.

### V. Die Iteration von $\sin z$ .

1. Da in  $0 < z < \pi$ :  $0 < \sin z < z$  und in  $-\pi < z < 0$ :  $z < \sin z < 0$ , gilt für alle reellen  $z$ :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} F_v(z) = 0 \quad (F_1(z) = \sin z).$$

[Wegen der Monotonie der Werte  $F_1(z), \dots$  existiert ein Grenzwert  $a$  ( $|a| < 1$ ) mit:  $a = \lim_{v \rightarrow \infty} F_v(z) = \lim_{v \rightarrow \infty} F(F_v(z)) = \sin a$ , d. h.  $a = 0$ ].

2. Falls  $z = x + iy$  ( $x$  und  $y$  reell) gesetzt wird, so ist:

$$\sin z = \operatorname{Cof} y \sin x + i \operatorname{Sin} y \cos x.$$

Wird  $z' = x' + iy'$  gesetzt ( $x'$  und  $y'$  reell), so ist:

$$x' = \operatorname{Cof} y \sin x; \quad y' = \operatorname{Sin} y \cos x.$$

Unter Ansehung der Formeln läßt sich nun die unten verwendete Tatsache aussprechen: Die Strecke mit den Punkten  $z = x + iy$ , wobei  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $y = k$  ( $k > 0$ ) sein soll, geht durch  $z' = \sin z$  in den im  $++$ -Quadranten liegenden Bogen der Ellipse

$$\frac{x'^2}{\operatorname{Cof}^2 k} + \frac{y'^2}{\operatorname{Sin}^2 k} = 1$$

über, und zwar laufen bei Betrachtung der Punkte der Strecke von rechts nach links die entsprechenden Bildpunkte auf dem Ellipsenbogen auch von rechts nach links. Beachtenswert ist noch, daß in  $k > 0$ :

$$\frac{d \operatorname{Cof} k}{dk} > 0, \quad \frac{d \operatorname{Sin} k}{dk} > 0;$$

d. h. mit wachsendem  $k$  ( $k > 0$ ) wachsen auch die Haupt- und Nebenachsen der zugehörigen Ellipsenbogen.

3. Es werde die Punktmenge  $\mathfrak{P}^*$  definiert: Jeder ihrer Punkte  $z = x + iy$  erfüllt die Bedingungen:

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq y \leq 1,6x; \quad 0 \leq y \leq 1,3.$$

Die Punktmenge  $\mathfrak{P}_1$  besteht aus  $\mathfrak{P}^*$  und den Punkten, die man durch Spiegelung der Punkte von  $\mathfrak{P}^*$  an der Geraden  $x = \frac{\pi}{2}$ , der Geraden  $y = 0$  und dem Punkt  $z = \frac{\pi}{2}$  erhält. Die Punktmenge  $\mathfrak{P}_1$  besteht also aus dem in der Fig. 1 dargestellten Sechseck einschließlich Rand, jedoch ohne die beiden Randpunkte 0 und  $\pi$  ( $\mathfrak{P}^*$  schraffiert!). Die Punktmenge  $\mathfrak{P}_0$  erhält man aus  $\mathfrak{P}_1$ , indem man diese an der Geraden  $x = 0$  spiegelt, und allgemeiner findet man die Punkt Mengen  $\mathfrak{P}_n$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ), indem man die Menge  $\mathfrak{P}_0$  um  $n \cdot \pi$  verschiebt.

4. Es wird nun zunächst gezeigt, daß  $\mathfrak{P}^*$  durch  $\sin z$  derart abgebildet wird, daß jeder Punkt in das Innere von  $\mathfrak{P}_1$  gelangt. Nach den Ausführungen unter 2. genügt es zu zeigen, daß

a) der Punkt  $z = \frac{\pi}{2} + 1,3i$  auf einen Punkt der  $x$ -Achse abgebildet wird, der  $< \pi - \frac{13}{16}$  ist, und

b) die Punkte  $z = x + iy$  mit  $0 < x \leq \frac{13}{16}$  und  $y = 1,6x$  in das Innere von  $\mathfrak{P}_1$  abgebildet werden.

Zu a) Dieser Punkt ist sofort erledigt, da <sup>20)</sup>  $\operatorname{Coj} 1,3 < \pi - \frac{13}{16}$ .

Zu b) Hier ist zu zeigen, daß in  $0 < x \leq \frac{13}{16}$  erstens:

$$\operatorname{Sin} 1,6x \cos x < 1,3,$$

und zweitens:

$$\operatorname{Sin} 1,6x \cos x < 1,6 \operatorname{Coj} 1,6x \sin x.$$

Der erste Punkt läßt sich erledigen, indem man unter Benutzung der ersten Ableitung der auf der linken Seite der Ungleichung stehenden Funktion zeigt, daß diese Funktion in  $0 < x \leq \frac{13}{16}$  von 0 monoton bis zum Werte  $\operatorname{Sin} 1,3 \cos \frac{13}{16} < 1,3$  steigt. Und der zweite Punkt ist gezeigt, wenn die Funktion

$$1,6 \operatorname{Coj} 1,6x \sin x - \operatorname{Sin} 1,6x \cos x$$

in  $0 < x \leq \frac{13}{16}$  als positiv dargetan ist (wie sich wieder mit der ersten Ableitung zeigen läßt, steigt sie in  $0 < x \leq \frac{13}{16}$  monoton ab 0).

Da nun  $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$  und  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ , wird  $\mathfrak{P}_1$  durch  $\sin z$  in das Innere von  $\mathfrak{P}_1$  abgebildet.  $\mathfrak{P}_1$  ist also eine invariante Menge; die inneren Punkte gehören dann wegen des Satzes III zu  $\overline{\mathfrak{F}}$ ; aber auch die

<sup>20)</sup> Für diese und spätere numerische Auswertungen siehe z. B. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1933.

zu  $\mathfrak{P}_1$  gehörenden Randpunkte von  $\mathfrak{P}_1$  sind in  $\bar{\mathfrak{F}}$ , da ja ihre Nachfolger erster Ordnung zu  $\bar{\mathfrak{F}}$  gehören (Satz I).

Durch  $\mathfrak{P}_1$  wird das invariante Gebiet  $\mathfrak{G}_1$  bestimmt, in dem wegen des Resultats unter 1.:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_r(z) = 0$$

gilt, d. h.  $\mathfrak{G}_1$  ist ein Anziehungsgebiet des rational indifferenten Fixpunktes  $z = 0$ .

Leicht ist nun mit Satz III wegen  $\sin(-z) = -\sin z$  auch der Nachweis, daß  $\mathfrak{P}_0$  ganz in  $\bar{\mathfrak{F}}$  liegt.  $\mathfrak{P}_0$  bestimmt das Gebiet  $\mathfrak{G}_0$  ( $\neq \mathfrak{G}_1$ , wie sich in 6. zeigen wird), das analog zu  $\mathfrak{G}_1$  gefunden wird und zu diesem symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse liegt; auch dieses ist invariant und zudem Anziehungsgebiet des rational indifferenten Fixpunktes  $z = 0$ . Allgemein bestimmt jedes  $\mathfrak{P}_n$  ein  $\mathfrak{G}_n$ , und zwar sind die  $\mathfrak{G}_{2n}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) Vorgängergebiete erster Ordnung von  $\mathfrak{G}_0$  und die  $\mathfrak{G}_{2n+1}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) Vorgängergebiete erster Ordnung von  $\mathfrak{G}_1$ . Zudem gilt für jedes  $z$  in jedem  $\mathfrak{G}_n$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_r(z) = 0,$$

womit auch erwiesen ist, daß jedes Gebiet  $\mathfrak{G}_n$  sowie jedes seiner Vorgängergebiete einfach zusammenhängend ist.

5. Es wird nun  $F'_1(z) = \cos z$  untersucht. Es ist:

$$|F'_1(z)|^2 = \cos^2 y \cos^2 x + \sin^2 y \sin^2 x.$$

Man kann nun folgendes beweisen: In jedem Punkt  $z$ , der in keinem der  $\mathfrak{P}_n$  einschließlich der Punkte  $n\pi$  liegt, ist  $|F'_1(z)| > 1$ . Und in gewisser Hinsicht noch schärfer ist der folgende Satz: Jedem Punkte  $z$ , der in keinem  $\mathfrak{P}_n$  und keinem der Kreise  $|z - n\pi| < N > 0$  liegt, entspricht  $|F'_1(z)| > M > 1$ , wobei  $M$  eine Funktion von  $N$  ist. Bewiesen sind diese beiden Sätze offenbar dann, wenn gezeigt ist, daß

a) bei festgehaltenem, beliebigem  $x$  für  $y \geq 0$ :  $|F'_1(z)|^2$  eine monoton wachsende Funktion von  $y$  und

b) in jedem Randpunkt der  $\mathfrak{P}_n$  außer den Punkten  $n\pi$ :  $|F'_1(z)|^2 > 1$ . Der Beweis von a) erfordert keine Mühe, und zum Beweis von b) sei gesagt, daß für beliebige  $x$ :  $|F'_1(x + 1,3i)| > \frac{5}{4}$  und  $|F'_1(x + i1,6x)|^2$  eine für  $x > 0$  von  $|F'_1(0)|^2 = 1$  aus wachsende Funktion ist.

6. Nach der Vorbereitung in 5. läßt sich beweisen, daß der Nullpunkt Häufungspunkt von Nachfolgern eines jeden Punktes aus  $\bar{\mathfrak{F}}$  ist. Andernfalls gibt es nämlich zu einem in  $\bar{\mathfrak{F}}$  befindlichen  $z_0$  ein  $N_1 > 0$ , daß für alle  $z_r = F_r(z_0)$ :  $|z_r - n\pi| > N_1$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) ist. Da weiter kein  $z_r$  in einem der  $\mathfrak{G}_n$  liegt, so gilt nach 5.:  $|F'_1(z_r)| > M_1 > 1$  für alle  $r$ . Mit Hilfe des Blochschen Satzes und der Tatsache, daß die Geraden  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) auf die  $x$ -Achse abgebildet werden, läßt sich die Annahme zum Widerspruch führen. Dabei verwendet man die Formel:

$$F'(z_0) = F'_1(z_0) F'_1(z_1) \dots F'_1(z_{r-1})$$

und bedenkt, daß es in der Folge der  $|F'_i(z_0)|$  beliebig große Werte gibt, d. h. die in  $\mathfrak{F}$  liegenden Punkte mit  $|z - z_0| < R$  nach Bloch auf Gebiete abgebildet werden, die beliebig große Kreise und somit Strecken der Geraden  $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$  enthalten. Eine spezielle Folgerung aus obigem Satz ist die Feststellung, daß die Geraden  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) zu  $\mathfrak{F}$  gehören.

7. Wegen  $\sin n\pi = 0$  gibt es ein  $\delta_1 > 0$ , daß die Punkte  $z$  mit  $|z - n\pi| < 1$  ( $n = \pm 1, \dots$ ) keinen Vorgänger erster Ordnung in der Punktmenge derjenigen  $z$  besitzen, die durch  $|z - n\pi| < \delta_1$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) charakterisiert sind. Ist  $\operatorname{tg} \alpha_0 = 1,6 \left( \frac{\pi}{4} < \alpha_0 < \frac{\pi}{2} \right)$ , so gilt: Es gibt ein  $\delta_2 < 1$ , daß für alle  $z$  mit  $0 < |z| < \delta_2$  und  $\alpha_0 \leq \arg z \leq \pi - \alpha_0$  oder  $\pi + \alpha_0 \leq \arg z \leq 2\pi - \alpha_0$  gilt:  $|\sin z| > |z|$ .

Bekanntlich existiert nun zu  $|z| < \delta_2$  ein Kreis  $|z| < \delta_3$  ( $0 < \delta_3 < \delta_2 < 1$ ), dessen sämtliche Punkte durch  $F_1(z)$  in  $|z| < \delta_2$  einmal angenommen werden. Mit dem Ansatz  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_3\}$  läßt sich nun abschließend mit Verwendung des ersten Resultats unter 4. sagen: Jeder Punkt  $z^*$  mit  $0 < |z^*| < \delta$  und  $\alpha_0 \leq \arg z^* \leq \pi - \alpha_0$  oder  $\pi + \alpha_0 \leq \arg z^* \leq 2\pi - \alpha_0$  besitzt genau einen Vorgänger  $z_{-1}^{(0)}$  erster Ordnung in der Punktmenge derjenigen  $z$ , die durch  $0 < |z| < \delta$  und  $\alpha_0 \leq \arg z \leq \pi - \alpha_0$  oder  $\pi + \alpha_0 \leq \arg z \leq 2\pi - \alpha_0$  charakterisiert sind, zudem ist:  $|z_{-1}^{(0)}| < |z^*|$  und weiter gilt: Die Gesamtheit der Vorgänger erster Ordnung  $z_{-1}^{(n)}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) von  $z^*$  befindet sich in den Kreisen  $|z - n\pi| < \delta$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ), wobei die Vorgänger erster Ordnung der Punkte  $z_{-1}^{(n)}$  ( $n = \pm 1, \dots$ ) nicht in  $|z - n\pi| < \delta$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) liegen.

8. Nach der Voruntersuchung in 7. läßt sich jetzt beweisen, daß, falls die Folge der  $F_i(z)$  in  $|z - z_0| < R$  kompakt ist, die Nachfolgegebiete von  $|z - z_0| < R$  in  $\mathbb{G}_0$  oder  $\mathbb{G}_1$  ausmünden. Angenommen, dies wäre nicht der Fall! Wegen 6. gibt es eine Teilfolge  $\nu_n$  der  $\nu$ , daß für  $z_{\nu_n} = F_{\nu_n}(z_0)$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{\nu_n} = 0$  gilt. (Die  $\nu_n$  seien von vornherein so ausgewählt, daß für alle  $n$  gilt:  $|z_{\nu_{n+1}}| < |z_{\nu_n}| < \delta$  und zudem für alle  $\nu < \nu_n$ :  $|z_\nu| \geq |z_{\nu_n}|$ .)

Alle  $z_\nu$  liegen außerhalb der Punktfolgen  $\mathfrak{P}_n$ , und insbesondere gilt für die  $z_{\nu_n}$ , daß:

$$\alpha_0 \leq \arg z_{\nu_n} \leq \pi - \alpha_0 \quad \text{oder} \quad \pi + \alpha_0 \leq \arg z_{\nu_n} \leq 2\pi - \alpha_0.$$

Von  $z_{\nu_n}$  nach  $z_{\nu_{n+1}}$  gelangt man nach 7. nur, wenn ein Nachfolger von  $z_{\nu_n}$  in ein Gebiet  $|z - n\pi| < \delta$  ( $n = \pm 1, \dots$ ) gelangt; dies ist aber nur möglich,

wenn ein Nachfolger  $z_n$  in ein Gebiet gelangt, welches weder die  $\mathfrak{P}_n$  noch  $|z - n\pi| < \delta$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) enthält. In den  $z_n$  ist also  $|F'_1(z)| > M_2 > 1$ . Aus der Anwesenheit der Folge  $z_n$  folgt also die Existenz einer Folge  $z'_n$  mit  $|F'_1(z)| > M_2 > 1$ . Analog zu 6. kann nun die Behauptung bewiesen werden.

9. *Zusammengefaßt: Die Menge  $\mathfrak{F}$  besteht aus der Gesamtheit der Geraden  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ), deren sämtlichen Vorgängern und der Ableitung der Punktmenge dieser Vorgänger, die übrigens wegen des Fehlens von Fixpunkten auf den Vorgängern von  $x = n\pi$  nach Satz II nur einen Teil von  $\mathfrak{F}$  darstellen. In jedem durch  $\mathfrak{F}$  erzeugten Gebiet  $\mathfrak{G}$  ist:  $\lim_{z \rightarrow \infty} F_1(z) = 0$ , d. h. alle  $\mathfrak{G}$  sind einfach zusammenhängend. Zudem ist jedes  $\mathfrak{G}$  Vorgängergebiet von  $\mathfrak{G}_0$  oder  $\mathfrak{G}_1$ , den beiden Anziehungsgebieten des rational indifferenten Fixpunktes  $z = 0$ . Selbstverständlich ist die Menge  $\mathfrak{F}$  wie auch  $\mathfrak{F}$  gegen die Transformation  $z + n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) invariant.*

Bemerkenswert ist hier noch, daß  $\mathfrak{F}$  (wie auch in den beiden von Fatou<sup>21</sup>) behandelten Beispielen) die Ableitung der Gesamtheit der abstoßenden Fixpunkte ist.

10. Nach diesem grundlegenden Resultat lassen sich bei einiger Rechnung weitere Einzelheiten der Iteration von  $\sin z$  herleiten. Z. B. kann durch Aufsuchen der Vorgänger der Geraden  $y = 0$  und  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) eine Vertiefung der Anschauung von den Mengen  $\mathfrak{F}$  und  $\overline{\mathfrak{F}}$  stattfinden. Die Geraden  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) sowie  $y = 0$  sind die Vorgänger erster Ordnung der Geraden  $y = 0$  und die Vorgänger erster Ordnung der Geraden  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) erfüllen die Gleichung  $\cos y \sin x = \pi n$ . Sie haben etwa den in der Fig. 1 gezeichneten Verlauf. Fig. 1 ist so zu lesen, daß ausgezogene Kurven abgesehen von isolierten Punkten in  $\overline{\mathfrak{F}}$  und gestrichelte in  $\mathfrak{F}$  sind.

11. In Verfolg des unter II, 1 niedergelegten Gedankens werde für das einfach zusammenhängende Gebiet  $\mathfrak{G}_0$  die Funktion  $T(s)$  aufgesucht (für  $\mathfrak{G}_1$  ergibt sich analoges).

Zunächst die Untersuchung von  $S(z) = s$ : Wird  $z = -\frac{\pi}{2}$  auf den Punkt  $s = 0$  abgebildet, wobei überdies  $S'(-\frac{\pi}{2})$  positiv sei, so ergibt sich, daß die reellen Punkte des zur  $x$ -Achse wegen  $F_n(z) = \overline{F_n(z)}$  symmetrischen Gebietes  $\mathfrak{G}_0$  auf die reellen Punkte von  $|s| < 1$  übergehen, insbesondere auch den Randpunkten  $z = -\pi$  und  $z = 0$ :  $s = -1$  und

<sup>21</sup>) Acta mathematica 47 (1926), S. 358 ff.

$s = +1$  entsprechen, wie auch symmetrisch zur  $x$ -Achse liegenden Punkten der  $z$ -Ebene zur reellen Achse der  $s$ -Ebene liegende symmetrische Punkte entsprechen

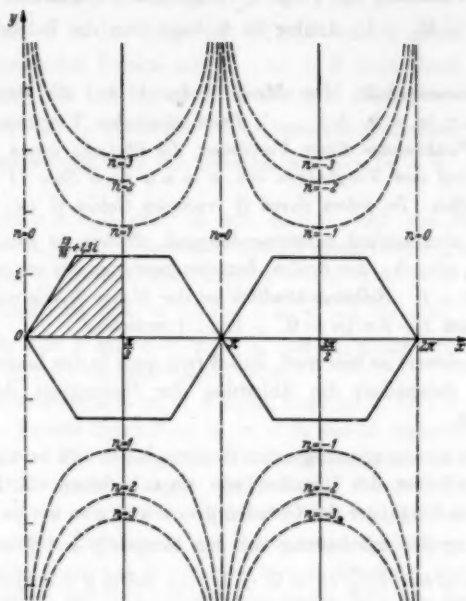


Fig. 1.

Nach diesen Feststellungen über die Funktion  $S(z)$  können die Forderungen, die an die Funktion  $T(s)$  gestellt werden müssen, angegeben werden:

- $T(s) = t$  bildet  $|s| < 1$  auf  $|t| < 1$  ab.
- $T(0) = k$ , wobei  $0 < k < 1$ .
- Jedes  $|t| < 1$  mit  $t \neq k$  besitzt in  $|s| < 1$  genau zwei Vorgänger, während  $t = k$  nur einen Vorgänger dort hat.
- Reelle Werte  $s$  gehen auf positive Werte  $t$  mit  $k \leq t < 1$  über.

An Hand dieser Forderungen läßt sich beweisen, daß die Funktion

$$T(s) = \frac{s^2 + k}{ks^2 + 1}$$

einen richtigen Ansatz darstellt. Leicht erhellt, daß dieser Ansatz auch der einzig mögliche ist.

In  $\mathbb{G}_0$  (wie auch in  $\mathbb{G}_1$ ) gibt es also ein in  $-\frac{\pi}{2}$  wurzelndes „Strahlenbündel“ (das vermöge  $S_{-1}(s)$  entstehende Bild der Raden des Kreises  $|s| < 1$ ),

das durch „quadratische Abbildung“ auf sich (jeder Strahl wird auf denjenigen mit doppeltem Anfangswinkel bei  $-\frac{\pi}{2}$  abgebildet) und weitere Abbildung auf ein in  $z = -1$  wurzelndes Strahlenbündel (das Bild aller durch  $s = k$  laufenden, zu  $|s| = 1$  senkrechten Kreise) die Funktion  $\sin z$  in  $\mathfrak{G}_0$  verdeutlicht. Oder anders: Es gibt eine Schar konzentrischer Kurven, die  $-\frac{\pi}{2}$  einfach umschlingen und  $\mathfrak{G}_0$  ganz überdecken (das Bild der Kreise  $|s| = \text{konst.} < 1$ ), die sich „quadratisch“ untereinander abbilden (jede Kurve geht auf eine weiter innen liegende unter Verdopplung des Umlaufes über) und dann auf eine Schar konzentrischer Kurven, die  $-1$  einfach umschlingen und  $\mathfrak{G}_0$  ganz überdecken (das Bild der Kreise, die orthogonal sind zu den Kreisen, die durch  $s = k$  laufen und zu  $|s| = 1$  senkrecht stehen), übergehen und so die Abbildung  $\sin z$  in  $\mathfrak{G}_0$  verdeutlichen.

In  $\mathfrak{G}_0$  gilt die Funktionalgleichung:

$$S(\sin z) = \frac{S^2(z) + k}{k S^2(z) + 1}.$$

12. Die Resultate bezüglich der Menge  $\mathfrak{F}$  lassen sich noch verallgemeinern: Die bei der Iteration jeder der Funktionen

$$\pm \sin z + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

entstehende Menge  $\mathfrak{F}$  ist identisch mit der bei der Iteration von  $\sin z$  entstehenden. Der Beweis folgt leicht aus der Kenntnis des folgenden, wegen

$$G_{2n}(z) = \kappa \varrho \sigma F_{2n}(z) + p, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$G_{2n+1}(z) = \kappa \lambda \varrho F_{2n+1}(z) + p, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

richtigen Satzes: Lassen sich zu der ganzen transzendenten Funktion  $F(z)$  fünf Konstanten  $p, \kappa, \lambda, \varrho$  und  $\sigma$  angeben, daß die Gleichungen

$$F(z + p) = \kappa F(z),$$

$$F(\kappa z) = \lambda F(z),$$

$$F(\kappa \lambda z) = F(z),$$

$$F(\varrho z) = \sigma F(z),$$

$$F(\varrho \sigma z) = F(z)$$

in der ganzen Ebene erfüllt sind, so ist die durch Iteration von  $F(z)$  entstehende Menge  $\mathfrak{F}$  identisch mit derjenigen Menge  $\mathfrak{F}$ , die bei der Iteration von

$$G(z) = \varrho F(z) + p$$

entsteht.

VI. Die Iteration von  $\cos z$ .

1. Vorweg sei bemerkt, daß die bei der Iteration von  $\cos z$  entstehende Menge  $\mathfrak{F}$  identisch ist mit der Menge  $\mathfrak{F}$ , die bei der Iteration einer jeden der Funktionen

$$\pm \cos z + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

entsteht (siehe V, 12).

Falls  $z = x + iy$  ( $x$  und  $y$  reell) gesetzt wird, ist:

$$F_1(z) = \cos z = \operatorname{Co}f y \cos x - i \operatorname{Si}n y \sin x.$$

Offenbar wird das in  $0 \leq x \leq 2\pi$  liegende Stück der Geraden  $y = k \neq 0$  auf die Ellipse

$$\frac{x'^2}{\operatorname{Co}f^2 k} + \frac{y'^2}{\operatorname{Si}n^2 k} = 1$$

abgebildet. Die Gleichung zeigt, daß  $z = 0$  stets das Zentrum der Ellipse, die Hauptachse (Richtung der reellen Achse) gleich  $\operatorname{Co}f k$  und die Nebenachse gleich  $|\operatorname{Si}n k|$  ist.

Es gibt genau einen reellen Wert  $f$ , der die Gleichung

$$f = \cos f$$

erfüllt; es ist  $0 < f < 1$  und  $|F_1(f)| < 1$ , d. h. der Fixpunkt  $f$  ist anziehend.

Es gibt eine reelle Zahl  $g > 0$ , die der Gleichung

$$\operatorname{Co}f 2g = 3$$

genügt;  $g$  erfüllt die Ungleichung:

$$0,88 < g < 0,89.$$

2. Da  $2 \operatorname{Co}f^2 k = \operatorname{Co}f 2k + 1$  und  $2 \operatorname{Si}n^2 k = \operatorname{Co}f 2k - 1$ , geht der Parallelstreifen, dessen Punkte  $z = x + iy$  durch  $|y| \leq g$  charakterisiert sind, durch  $F_1(z)$  auf die Ellipse  $\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$  (Inneres und Rand) über.

Die Gerade  $y = g$  besitzt mit der Ellipse  $\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$  genau einen Schnittpunkt mit negativem Realteil  $s < 0$ ; offenbar ist:  $s = -\sqrt{2(1-g^2)}$ .

Zunächst wird nun untersucht, wohin die Punktmenge  $s \leq x \leq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$  abgebildet wird; dabei wird verwendet, daß  $-\frac{\pi}{2} < s < 0$ . Jede im Rechteck  $s \leq x \leq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$  liegende, zur  $x$ -Achse parallel laufende Strecke  $y = k$  ( $0 < k \leq 1$ ) wird wegen  $x' = \operatorname{Co}f k \cos x$  und  $y' = -\operatorname{Si}n k \sin x$  schlicht auf einen Ellipsenbogen abgebildet, der, falls die im Rechteck liegende Strecke von ihrem rein imaginären Punkt aus durchlaufen wird, in der reellen Achse ansetzt, (bezüglich der ganzen Ellipse gesehen) positiv durchlaufen wird und dazu nur Punkte enthält, die im  $++$ -Quadranten liegen. Nach dieser Bemerkung ist klar, daß, falls gezeigt wird, daß die Punkte  $z = x + iy$  mit  $x = s$ ,  $0 \leq y \leq 1$  durch  $\cos z$  auf Punkte übergehen,

deren Imaginärteil kleiner als  $g$  ist, auch erwiesen ist, daß alle Punkte  $s \leq x \leq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$  auf Punkte  $z' = x' + iy'$  abgebildet werden, die in  $0 \leq y' \leq g$  liegen. Dies gilt aber, da die Funktion  $y' = -\sin y \sin s$  in  $0 \leq y \leq 1$  von 0 bis  $-\sin 1 \sin s < g$  monoton steigt.

Durch  $F_1(z)$  werden also alle Rechtecke, deren Punkte  $z = x + iy$ :  $|y| \leq 1$  und  $n\pi - |s| \leq x \leq n\pi + |s|$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) erfüllen, auf ein Gebiet abgebildet, das in der durch  $0 \leq |y| < g$  charakterisierten Menge liegt.

Nun ist klar, daß alle Punkte  $z = x + iy$ , die entweder  $|y| \leq 1$  und  $n\pi - |s| \leq x \leq n\pi + |s|$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) oder  $|y| \leq g$  erfüllen, eine gegenüber der Iteration von  $\cos z$  invariante Punktmenge darstellen. Alle inneren Punkte dieser Menge gehören somit zu  $\mathfrak{F}$ ; aber auch die Randpunkte gehören zu  $\mathfrak{F}$ , sind doch mindestens die Nachfolger zweiter Ordnung eines jeden Randpunktes im Innern von  $|y| \leq g$ , d. h. in  $\mathfrak{F}$ .

Das wieder etwas eingeschränkte Resultat dieses Abschnittes lautet also: Alle Punkte  $z = x + iy$  mit  $|y| \leq g$  gehören zu  $\mathfrak{F}$  und folglich zu dem zum anziehenden Fixpunkt  $f$  gehörenden Gebiet  $\mathfrak{G}$ , das natürlich auch einfach zusammenhängend ist.

3. Es ist:

$$|F'_1(z)|^2 = |\sin z|^2 = \cos^2 y \sin^2 x + \sin^2 y \cos^2 x.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und dem unter 2. Gesagten ist es nun ein Einfaches zu zeigen, daß in allen Punkten  $z$ , die nicht zu  $\mathfrak{G}$  gehören:  $|F'_1(z)|^2 > M > 1$  ist; und wie bereits bei der Iteration von  $\sin z$  durchgeführt, läßt sich auch beweisen: Es gibt keinen Punkt  $z_0$ , in dessen Umgebung die Folge der Iterierten von  $\cos z$  kompakt ist und dessen Nachfolger nicht in  $\mathfrak{G}$  ausmünden. [Verwendet wird die Tatsache, daß die Geraden  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) Vorgänger erster Ordnung der reellen Achse sind.] Hier fällt leicht auch ein weiteres Resultat ab: Die Menge  $\mathfrak{F}$  ist die Ableitung aller abstoßenden Fixpunkte.

4. Da die Geraden  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) neben  $y = 0$  die Gesamtheit aller Vorgänger erster Ordnung aller Punkte der reellen Achse darstellen, gilt also: Alle Vorgänger erster Ordnung aller Punkte der reellen Achse liegen in  $\mathfrak{G}$ ; hieraus läßt sich unter Betrachtung von  $F_{-1}(z)$ , der Inversen zu  $F_1(z)$ , sofort das Resultat herleiten: *Bei der Iteration von  $\cos z$  besteht die Menge  $\mathfrak{F}$  aus einem einzigen einfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathfrak{G}$ , dem Anziehungsgebiet des Fixpunktes  $f$ .*

Eine etwas bessere Vorstellung von  $\mathfrak{G}$ , als die bis jetzt vermittelte, erhält man, wenn man die Vorgänger erster Ordnung der Geraden  $x = n\pi$  (zu  $\mathfrak{G}$  gehörig)  $n = 0, \pm 1, \dots$ , aufsucht: Die Vorgänger der Geraden  $x = 0$

bestehen aus den Geraden  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ), und die Gesamtheit aller Vorgänger der Geraden  $x = n\pi$  ( $n = \pm 1, \dots$ ) erfüllen die Gleichung:

$$\cos y \cos x = n\pi, \quad (n = \pm 1, \dots).$$

Die Fig. 2 ist so zu lesen, daß alle gezeichneten Kurven zu  $\mathfrak{G}$  gehören.

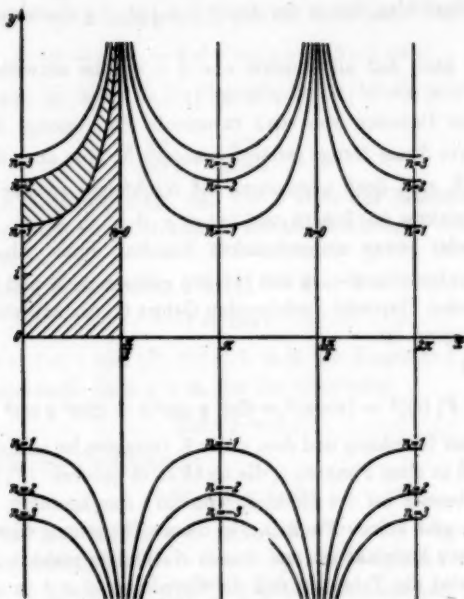


Fig. 2.

5. Die Menge  $\mathfrak{F}$  ist bezüglich der Geraden  $y = 0$  und  $x = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) symmetrisch, d. h. in  $y > 0$ ,  $0 < x < \pi$  befinden sich Punkte aus  $\mathfrak{F}$ , andernfalls es nirgendwo Punkte aus  $\mathfrak{F}$  gäbe; folglich gibt es auch Punkte aus  $\mathfrak{F}$  im in der Figur rechtschraffierten Gebiete, ebenso im linkschraffierten. Das rechtschraffierte Gebiet heiße ein Zipfel, ebenfalls das linkschraffierte und alle analogen; die Geraden  $y = 0$  und  $x = n\frac{\pi}{2}$  trennen also eine Reihe von Zipfelpaaren voneinander; jeder Zipfel reicht bis  $\infty$ .

Die z. B. im rechtschraffierten Zipfel liegende Menge aller Punkte aus  $\mathfrak{F}$  bildet ein Kontinuum. Also gilt allgemein: In jeden Zipfel ragt von  $\infty$  her ein Kontinuum hinein, welches die dort vorhandenen Punkte aus  $\mathfrak{F}$

darstellt. Selbstverständlich ist die Menge  $\mathfrak{F}$  wie auch  $\bar{\mathfrak{F}}$  gegen die Transformation  $z + n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) invariant.

6. Wie eine leichte Überlegung zeigt, gibt es unendlich viele abstoßende Fixpunkte erster Ordnung, und zwar ist der Multiplikator eines jeden nicht positiv; die Voraussetzungen des unter IV formulierten Satzes sind also gegeben. *Die Menge  $\mathfrak{F}$  ist in der Nähe jedes Fixpunktes entweder spiralg, oder aber ihre Struktur ist derart, daß der Fixpunkt von  $\bar{\mathfrak{F}}$  aus nicht erreichbar ist.*

## VII. Erweiterung des Resultats Fatous bezüglich $F(z) = e^z$ .

Sei  $F_1(z) = e^z$ . Der einzige im Endlichen gelegene Windungspunkt von  $F_{-1}(z)$ , der Inversen zu  $F_1(z)$ , liegt in  $z = 0$ .  $\lim_{v \rightarrow \infty} F_v(0) = \infty$ , d. h. es gibt bei der Iteration von  $e^z$  keine anziehenden Fixpunkte<sup>23</sup>).

Falls Gebiete  $\mathfrak{G}$ , existieren, so sind sie alle einfach zusammenhängend: Falls in einem  $\mathfrak{G}_0$  eine endliche Grenzfunktion existiert, ist dies klar, falls jedoch in einem  $\mathfrak{G}_0$  die einzige Grenzfunktion gleich  $\infty$  ist, so wird die Folge der  $g_v(z) = \frac{1}{F_v(z)}$  betrachtet.  $\mathfrak{F}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}$  sind gegen die Transformation  $z + 2n\pi i$  invariant ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ).

Jeder Punkt der reellen Achse gehört zu  $\mathfrak{F}$ . Angenommen,  $z_0$  der reellen Achse gehöre nicht zu  $\mathfrak{F}$ , sondern in  $|z - z_0| < R$  sei die Folge der  $F_v(z)$  kompakt, d. h. dort gilt:  $\lim_{v \rightarrow \infty} F_v(z) = \infty$ . Es existiert mindestens ein Punkt  $z^*$  von  $\mathfrak{F}$ . Sei  $\lg |z^*| = G$  (reell). Es gibt nun eine unendliche Folge  $v'$  der  $v$  ( $v' \geq 2$ ), daß für alle  $v'$ :  $|F_{v'}(z)| > e^G$  für alle  $|z - z_0| < R$ . Für die  $F_{v'-1}(z)$  gilt dann  $\Re\{F_{v'-1}(z)\} > G$  für alle  $|z - z_0| < R$ . Da nun unter den  $\left| \frac{dF_{v'-1}}{dz}(z_0) \right|$  beliebig große Werte vorkommen, so gibt es nach dem Satze von Bloch gewiß ein  $N$ , daß durch  $F_N(z)$  der Kreis  $|z - z_0| < R$  auf ein Gebiet abgebildet wird, das rechts von  $\Re\{z\} = G$  einen Kreis enthält, dessen Radius größer ist als  $\pi$ . Es gibt also rechts von der Geraden  $\Re\{z\} = G$  eine zur imaginären Achse parallele Gerade  $\Re\{z\} = G'$  ( $G' > G$ ), die ganz zu  $\bar{\mathfrak{F}}$  gehört. Der Kreis vom Radius  $e^{G'}$  gehört somit auch zu  $\bar{\mathfrak{F}}$ , ebenfalls sein gesamtes Inneres, also auch  $z^*$  (denn  $|z^*| = e^G < e^{G'}$ ); dies ist ein Widerspruch gegen die Annahme.

<sup>23</sup>) Falls ein anziehender Fixpunkt  $a$  existiert ( $|F'_1(a)| < 1$ ), so ist das zu ihm gehörende Gebiet  $\mathfrak{G}$  einfach zusammenhängend. In  $\mathfrak{G}$  befindet sich nun stets ein Windungspunkt  $z_0$  von  $F_{-1}(z)$  ( $\lim_{v \rightarrow \infty} F_v(z_0) = a$ ); wäre dies nämlich nicht der Fall, so wäre die auf  $\mathfrak{G}$  bezogene Funktion  $T(a)$  (siehe II, 1) eine reine Drehung um  $S(a) = 0$ , also:  $|F'_1(a)| = 1$ .

Es ist unmöglich, daß die Nachfolger eines Punktes  $z_0$ , in dessen Umgebung  $|z - z_0| < R$  die Folge der  $F_v(z)$  kompakt ist, der Ungleichung  $|z_v| \geq 1 + \delta$  ( $\delta > 0$ ) genügen ( $z_v = F_v(z_0)$ ,  $v > N$ ). Zunächst ist:

$$\frac{dF_n}{dz}(z_0) = z_1 z_2 \dots z_n.$$

Falls nun  $|z_1 z_2 \dots z_N| = k$ , so ist:  $\left| \frac{dF_n}{dz}(z_0) \right| \geq k(1 + \delta)^{n-N}$ . Nach dem Blochschen Satze gibt es somit ein  $M$ , daß  $F_M(z)$  den Kreis  $|z - z_0| < R$  auf ein Gebiet abbildet, welches einen Kreis vom Radius  $> \pi$  enthält. Es würde somit ein Stück einer Geraden  $y = n2\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) mit zu  $\mathfrak{F}$  gehören. Damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt.

Aus obigem Satze folgt insbesondere die Fatousche Feststellung, daß kein Gebiet  $\mathfrak{G}$  existiert, in dem  $\lim_{v \rightarrow \infty} F_v(z) = \infty$ <sup>23)</sup>. Darüber hinaus gilt:

*Gehört  $z_0$  zu  $\mathfrak{F}$ , so besitzt die Ableitung der Punktfolge  $z_v = F_v(z_0)$  mindestens einen Punkt  $z^*$  mit  $|z^*| \leq 1$ .<sup>24)</sup>*

<sup>23)</sup> Siehe Acta mathematica 47 (1926), S. 370.

<sup>24)</sup> Haselen, Sur l'itération de  $\log(1+z)$ , Enseignement math. 30 (1931), bringt ein Resultat bezüglich der Iteration von  $\log(1+z)$  bzw.  $e^z - 1$ . Bezüglich der letzten Funktion läßt sich nach Kenntnis der Ausführungen dieser Arbeit leicht sagen:  $\Re\{z\} < 0$  ist ein invariantes Gebiet, das überdies, da der einzige Windungspunkt von  $\log(1+z)$  in ihm liegt, das vollständig invariante Gebiet  $\mathfrak{G}$  bestimmt. Außer den Punkten  $n2\pi i$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) gehören alle rein imaginären Punkte zu  $\mathfrak{G}$ . In  $\mathfrak{G}$  ist  $\lim_{v \rightarrow \infty} F_v(z) = 0$ . Die Menge  $\mathfrak{F}$  besteht aus der halben reellen Achse mit  $\Re\{z\} \geq 0$  (Beweis analog zum entsprechenden Beweis bei der Iteration von  $e^z$ ), ihren sämtlichen Vorgängern und der Ableitung dieser Punktmenge.

(Eingegangen am 5. 2. 1939.)

# Über die $\zeta$ -Funktion einfacher hyperkomplexer Systeme.

Von

Bruno Schoeneberg in Hamburg.

$\mathfrak{A}$  sei ein einfaches System vom Grade  $g$  über seinem Zentrum  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{O}$  eine Maximalordnung aus  $\mathfrak{A}$ . Ferner bezeichne  $|a|$  ein ganzes Rechtsideal aus  $\mathfrak{O}$  und  $N|a|$  die Restklassenzahl mod.  $|a|$ . Dann ist die  $\zeta$ -Funktion von  $\mathfrak{O}$  durch

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{|a| \subseteq \mathfrak{O}} \frac{1}{N|a|^s},$$

wo über alle ganzen, von Null verschiedenen Rechtsideale aus  $\mathfrak{O}$  summiert wird, definiert. Frl. Hey hat gezeigt<sup>1)</sup>, wie sich  $\zeta(s)$  aus der Dedekindschen  $\zeta$ -Funktion  $\zeta_{\mathfrak{Z}}(s)$  des Zentrums  $\mathfrak{Z}$  von  $\mathfrak{A}$  und aus dem Verzweigungsverhalten der Primideale von  $\mathfrak{Z}$  in  $\mathfrak{O}$  berechnen läßt. Ihrem Beweis liegt die Artinsche Begründung der Arithmetik hyperkomplexer Zahlen<sup>2)</sup> zugrunde. Im folgenden soll die von Herrn Hasse gegebene Begründung<sup>3)</sup> für die Herleitung des Heyschen Ergebnisses herangezogen werden. Der Beweis wird dadurch, wie mir scheint, durchsichtiger.

Um die Konvergenz der Reihe (1) kümmern wir uns zunächst nicht. Sie wird sich zum Schluß ohne weiteres aus ihrer Darstellung durch die  $\zeta$ -Funktion des Zentrums und elementare Funktionen ergeben.

Sei nun  $\mathfrak{p}$  ein Primideal aus  $\mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{p}}$  die  $\mathfrak{p}$ -adische Erweiterung von  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$  dasjenige einfache System, das aus  $\mathfrak{A}$  entsteht, wenn man den Koeffizientenkörper  $\mathfrak{Z}$  von  $\mathfrak{A}$  zu  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{p}}$  erweitert.  $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$  sei die  $\mathfrak{p}$ -adische Grenzmenge von  $\mathfrak{O}$ , d. h. die Menge aller  $\mathfrak{p}$ -adischen Grenzwerte  $\mathfrak{p}$ -adisch konvergenter Folgen von Elementen aus  $\mathfrak{O}$ , und entsprechend sei  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$  die  $\mathfrak{p}$ -adische Grenzmenge von  $\mathfrak{a}$ . Nach Hasse ist dann  $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$  Maximalordnung in  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$  und  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$  Rechtsideal in bezug auf  $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ , wenn  $\mathfrak{a}$  ein solches in bezug auf  $\mathfrak{O}$  ist. Weiter gilt (Hasse, a. a. O., Satz 66, 67): Jedes Rechtsideal  $\mathfrak{a}$  in bezug auf eine Maximalordnung  $\mathfrak{O}$  von  $\mathfrak{A}$  ist der Durchschnitt von  $\mathfrak{A}$  und allen  $\mathfrak{a}$  zugeordneten  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ . Dabei sind nur endlich viele  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ . Man nennt  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$  die  $\mathfrak{p}$ -Komponente

<sup>1)</sup> K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Dissertation (Hamburg 1929).

<sup>2)</sup> E. Artin, Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Abb. Math. Sem. Hamburg 5 (1927).

<sup>3)</sup> H. Hasse, Über  $\mathfrak{p}$ -adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlssysteme, Math. Annalen 104 (1931), S. 495.

von  $a$ . Umgekehrt gibt es bei festem  $\mathfrak{O}$  zu jedem vorgegebenen System von  $\mathfrak{O}_p$ -Rechtsidealen  $a^{(p)}$ , wo nur endlich viele  $a^{(p)} \neq \mathfrak{O}_p$ , ein Rechtsideal  $a$  in bezug auf  $\mathfrak{O}$ , dessen  $p$ -Komponente  $a_p$  gerade das vorgegebene  $a^{(p)}$  ist. Die Darstellung  $|a| = [a_p, \dots, a_{p_r}, \mathfrak{A}]$  als Durchschnitt von endlich vielen  $a_{p_i} \neq \mathfrak{O}_{p_i}$  mit  $\mathfrak{A}$  ist also in beiden Richtungen möglich und eindeutig. Setzen wir noch den Durchschnitt  $[a_{p_i}, \mathfrak{A}] = a(p_i)$ , so ist  $a(p)$  ein  $\mathfrak{O}$ -Rechtsideal, für das nur die  $p$ -Komponente mit diesem  $p$  von  $\mathfrak{O}_p$  verschieden ist. Dann gilt  $|a| = [a(p_1), \dots, a(p_r)]$ .

Von jetzt seien alle auftretenden Ideale in ihrer Maximalordnung enthalten. Zunächst beweisen wir: Die  $\zeta$ -Funktion von  $\mathfrak{O}$  ist gleich dem Produkt der für alle  $p \in \mathfrak{P}$  gebildeten  $\zeta$ -Funktionen von  $\mathfrak{O}_p$ . Dazu beachten wir, daß für den größten gemeinsamen Teiler von  $a(p_i)$  und  $a(p_j)$  bei  $p_i \neq p_j$  die Gleichung  $(a(p_i), a(p_j)) = \mathfrak{O}$  besteht. Man erkennt das sofort, wenn man zu den  $p$ -adischen Grenzmengen übergeht. Daraus folgt  $\alpha_i + \alpha_j = 1$  mit geeigneten  $\alpha_i \subset a(p_i)$ ,  $\alpha_j \subset a(p_j)$  und weiter  $N[a(p_i), a(p_j)] = N a(p_i) N a(p_j)$ . Allgemein gilt dann:

$$N[a(p_1), \dots, a(p_r)] = N a(p_1) \dots N a(p_r).$$

Damit erhalten wir die Gleichung

$$(2) \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathfrak{P}} \sum_{a(p) \subset \mathfrak{O}} \frac{1}{N a(p)^s}.$$

Nun ist aber die Restklassenanzahl von  $\mathfrak{O} \bmod a(p)$  gleich der von  $\mathfrak{O}_p \bmod a_p$ . Denn einerseits ist  $N_{\mathfrak{O}} a(p) \leq N_{\mathfrak{O}_p} a_p$ , wie man durch Übergang zu den Grenzmengen erkennt, und andererseits  $N_{\mathfrak{O}_p} a_p \leq N_{\mathfrak{O}} a(p)$ , da  $\bmod a_p$  jedes Element aus  $\mathfrak{O}_p$  einem Element aus  $\mathfrak{O}$  kongruent ist. Damit ist

$$\sum_{a(p) \subset \mathfrak{O}} \frac{1}{N a(p)^s} = \sum_{a_p \subset \mathfrak{O}_p} \frac{1}{N a_p^s}.$$

Aus (2) folgt also

$$(3) \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathfrak{P}} \zeta_{\mathfrak{O}_p}(s).$$

Zur Berechnung von  $\zeta_{\mathfrak{O}_p}(s)$  beachten wir, daß  $\mathfrak{A}_p$  voller Matrizenring von einem Grade  $k_p$  über einem Schiefkörper  $\mathfrak{S}_p$  ist. Der Grad von  $\mathfrak{S}_p$  über  $\mathfrak{Z}_p$  sei  $n_p$ . Dann besteht die Gleichung

$$n_p k_p = g.$$

Das Primideal  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{Z}_p$  wird in der Maximalordnung  $\mathfrak{o}_p$  von  $\mathfrak{S}_p$  die  $n_p$ -te Potenz des einzigen Primideals  $\wp \subset \mathfrak{o}_p$ ,

$$\mathfrak{p} = \wp^{n_p}.$$

$\wp$  ist Hauptideal,  $\wp = (\pi)$ , und es gilt

$$N_{\mathfrak{o}_p}(\wp) = N_{\mathfrak{Z}_p}(\mathfrak{p})^{n_p}.$$

Verzweigungsordnung und Restklassengrad von  $\mathfrak{S}_p$  über  $\mathfrak{S}$ , stimmen also überein.  $n_p > 1$  ist nur der Fall, wenn  $p$  in  $\mathfrak{D}$  zerfällt.  $p$  ist die  $n_p$ -te Potenz eines Primideals aus  $\mathfrak{D}$ , dessen  $(n_p - 1)$ -te Potenz die genaue Potenz ist, die in der Differente von  $\mathfrak{D}$  aufgeht. In  $\mathfrak{o}_p$  sind alle Ideale zweiseitig und von der Form  $(\pi^r)$ . Beim Übergang zu  $\mathfrak{D}_p$  bleibt  $(\pi)$  Primideal. In  $\mathfrak{D}_p$  erhält man eine Maximalordnung durch die Gesamtheit der Matrizen  $k_p$ -ten Grades mit Elementen aus  $\mathfrak{o}_p$ . Die übrigen Maximalordnungen entstehen aus dieser durch einen inneren Automorphismus. Daraus folgt, daß die  $\zeta$ -Funktion in  $\mathfrak{D}_p$  und wegen (3) auch die  $\zeta$ -Funktion in  $\mathfrak{D}$  nicht von der Auswahl der Maximalordnung abhängen. Wir wählen daher  $\mathfrak{D}_p$  als die eben genannte spezielle Maximalordnung. Hier wird jedes Rechtsideal  $\mathfrak{a}_p$  von einem Element

$$\alpha = \begin{pmatrix} \pi^{v_1}, & 0, & \dots, & 0 \\ a_{21}, & \pi^{v_2}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \dots, & \pi^{v_k} \end{pmatrix}$$

mit  $a_{ik} \in \mathfrak{o}_p$  erzeugt. Die Norm von  $\mathfrak{a}_p$  in  $\mathfrak{D}_p$  ist also bei  $k = k_p$

$$N_{\mathfrak{D}_p} \mathfrak{a}_p = \prod_{i=1}^k (N_{\mathfrak{o}_p} (\pi^{v_i}))^k$$

oder, wegen  $N_{\mathfrak{o}_p} (\pi^r) = (N_{\mathfrak{o}_p} (\pi))^r$ ,

$$(4) \quad N_{\mathfrak{D}_p} \mathfrak{a}_p = (N_{\mathfrak{o}_p} (\pi))^{(v_1 + \dots + v_k) k}$$

Wählt man nun die  $a_{ik}$  aus einem festen Restsystem mod.  $\pi^{v_i}$ , so gibt es in  $\mathfrak{a}_p$  genau eine auf diese Weise normierte erzeugende Matrix. Die Anzahl der normierten Matrizen ist demnach bei festen Diagonalelementen  $\pi^{v_i}$  gleich  $N_{\mathfrak{o}_p} (\pi)^{0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + (k-1) v_k}$ . Damit hat sich nach (4) folgende Gleichung ergeben:

$$\zeta_{\mathfrak{D}_p}(s) = \sum_{\mathfrak{a}_p \subset \mathfrak{D}_p} \frac{1}{N_{\mathfrak{D}_p} \mathfrak{a}_p^s} = \sum_{v_1, \dots, v_k=0}^{\infty} \frac{N_{\mathfrak{o}_p} (\pi)^{0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + (k-1) v_k}}{N_{\mathfrak{o}_p} (\pi)^{(v_1 + \dots + v_k) k s}}.$$

Wegen  $N_{\mathfrak{D}_p} (\pi) = N_{\mathfrak{S}_p} (p)^{n_p}$  und  $N_{\mathfrak{S}_p} (p) = N_{\mathfrak{S}} (p)$  ist bei  $n = n_p$

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathfrak{D}_p}(s) &= \sum_{v_1, \dots, v_k=0}^{\infty} \frac{N_{\mathfrak{S}} (p)^{(0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + (k-1) v_k) n}}{N_{\mathfrak{S}} (p)^{(v_1 + \dots + v_k) n k s}} \\ &= \frac{1}{1 - N_{\mathfrak{S}} (p)^{-n_p k_p s}} \frac{1}{1 - N_{\mathfrak{S}} (p)^{-n_p (k_p s - 1)}} \dots \frac{1}{1 - N_{\mathfrak{S}} (p)^{-n_p (k_p s - (k_p - 1))}}. \end{aligned}$$

Hier ist für alle  $p$  mit Ausnahme der Differententeiler  $n_p = 1$  und  $k_p = g$ . Setzen wir daher zunächst immer  $n_p = 1$  und bringen dann erst zur Korrektur

den Faktor an, der von den Differententeilern kommt, so erhalten wir aus (3) für  $\zeta(s)$  die Darstellung

$$(5) \quad \zeta(s) = \prod_{i=1}^g \zeta_3(gs - (i-1)) \prod_p \frac{\prod_{i=1}^g (1 - N_3(p)^{-(gs - (i-1))})}{\prod_{i=1}^g (1 - N_3(p)^{-(gs - (n_p(i-1))})}$$

durch die Dedekindsche  $\zeta$ -Funktion des Zentrums und elementare, von der Differenten herrührende Faktoren. Für reelles  $s > 1$  handelt es sich hier um ein endliches Produkt von konvergenten Reihen mit positiven Gliedern. Daraus folgt die Konvergenz von  $\zeta(s)$ , wie man sieht, wenn man den eingeschlagenen Weg rückwärts geht.

Im Falle der verallgemeinerten Quaternionen über dem Körper der rationalen Zahlen wird (5) zu

$$(5a) \quad \zeta(s) = \zeta_R(2s) \zeta_R(2s-1) \prod_{p|A} \left(1 - \frac{1}{p^{2s-1}}\right).$$

Dabei ist  $\zeta_R(s)$  die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion und  $A$  die Diskriminante der Maximalordnung.  $N|a)$  ist hier das Quadrat einer ganzen rationalen Zahl — im allgemeinen Fall, wie man aus (5) sieht, die  $g$ -te Potenz. Setzen wir  $N|a) = n|a)^2$  mit  $n|a) = A > 0$ , so besagt (5a), daß die Anzahl der Lösungen von  $n|a) = A$  für jedes natürliche  $A$  gleich der Summe der positiven, zu  $A$  teilerfremden Teiler am  $A$  ist. Unter der Voraussetzung, daß die Klassenzahl 1 ist, erhalten wir so die Anzahl der wesentlich verschiedenen Darstellungen einer natürlichen Zahl durch den Betrag einer quadratischen Form in vier Veränderlichen, die als Normenform der Maximalordnung zugeordnet ist.

(Eingegangen am 12. 9. 1938.)

# Über die Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen und den Zusammenhang der Singularitäten.

Von

H. Behnke in Münster (Westf.).

In einer Arbeit: Sulla distribuzione delle singolarità delle funzioni di due variabili complesse [Atti 1. congr. Uni. Mat. Ital. S. 183—186 (1938)] beweist R. Caccioppoli, daß, wenn bei einer überall eindeutigen Funktion  $f(w, z)$  der Rand des Regularitätsbereiches ausschließlich von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten gebildet wird, die eine zweimal differentiiertbare Darstellung gestatten, der Rand zusammenhängend ist. Dieser Satz gilt auch ohne die obigen strengen Voraussetzungen und läßt sich auch in seiner allgemeinen Form mit den heutigen Mitteln einfach beweisen. Lediglich die Klärung einiger ganz allgemeiner Begriffe und Sätze — betreffend die nicht-schlichten Bereiche über dem Raume der  $z_1, \dots, z_n$  — macht Mühe. Da er eine allgemeine Aussage über die topologische Struktur der Regularitätsbereiche betrifft, möge dieser Beweis hier folgen. Wir zeigen zunächst:

**Satz 1.** *Ist die Funktion  $f(w, z)$  endlichblättrig, so ist die Gesamtheit ihrer singulären Punkte zusammenhängend.*

Zunächst die nötigen Erläuterungen zu diesem Satze! Wir führen diese sogleich für die Funktionen von  $n$  komplexen Veränderlichen aus, da wir den vorstehenden Satz später entsprechend ausdehnen. Wie ganz allgemein üblich in der heutigen Literatur, schließen wir den Raum der komplexen  $z_1, \dots, z_n$  projektiv ab. Würden wir den Raum nach den einzelnen Veränderlichen getrennt abschließen (siehe Weierstraß und Osgood; Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, S. 56), so wird Satz 1, wie schon R. Caccioppoli bemerkt, falsch. Z. B. hat der Regularitätsbereich von

$$f(w, z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

dann keinen zusammenhängenden Rand, da  $(\infty, 1)$  und  $(\infty, 2)$  hier verschiedene Punkte sind. In diesem Falle müßte der Sachverhalt des Satzes 1 komplizierter ausgedrückt werden.

Ein Bereich  $\mathfrak{B}$  über dem projektiv abgeschlossenen Raume der  $z_1, \dots, z_n$  heißt *endlichblättrig*, wenn bei Vorgabe irgendeines Grundbereiches  $\mathfrak{G}$  im

<sup>1)</sup> Siehe H. Behnke und P. Thullen, Erg. d. Math. u. i. Grenzgebiete 3, 3 (ferner abgekürzt: B.-T., Bericht) S. 7.

schlichten  $z_1, \dots, z_n$ -Raum es zu jedem abgeschlossenen, ganz im Innern von  $\mathfrak{G}$  gelegenen Teilbereich  $\mathfrak{G}^*$  eine natürliche Zahl  $M(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$  gibt, so daß von  $M+1$  Punkten des Bereiches  $\mathfrak{B}$ , die über  $\mathfrak{G}^*$  gelegen sind, mindestens zwei durch ein Kurvenstück verbindbar sind, dessen Grundpunkte sämtlich in  $\mathfrak{G}$  liegen<sup>2)</sup>. Eine Funktion heißt entsprechend endlichblättrig, wenn es ihr Regularitätsbereich ist.

Ein endlichblättriger Bereich wird im Gegensatz zu einem unendlichblättrigen Bereich durch Hinzunahme seiner erreichbaren Randpunkte abgeschlossen. Dabei soll eine unendliche Folge  $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$  von Punkten eines Bereiches  $\mathfrak{B}$  über dem projektiv abgeschlossenen Raume der  $z_1, \dots, z_n$  die Darstellung eines *erreichbaren Randpunktes*  $R$  von  $\mathfrak{B}$  genannt werden, falls<sup>3)</sup>

1. die  $P_m$  sich in  $\mathfrak{B}$  nicht häufen,
2. die Folge der zugehörigen Grundpunkte  $\underline{P}_m$  gegen einen Grundpunkt  $\underline{R}$  konvergiert,
3. es zu jeder Umgebung  $\underline{U}(\underline{R})$  von  $\underline{R}$  ein  $m_0$  gibt, so daß je zwei Punkte  $P_{m_1}$  und  $P_{m_2}$  mit  $m_1, m_2 > m_0$  in  $\mathfrak{B}$  durch ein Kurvenstück verbindbar sind, dessen Grundpunkte ganz in  $\underline{U}(\underline{R})$  liegen.

Entsprechend sagen wir, daß die Folgen  $P_1, P_2, \dots$  und  $Q_1, Q_2, \dots$  denselben Randpunkt darstellen, wenn

1.  $\lim \underline{P}_m = \lim \underline{Q}_k = \underline{R}$ ,
2. es zu jeder Umgebung  $\underline{U}(\underline{R})$  ein  $l_0$  gibt, so daß für  $m, k > l_0$  die Punkte  $P_m$  und  $Q_k$  durch ein Kurvenstück in  $\mathfrak{B}$  verbindbar sind, dessen Grundpunkte ganz in  $\underline{U}(\underline{R})$  liegen.

Von den nicht-erreichbaren Randpunkten sind im folgenden Beweise des Satzes 1 nicht störend jene, die vom Typus der nicht-erreichbaren Randpunkte sind, welche in *schlichten* Bereichen der  $z$ -Ebene auftreten und für diese Bereiche ausführlich in den grundlegenden Arbeiten von C. Carathéodory untersucht wurden<sup>4)</sup>. Störend aber sind die Randpunkte, die durch Überlagerung von unendlich vielen Blättern übereinander entstehen. (Z. B. auf der Fläche von  $\log z$  der Randpunkt, der durch die Gesamtheit der dem

<sup>2)</sup> Gemäß dieser Definition gibt es also schon schlichte Bereiche, die nicht endlichblättrig sind, z. B. der Bereich, der aus dem Quadrat  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  entsteht, wenn die „Stacheln“  $x = \frac{1}{n}, 0 < y < \frac{1}{2}, n = 1, 2, \dots$  herausgenommen werden. Andererseits ist der Bereich mit dem Verzweigungspunkt der Ordnung Unendlich im Nullpunkt und den Kreisen  $|z| < \frac{1}{n}$  als Blättern ein endlichblättriger Bereich.

<sup>3)</sup> B.-T., Bericht S. 13.

<sup>4)</sup> C. Carathéodory, Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Innern einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis, und Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Annalen 73 (1913), S. 365 bzw. 323.

Grundpunkte 1 überlagerten Punkte definiert wird.) Da aber die Unterscheidung dieser beiden Typen *nicht-erreichbarer* Randpunkte im Falle beliebiger Bereiche (insbesondere schon der allgemeinen Riemannschen Flächen) begrifflich schwerfällig ist, wollen wir durch unsere Voraussetzung alle Bereiche mit nicht-erreichbaren Randpunkten ausschließen.

In unseren Vorbemerkungen zeigen wir noch:

I. Ein endlichblättriger Bereich  $\mathfrak{B}$  wird durch Hinzunahme seiner erreichbaren Randpunkte abgeschlossen. Es sei  $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$  eine beliebige Folge von Punkten aus  $\mathfrak{B}$ . Die Grundpunkte der  $P_m$  mögen als Häufungspunkt insbesondere einen Punkt  $P_0$  aufweisen.  $P_1^*, P_2^*, \dots$  sei dann eine solche unendliche Teilfolge der  $P_m$ , daß die Grundpunkte  $P_m^*$  der  $P_m^*$  gegen  $P_0$  konvergieren.  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$  sei eine unendliche Folge von Umgebungen von  $P_0$ , so daß  $\mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}_{m+1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , und die  $\mathcal{U}_m$  sich auf  $P_0$  zusammenziehen. Aus den  $P_m^*$  greifen wir nun eine solche unendliche Teilfolge  $P_m^{(1)}$  heraus, daß die Punkte  $P_m^{(1)}$  dieser Teilfolge alle in  $\mathfrak{B}$  über  $\mathcal{U}_1$  miteinander verbindbar sind. Es sei  $Q_1 = P_1^{(1)}$ .  $P_m^{(2)}$ ,  $m = 2, 3, \dots$  sei weiter eine solche unendliche Teilfolge der  $P_m^{(1)}$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , so daß die  $P_m^{(2)}$  alle über  $\mathcal{U}_2$  in  $\mathfrak{B}$  miteinander verbindbar sind. Es sei  $Q_2 = P_2^{(2)}$  usw. Die Folge der  $Q_1, Q_2, \dots$  definiert dann einen erreichbaren Randpunkt von  $\mathfrak{B}$ . Also hat jede unendliche Folge von Punkten aus  $\mathfrak{B}$  eine konvergente Teilfolge.

Eine Folge erreichbarer Randpunkte  $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots$  heißt gegen  $R = \lim P_m$  konvergent, wenn 1. im abgeschlossenen Raume der Grundpunkte  $\lim R^{(v)} = R$  und 2. für eine Darstellung  $P_m^{(v)}$  der  $R^{(v)}$  gilt: Zu jeder Umgebung  $\mathcal{U}(R)$  gibt es ein  $v_0$ , so daß die  $P_m^{(v)}$  für  $v > v_0$  und  $m > m(v)$  alle in  $\mathfrak{B}$  allein schon über  $\mathcal{U}(R)$  miteinander verbindbar sind.

Die Konvergenz einer Folge von erreichbaren Randpunkten ist unabhängig von der Darstellung der Randpunkte.

Es weist auch jede Folge von erreichbaren Randpunkten eine konvergente Teilfolge auf. Zunächst können wir nämlich aus der Folge von Randpunkten eine Teilfolge  $R^{(v)}$  herausgreifen, deren Grundpunkte gegen den Punkt  $R$  konvergieren.  $P_m^{(v)}$  seien die gegebenen Darstellungen der  $R^{(v)}$ .  $\mathcal{U}_v(R)$  sei eine Folge gegen  $R$  konvergierender Umgebungen mit  $\mathcal{U}_v(R) \supset \mathcal{U}_{v+1}(R)$ ,  $R^{(v-1)}$ .  $Q_k = P_{m(k)}^{(k)}$  sei für jedes  $k = 1, 2, \dots$  aus der Folge der  $P_m^{(k)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , so gewählt, daß alle  $P_m^{(k)}$  mit  $m \geq m(k)$  über  $\mathcal{U}_{k+1}(R)$  liegen und in  $\mathcal{U}_k(R)$  mit  $P_{m(k)}^{(k)}$  verbindbar sind. Die  $Q_k$  liegen also in  $\mathfrak{B}$ . So weist die Folge der  $Q_v$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , eine konvergente Teilfolge  $Q_{\mu}$  auf. Zu einer beliebig herausgegriffenen Umgebung  $\mathcal{U}(R)$  gibt es also ein  $\mu_0$ , so daß über  $\mathcal{U}(R)$  die  $Q_{\nu}$  mit  $\nu > \mu_0$  in  $\mathfrak{B}$  miteinander verbindbar sind. Für  $\mu > \mu_1$  liegen die  $\mathcal{U}_{\mu}(R)$  in  $\mathcal{U}(R)$ ; also sind die  $Q_{\mu}$ ,  $\mu \geq \mu_2$ ,  $\mu_2 = \text{Max}(\mu_0 + 1, \mu_1 + 1)$ , mit allen

$P_m^{(v_n)}$ ,  $\mu \geq \mu_2$  und  $m > m(v_n)$ , über  $\underline{U}(R)$  verbindbar. Die  $R^{(v_n)}$  konvergieren gegen  $R = \lim Q_{v_n}$ .

II. Ein unendlichblättriger Bereich  $\mathfrak{C}$  weist stets nicht-erreichbare Randpunkte auf. Laut Definition gibt es zu  $\mathfrak{C}$  einen Grundbereich  $\mathfrak{G}$  und einen abgeschlossenen, ganz in  $\mathfrak{G}$  gelegenen, gleichfalls schlichten Bereich  $\mathfrak{G}^*$ , so daß von der unendlichen Folge  $P_1, P_2, \dots$  von Punkten auf  $\mathfrak{C}$  und über  $\mathfrak{G}^*$  keine zwei durch Kurven auf  $\mathfrak{C}$  verbindbar sind, deren Grundpunkte sämtlich in  $\mathfrak{G}$  liegen. Keine Teilfolge der  $P_1, P_2, \dots$  konvergiert in  $\mathfrak{C}$  oder definiert einen erreichbaren Randpunkt. Denn wenn schon für eine Teilfolge  $P_1^*, P_2^*, \dots$  die Bedingung  $\lim \frac{P_i^*}{r_i} = \frac{P_0^*}{r_0}$  erfüllt sein mag, so sind doch die  $P_i^*$  über  $\underline{U}(P_0^*)$ , falls nur  $\underline{U}$  so klein gewählt ist, daß es in  $\mathfrak{G}^*$  liegt, nicht miteinander verbindbar.

Insbesondere folgt also, daß Satz 1 äquivalent ist mit

**Satz 1 a.** Weist der Regularitätsbereich der ein- oder mehrdeutigen Funktion  $f(w, z)$  nur erreichbare Randpunkte auf, so ist die Gesamtheit der singulären Stellen von  $f(w, z)$  zusammenhängend.

Der Rand eines Bereiches  $\mathfrak{B}$  (die singulären Stellen einer Funktion  $f(w, z)$ ) heißt zusammenhängend, wenn bei jeder Zerlegung des Randes in zwei Teilmengen,  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$ , mindestens ein Punkt von  $\mathfrak{M}_1$  Häufungspunkt der  $\mathfrak{M}_2$  oder mindestens ein Punkt von  $\mathfrak{M}_2$  Häufungspunkt der  $\mathfrak{M}_1$  ist.

1. Angenommen nun, Satz 1 wäre nicht richtig. Dann zerfällt die Menge der Randpunkte von  $f(w, z)$  in zwei abgeschlossene Teilmengen  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$ , die keinen Punkt gemeinsam haben. Die im Bereiche zwischen Punkten von  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  verlaufenden Strecken (man beachte, daß alle Verzweigungsstellen gemäß der Definition des Bereiches über dem Raume der  $z_1, z_2, \dots, z_n$  zu den Randpunkten zu zählen sind und es deshalb sicher solche Verbindungsstrecken gibt) haben Längen, deren untere Grenze  $d > 0$  sei. Wegen der Abgeschlossenheit des Bereiches gibt es einen Punkt  $R_1$  auf  $\mathfrak{M}_1$  und einen Punkt  $R_2$  auf  $\mathfrak{M}_2$ , so daß eine in  $\mathfrak{B}$  verlaufende Verbindungsstrecke von  $R_1$  nach  $R_2$  die Länge  $d$  hat. Andererseits gibt es ein  $N > 0$ , so daß für alle Punkte von  $\mathfrak{M}_1$ , für deren Koordinaten  $|w|^2 + |z|^2 \geq N^2$ , die Verbindungsstrecken zu Punkten von  $\mathfrak{M}_2$  eine Länge  $\geq 2d$  haben und Entsprechendes auch bei Vertauschung von  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  gilt.

Wäre die Aussage nicht richtig, so gäbe es also eine Folge  $R_k$  mit den Koordinaten  $(w_k, z_k)$  auf  $\mathfrak{M}_1$  und eine zugeordnete Folge  $R'_k (w'_k, z'_k)$  auf  $\mathfrak{M}_2$ , so daß

$$L(R_k, R'_k) < 2d$$

und

$$|w_k|^2 + |z_k|^2 \rightarrow \infty,$$

$L(R, R^*)$  die Länge der Verbindungsstrecken zwischen  $R$  und  $R^*$ . Dann konvergieren aber die  $R_k$  und die  $R'_k$  gegen denselben unendlich fernen Punkt. Es ist nämlich:

$$\frac{w'_k}{z'_k} = \frac{w_k + \Delta_k}{z_k + \Delta'_k} = \frac{w_k}{z_k + \Delta'_k} + \frac{\Delta_k}{z_k + \Delta'_k},$$

wobei

$$\Delta_k = w'_k - w_k, \quad \Delta'_k = z'_k - z_k \quad \text{und} \quad |\Delta_k|, |\Delta'_k| < 2d.$$

Daraus folgt in jedem Falle:  $\lim \frac{w'_k}{z'_k} = \lim \frac{w_k}{z_k}$  und das bedeutet, daß die unendlich fernen Punkte  $R_1 = \lim R(w_k, z_k)$  und  $R_2 = \lim R'(w'_k, z'_k)$  zusammenfallen entgegen unserer Annahme.

2. Wir bilden nun den *Durchschnitt* des Regularitätsbereiches  $\mathfrak{B}$  mit der Hyperkugel  $\mathfrak{R}_{N_1}$  um  $0(0, 0)$  und dem Radius  $N_1$ . Dieser Durchschnitt kann in getrennte Bereiche zerfallen. Aus diesem Grunde wählen wir  $N_1 > N$  so groß, daß alle über  $\mathfrak{R}_N$  liegenden Punkte von  $\mathfrak{B}$  über  $\mathfrak{R}_{N_1}$  in  $\mathfrak{B}$  miteinander verbindbar sind, und mindestens  $N_1 = 3N$ .  $\mathfrak{B}^*$  sei nun derjenige Bereich unter den Bereichen, die bei der Durchschnittsbildung von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{R}_{N_1}$  entstehen, welcher alle Punkte von  $\mathfrak{B}$  über  $\mathfrak{R}_N$  enthält.  $\mathfrak{B}^*$  ist ein Regularitätsbereich<sup>5)</sup>. Jeder Teilbereich  $\mathfrak{T}$  von  $\mathfrak{B}^*$ , dessen Grundbereich  $\mathfrak{T}$  ganz im Innern von  $\mathfrak{R}_{N_1}$  liegt, ist endlichblättrig, denn es ist

$$M_{\mathfrak{B}^*}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*) \leq M_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$$

bei jeder Wahl von  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}_{N_1}$ .

Der Bereich  $\mathfrak{B}^*$  hat über dem Inneren von  $\mathfrak{R}_{N_1}$  nur solche Randpunkte, die entweder zu  $\mathfrak{M}_1$  oder  $\mathfrak{M}_2$  gehören. Auf Grund von 1 gibt es in  $\mathfrak{B}^*$  und zwar schon über  $\mathfrak{R}_N$  zwischen  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  eine Verbindungsstrecke der Länge  $d$ .

3. Für  $\mathfrak{B}^*$  gilt der Heine-Borelsche Überdeckungssatz. Ist  $\mathfrak{N}$  eine abgeschlossene Punktmenge ganz im Innern von  $\mathfrak{B}^*$  und ist jedem Punkte  $P$  von  $\mathfrak{N}$  eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P)$  aus  $\mathfrak{B}^*$  zugeordnet, so gibt es endlich viele Punkte  $P_1, \dots, P_s$  in  $\mathfrak{N}$ , so daß  $\mathfrak{U}(P_1), \dots, \mathfrak{U}(P_s)$  ganz  $\mathfrak{N}$  überdecken.

Zum Beweis beachten wir zunächst, daß die Menge  $\mathfrak{N}$  einen Mindestabstand  $d^* > 0$  vom Rande von  $\mathfrak{B}^*$  hat. Ist  $\underline{S}$  ein Punkt des Grundraumes und  $A$  ein Punkt von  $\mathfrak{N}$  über der Hyperkugel  $\underline{\mathfrak{Q}}$  mit dem Radius  $d^*/8$  um  $\underline{S}$ , so gehört eine  $A$  umfassende Hyperkugel  $\mathfrak{Q}_1$  mit dem Radius  $\frac{d^*}{2}$  und einem Mittelpunkt über  $\underline{S}$  ganz zu  $\mathfrak{B}^*$ , denn alle diese Punkte sind um weniger als  $d^*$  von  $A$  entfernt. Die Anzahl solcher sich nicht schneidender Hyperkugeln in  $\mathfrak{B}^*$  mit Mittelpunkt über  $\underline{\mathfrak{Q}}$ , die ganz zu  $\mathfrak{B}^*$  gehören, ist beschränkt, denn sie sind ja alle über  $2\underline{\mathfrak{Q}}$  nicht miteinander verbindbar. So ist ihre Anzahl

<sup>5)</sup> Siehe B.-T., Bericht S. 74.

kleiner als  $M(2\varrho, \varrho)$ , wo  $2\varrho$  die zu  $\varrho$  konzentrische Kugel mit doppeltem Radius ist. Der Heine-Borelsche Überdeckungssatz ist aber richtig für jede abgeschlossene Punktmenge von  $\mathfrak{R}$ , die in einer der abgeschlossenen Hyperkugeln  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots, \mathfrak{U}_p$  liegt; also ist er auch richtig für die abgeschlossene Teilmenge von  $\mathfrak{R}$ , die über  $\varrho$  liegt. Nunmehr setzen wir den Beweis in üblicher Weise an. Wir umgeben  $\mathfrak{B}^*$  mit einem Hyperwürfel  $\mathfrak{H}$ . Wäre der Satz in  $\mathfrak{B}^*$ ; also auch über  $\mathfrak{H}$  für  $\mathfrak{R}$  falsch, so gilt gleiches für einen Teilhyperwürfel  $\mathfrak{H}_1$  mit halber Seitenlänge usw. Die ineinander liegende Folge der Teilhyperwürfel  $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1, \dots$  konvergiert gegen einen Punkt  $S$ . Sobald die Teilwürfel so klein sind, daß sie in  $\varrho$  liegen, haben wir einen Widerspruch. Der Heine-Borelsche Überdeckungssatz ist bewiesen.

4. Da  $\mathfrak{B}^*$  ein beschränkter Regularitätsbereich ist, gibt es zu jedem Punkte  $P$  aus  $\mathfrak{B}^*$ , der eine Randdistanz kleiner  $\alpha$  hat, eine in  $\mathfrak{B}^*$  reguläre Funktion  $g_\alpha(w, z)$ , die in allen Punkten aus  $\mathfrak{B}^*$ , die eine Randdistanz größer  $\alpha$  haben, dem Absolutbetrag nach kleiner als in  $P$  ist. Die Menge  $\mathfrak{G}$  der Punkte aus  $\mathfrak{B}^*$  mit einer Randdistanz gleich  $\frac{d}{8}$  \*) ist abgeschlossen und beschränkt. Zu jedem Punkte  $R$  von  $\mathfrak{G}$  gibt es eine Hyperkugel  $\mathfrak{R}(R)$  um  $R$  und eine Funktion  $g_R(w, z)$ , so daß  $|g_R(w, z)|$  in  $\mathfrak{R}(R)$  größer als in allen Punkten von  $\mathfrak{B}^*$  mit einer Randdistanz  $\geq \frac{d}{4}$ . Wir können nun endlich viele Punkte  $R_1, \dots, R_s$  von  $\mathfrak{G}$  wählen, so daß durch:

$$(1) \quad |g_{R_j}(w, z)| < |g_{R_j}(R_j)| \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

ein Bereich  $\mathfrak{C}$  definiert wird, der alle Punkte aus  $\mathfrak{B}^*$  mit einer Randdistanz  $\geq \frac{d}{4}$  umfaßt und keine Punkte aus  $\mathfrak{B}^*$  mit einer Randdistanz  $< \frac{d}{8}$ . Wir setzen noch

$$g_{R_j}^*(w, z) = \frac{g_{R_j}(w, z)}{|g_{R_j}(R_j)|}.$$

Dann ist der Bereich  $\mathfrak{C}$  darzustellen durch:

$$(2) \quad |g_{R_j}^*(w, z)| < 1.$$

Jeder Randpunkt  $S$  von  $\mathfrak{C}$  ist nun nicht mehr als  $\frac{d}{4}$  von einem Randpunkt von  $\mathfrak{B}^*$  entfernt. So zerfallen die Randpunkte von  $\mathfrak{C}$ , für die  $|w|^2 + |z|^2 < N^2$ , in zwei getrennte Mengen  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$ . Hat  $S$  eine Distanz  $\leq \frac{d}{4}$  von  $\mathfrak{M}_1$ , so notwendig eine Distanz größer  $\frac{1}{2}d$  von  $\mathfrak{M}_2$ . In diesem Falle rechnet  $S$  zu  $\mathfrak{M}_1^*$ ; im umgekehrten Falle zu  $\mathfrak{M}_2^*$ . Auch kann weder  $\mathfrak{M}_1^*$  noch  $\mathfrak{M}_2^*$  leer sein, denn schon die ganz in  $\mathfrak{B}^*$  verlaufende Verbindungsstrecke von  $R_1$  nach  $R_2$  (siehe Punkt 1 des Beweises) schneidet zweimal den Rand von  $\mathfrak{C}$  und deshalb  $\mathfrak{M}_1^*$  wie  $\mathfrak{M}_2^*$ . Es gibt zwischen Punkten von  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$  ganz in  $\mathfrak{C}$  verlaufende

\*)  $d$  die im Teil 1. dieses Beweises definierte Zahl.

Verbindungsstücke, die kürzer als  $d$  sind, nämlich etwa die von  $\mathbb{C}$  herausgeschnittenen Teile der Strecken  $(R_k, R'_k)$  für genügend große  $k$ . Andererseits sind Verbindungsstrecken zwischen  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$ , wenn für den Anfangs- oder mindestens den Endpunkt  $|w|^2 + |z|^2 \geq N^2$ , sicher länger als  $2d - 2\frac{d}{4} = \frac{3d}{2}$ .  $a$  sei das Minimum aller möglichen Verbindungsstrecken von  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$  in  $\mathbb{C}$ . Dann gibt es konvergente Folgen  $R_k^{(1)}$  von  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $R_k^{(2)}$  von  $\mathfrak{M}_2^*$ , so daß

$$\begin{aligned}\lim L(R_k^{(1)}, R_k^{(2)}) &= a, \\ \lim R_k^{(1)} &= R_0^{(1)} \text{ auf } \mathfrak{M}_1^*, \\ \lim R_k^{(2)} &= R_0^{(2)} \text{ auf } \mathfrak{M}_2^*\end{aligned}$$

und  $R_0^{(1)}$  wie  $R_0^{(2)}$  in  $|w|^2 + |z|^2 \leq N^2$ .

Für die in  $\mathbb{C}$  verlaufende Strecke von  $R_0^{(1)}$  nach  $R_0^{(2)}$  ist also

$$L(R_0^{(1)}, R_0^{(2)}) = a.$$

Durch  $R_0^{(1)}$  läuft eine analytische Fläche  $\mathfrak{F}_1$ :

$$(3) \quad g_1^{**}(w, z) = 1.$$

$g_1^{**}(w, z) = e^{i\varphi} g_{R_1^*}^*(w, z)$ , wo  $g_{R_1^*}^*(w, z)$  eine der in (2) vorkommenden Funktionen ist, also in ganz  $\mathfrak{B}^*$  regulär ist.  $\mathfrak{F}_1$  dringt nicht in  $\mathbb{C}$  ein. Entsprechendes gilt für  $R_0^{(2)}$  und die analytische Fläche  $\mathfrak{F}_2$ :

$$(4) \quad g_2^{**}(w, z) = 1.$$

5. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir nun annehmen, daß in bezug auf  $R_0^{(1)}(w^{(1)}, z^{(1)})$  und  $R_0^{(2)}(w^{(2)}, z^{(2)})$  gilt

$$z^{(1)} = z^{(2)} = z_0.$$

Die Auflösungen von (3) und (4) in einer genügend kleinen Umgebung von  $R_0^{(1)}$  bzw. von  $R_0^{(2)}$  nach  $z$  ergeben

$$w = f_1(z), \quad w = f_2(z),$$

wo  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$  (eventuell mehrdeutige) analytische Funktionen sind, die sich in  $z_0$  algebraisch verhalten.

Da  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  in den Bereich  $\mathbb{C}$  nicht eindringen, muß  $|f_1(z) - f_2(z)|$  in einer Umgebung von  $z = z_0$ , welcher der durch  $w^{(1)}$  laufenden Zweige von  $f_1(z)$  und der durch  $w^{(2)}$  laufenden Zweige von  $f_2(z)$  auch gewählt wird, größer oder gleich  $a$  sein, während

$$|f_1(z_0) - f_2(z_0)| = a$$

ist. Da es zu  $f_1(z) - f_2(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  eine ortsuniformisierende Veränderliche gibt, ist dies nicht möglich, es sei denn  $|f_1(z) - f_2(z)| \equiv a$ .

In diesem Falle können  $w = f_1(z)$  und  $w = f_2(z)$  den Rand von  $\mathbb{C}$  nicht verlassen, denn sonst kämen zwischen  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$  kleinere Differenzen als  $a$

vor. Da der Rand von  $\mathfrak{C}$  ganz in  $\mathfrak{B}^*$  liegt, können die zu  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$  gehörigen impliziten Funktionen nicht singular werden. So bleibt, wie wir auch mit den Schnitten  $z = \text{const}$  weiterrücken, immer

$$|f_1(z) - f_2(z)| \equiv a.$$

Infolgedessen kämen auch für solche  $z$  noch Distanzen  $a < d$  zwischen  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$  vor, wo für mindestens einen der zugehörigen Randpunkte  $|w|^2 + |z|^2 > N^2$ . Das widerspricht den Ausführungen unter 2. Also ist auch dieser Ausnahmefall ausgeschlossen. Eine Minimaldistanz zwischen  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$  kann nicht auftreten. Das müßte aber nach 4. der Fall sein, wenn  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  eine Minimaldistanz hätten. Also folgt nach den Bemerkungen unmittelbar unter Satz 1a, daß der Rand von  $\mathfrak{B}$  zusammenhängend ist.

Nun zu den Bereichen über dem Raume von  $n \geq 2$  komplexen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ! Hier können wir nicht den Zusammenhang des Randes durch Schnitte des Bereiches mit analytischen „Ebenen“ von vier Dimensionen nachweisen (es sei denn richtig, daß diese Schnitte auch immer endlichblättrig sind). Es gilt jedoch wieder:

**Satz 1b.** *Ist die Funktion  $f(z_1, \dots, z_n)$  endlichblättrig, so ist die Gesamtheit ihrer singulären Punkte zusammenhängend.*

Wir müssen zunächst beginnen wie beim Beweise von Satz 1. Wir bilden wieder die Bereiche  $\mathfrak{B}^*$  durch Schnitt von  $\mathfrak{B}$  mit der Hyperkugel

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = N_1^2$$

und den Bereich  $\mathfrak{C}$ , der von den Hyperflächen

$$|g_{R_j}(z_1, z_2, \dots, z_n)| < |g_{R_j}(R_j)|, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

berandet wird.  $a$  sei wieder die Minimalentfernung zwischen  $\mathfrak{M}_1^*$  und  $\mathfrak{M}_2^*$ . Sie komme vor bei der Verbindung der Randpunkte

$$R_0^{(1)}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}) \quad \text{und} \quad R_0^{(2)}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen:

$$z_k^{(1)} = z_k^{(2)} \quad \text{für} \quad k = 2, \dots, n.$$

Nunmehr bilden wir den Schnitt  $z_3 = z_3^{(1)}, z_4 = z_4^{(1)}, \dots, z_n = z_n^{(1)}$  mit  $\mathfrak{C}$  und betrachten die Schnittkomponente, in der die Verbindungsstrecke zwischen  $R_0^{(1)}$  und  $R_0^{(2)}$  liegt. (Wir lassen also offen, ob vielleicht dieser Schnitt mehrere getrennte vierdimensionale Bereiche liefert.) Es folgt jetzt nach den Überlegungen in 5, daß es außerhalb  $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |a_3|^2 + \dots + |a_n|^2 \leq N^2$  auch noch Randpunkte von  $\mathfrak{M}_1^*$  (bzw.  $\mathfrak{M}_2^*$ ) gibt, die zu Punkten von  $\mathfrak{M}_2^*$  (bzw.  $\mathfrak{M}_1^*$ ) Verbindungsstrecken aufweisen mit einer Länge  $a < d$ . Gleiches gilt erst recht für  $\mathfrak{C}$  selbst, und das widerspricht der Definition von  $N$ . Die Annahme, der Rand von  $\mathfrak{B}$  sei nicht zusammenhängend, führt notwendig zu einem Widerspruch.

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes 1b ist der

**Satz 2.** *Ist die endlichblättrige Funktion  $f(z_1, \dots, z_n)$  regulär und eindeutig auf einer geschlossenen, über dem  $z_1, \dots, z_n$ -Raume gelegenen  $(2n-1)$ -dimensionalen Fläche  $\mathfrak{F}$ , nachdem in einem Punkte  $P$  von  $\mathfrak{F}$  eines der in diesem Punkte zugelassenen Funktionselemente von  $f$  gewählt ist, läßt sich ferner  $f$  nicht von einer Seite von  $\mathfrak{F}$  zur anderen ohne Überschneidung der nun auf  $\mathfrak{F}$  eindeutig festgelegten Funktionselemente fortsetzen, so ist  $f$  nach einer Seite von  $\mathfrak{F}$  unbeschränkt fortsetzbar.*

In diesem Falle ist nämlich  $\mathfrak{F}$  eine Überlagerungsmannigfaltigkeit einer geschlossenen  $(2n-1)$ -dimensionalen Fläche  $\mathfrak{F}^*$ , die ganz im Regularitätsbereich von  $f$  gelegen ist und ihn in zwei Teile zerlegt, so daß wegen des Zusammenhangs des Randes unseres Regularitätsbereiches in einem Teile  $f$  überall regulär sein muß.

Der bekannte Satz von Hartogs und Osgood: „Ist die Funktion  $f(z_1, \dots, z_n)$  in sämtlichen Randpunkten eines schlichten, beschränkten Bereiches  $\mathfrak{B}$  mit zusammenhängendem Rande regulär und eindeutig, so läßt sich  $f$  ins ganze Innere von  $\mathfrak{B}$  hinein regulär und analytisch fortsetzen“, läßt sich also ergänzen durch einen Sonderfall des Satzes 2<sup>7)</sup>:

**Satz 2a.** *Ist die schlichte Funktion  $f(z_1, \dots, z_n)$  in sämtlichen Randpunkten eines schlichten Bereiches  $\mathfrak{B}$  regulär, so läßt sich  $f$  in alle bis auf höchstens einen der zusammenhängenden Teilbereiche fortsetzen, in die der abgeschlossene Raum durch den Rand von  $\mathfrak{B}$  zerlegt wird.*

Die Teilbereiche, in die der abgeschlossene Raum durch  $\mathfrak{B}$  zerlegt wird, seien  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ .

Dann ist die vorgegebene Funktion  $f(z_1, \dots, z_n)$  auf Grund von Satz 2 überall im Innern von  $\mathfrak{B}_1$  oder überall im Äußern von  $\mathfrak{B}_1$  regulär. Trifft dies für das Äußere zu, so sind wir fertig. Andernfalls ist aber  $f$  nicht nur im Innern von  $\mathfrak{B}_1$ , sondern wieder wegen Satz 2 im Innern von  $\mathfrak{B}_2$  regulär. usw. Für  $n=1$  sind die vorstehenden Sätze natürlich alle ungültig.

<sup>7)</sup> Siehe auch F. Sommer, Bereiche ohne geschlossene innere Singularitätsmannigfaltigkeiten, Math. Annalen 114 (1937).

(Eingegangen am 30. 5. 1939.)

# Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Wei-Liang Chow in Shanghai (China).

C. Carathéodory hat bei seiner Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik<sup>1)</sup> den folgenden Satz über eine Pfaffsche Gleichung bewiesen: *Wenn eine Pfaffsche Gleichung in jedem Punkte die Eigenschaft hat, daß es in jeder Umgebung von ihm Punkte gibt, die sich nicht durch eine Integralkurve der Gleichung mit ihm verbinden lassen, dann ist die Gleichung vollständig integrierbar.* Dabei ist unter einer Integralkurve einer Pfaffschen Gleichung  $\sum_{j=1}^n \alpha_j(x_1, \dots, x_n) dx_j = 0$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve<sup>2)</sup>  $x_j(t)$  zu verstehen, deren jedes stetig differenzierbare Stück (auch in den Endpunkten) der Gleichung  $\sum_{j=1}^n \alpha_j(x_1(t), \dots, x_n(t)) \frac{dx_j}{dt} = 0$  genügt. Diesen Satz, den Carathéodory durch eine geometrische Konstruktion der Integralhyperflächen bewiesen hat, werden wir nun in einer ganz anderen Weise beweisen und gleichzeitig auf Systeme von Pfaffschen Gleichungen verallgemeinern. Unsere Methode besteht darin, daß wir zuerst in bekannter Weise das Pfaffsche System auf ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen und dann die von einem Punkte aus durch einen aus den Charakteristiken dieser Differentialgleichungen zusammengesetzten Wege erreichbaren Punkte untersuchen. Dabei stellt es sich heraus, daß dieselben Betrachtungen uns auch die Mittel in die Hand geben, einen neuen Aufbau der Integrationstheorie der Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu gewinnen, der dem üblichen in vielen Hinsichten vorzuziehen ist. Während nämlich die übliche Theorie für ein vollständiges System von den Koeffizienten und den Lösungen nur einmalige stetige Differenzierbarkeit voraussetzt, fordert die Heranziehung der Klammerausdrücke bei den nichtvollständigen Systemen viel mehr. Erstens muß wenigstens genügend oftmalige Differenzierbarkeit von den

<sup>1)</sup> Math. Annalen 67 (1909), S. 369.

<sup>2)</sup> Eine Funktion heißt stetig differenzierbar, wenn sie stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Eine Kurve  $x_j(t)$  heißt stetig differenzierbar, wenn die Funktionen  $x_j(t)$  so sind. Eine Kurve heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn sie stetig und aus endlich vielen stetig differenzierbaren (abgeschlossenen) Kurvenstücken zusammengesetzt ist.

Koeffizienten vorausgesetzt werden, so daß die herangezogenen Klammerausdrücke überhaupt sinnvoll sind; zweitens müssen die Lösungsfunktionen selbst als zweimal stetig differenzierbar angenommen werden, damit die herangezogenen Klammerausdrücke auch diese Funktionen als Lösungen besitzen. Indem wir nun in unserer Theorie statt der Klammerausdrücke eine Art Umformungsausdruck verwenden, können wir auch bei den nicht-vollständigen Systemen mit der Voraussetzung der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit sowohl bei den Koeffizienten wie bei den Lösungen auskommen. Daß diese Voraussetzung der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit selbst im Falle einer einzigen Gleichung nicht ohne weiteres zu unterlassen ist, hat O. Perron durch lehrreiche Beispiele gezeigt<sup>2)</sup>.

Es sei  $Xf = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$  ein linearer Differentialoperator. Sind die Funktionen  $\beta_j(x)$  in der Umgebung eines Punktes  $a = (a_1, \dots, a_n)$  stetig differenzierbar<sup>2)</sup>, dann kann bekanntlich aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgendes behauptet werden: Das System von Differentialgleichungen  $\frac{dx_j}{dt} = \beta_j(x)$  definiert in der Umgebung von  $a$  eine eingliedrige Gruppe (genauer Gruppenkeim) von stetig differenzierbaren Transformationen

$$T(t): x_j' = g_j(x_1, \dots, x_n, t) = g_j(x, t)$$

mit  $g_j(x, 0) = x_j$ . Die Differenzierbarkeitsbedingung bedeutet genauer:  $g_j(x_1, \dots, x_n, t)$  sind stetig differenzierbare Funktionen von  $x_1, \dots, x_n$  und  $t$  in der Umgebung von  $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, t = 0$ . Der Operator  $Xf$  ist also die erzeugende infinitesimale Transformation einer eingliedrigen Gruppe von stetig differenzierbaren Transformationen  $T(t)$ . Diese Eigenschaft von  $Xf$  ist nun invariant gegenüber beliebigen stetig differenzierbaren Transformationen in der Umgebung von  $a$ , während die stetige Differenzierbarkeit der Koeffizienten  $\beta_j(x)$  dabei verlorengehen kann. In anderen Worten, die stetige Differenzierbarkeit der Transformationsgruppen, aber nicht die der infinitesimalen Transformationen, hat eine geometrische Bedeutung bei *Zugrundelegung der Gruppe aller stetig differenzierbaren Transformationen*. Da wir uns im folgenden auf diesen geometrischen Standpunkt stellen und nur mit geometrisch invarianten Begriffen operieren wollen, so werden wir statt der infinitesimalen Transformation  $Xf$  vielmehr die dadurch erzeugte Transformationsgruppe  $T(t)$  als Hauptgegenstand unserer Betrachtung stellen, und werden daher von der stetigen Differenzierbarkeit der infinitesimalen Transformationen keinen Gebrauch machen. In der Tat brauchen die infinitesimalen Transformationen der nach unserem später anzugebenden Verfahren konstruierten vollständigen Erweiterung eines gegebenen Systems keineswegs

<sup>2)</sup> O. Perron, Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 549.

stetig differenzierbar zu sein, auch wenn diese Eigenschaft dem gegebenen System zukommt.

Eine in der Umgebung von  $a$  stetig differenzierbare Funktion  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  heißt ein Integral von  $Xf$ , wenn sie der Gleichung  $X\varphi = \sum \beta_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$  genügt. Die Funktion  $\varphi(x)$  ist bekanntlich genau dann ein Integral von  $Xf$ , wenn sie eine Invariante der durch  $Xf$  erzeugten Transformationsgruppe  $T(t)$  ist, d. h.  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(g_1(x, t), \dots, g_n(x, t))$  für alle  $x_1, \dots, x_n, t$  in der Umgebung von  $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, t = 0$ .

Der Punkt  $a$  heißt regulär für  $Xf$ , wenn nicht alle  $\beta_i(a)$  gleich Null sind, sonst heißt er singulär. In einem regulären Punkte hat  $Xf$  ein System von  $n-1$  Integralen  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  mit der Eigenschaft, daß die Matrix  $\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|$  in  $a$  den Rang  $n-1$  hat. Alle Integrale lassen sich dann in der Form  $F(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$  darstellen, wo  $F(y_1, \dots, y_{n-1})$  in der Umgebung von  $\varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-1}(a)$  stetig differenzierbar ist. Ein solches System von Integralen heißt ein Hauptssystem. In der Tat, wenn etwa  $\beta_1(a) \neq 0$  ist, so kann man die Gleichung  $g_1(x, t) = a_1$  nach  $t$  lösen, etwa  $t = h(x)$ . Dann bilden  $\varphi_1(x) = g_2(x, h(x)), \dots, \varphi_{n-1}(x) = g_n(x, h(x))$  ein Hauptssystem von Integralen, und zwar ist  $\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_a \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n$ ). Durch die Transformation  $y_1 = h(x), y_2 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_{n-1}(x)$  wird dann  $Xf$  auf die Gestalt  $\frac{\partial f}{\partial y_1}$  reduziert, die die Gruppe der Translationen in Richtung der  $y_1$ -Achse erzeugt.

Ein lineares Differentialgleichungssystem  $B_r$

$$X_i f = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

hat den Rang  $r$  im Punkte  $a$ , wenn die Matrix  $\|\beta_{ij}(x)\|$  in der Umgebung von  $a$  den Rang  $r$  hat. Dabei braucht die  $\|\beta_{ij}(x)\|$  aber nicht in  $a$  selbst den Rang  $r$  zu haben. Ein Punkt  $p$  heißt regulär für  $B_r$ , wenn  $\|\beta_{ij}(x)\|$  in  $p$  den Rang  $r$  hat, anderenfalls heißt der Punkt singulär. Unsere Definition bedeutet also nur, daß es in jeder Umgebung von  $a$  reguläre Punkte von  $B_r$  gibt. Ein Differentialoperator  $X_0 f = \sum \beta_{0i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$  heißt von  $B_r$  abhängig, wenn die Matrix  $\|\beta_{ij}(x)\|$  ( $i = 0, 1, \dots, r; j = 1, \dots, n$ ) in der Umgebung von  $a$  den Rang  $r$  hat. Zwei Differentialgleichungssysteme  $B_r$  heißen äquivalent, wenn die Operatoren  $X_i f$  jedes Systems von dem anderen System abhängig sind. Ein gemeinsames Integral von den  $X_1 f, \dots, X_r f$  heißt ein Integral von  $B_r$ .  $n-r$  Integrale  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-r}(x)$  bilden ein Hauptsystem von Integralen von  $B_r$ , wenn die Matrix  $\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|$  den Rang  $n-r$  hat und jedes Integral von  $B_r$  sich in der Form  $F(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r})$  darstellen

läßt, wobei  $F(y_1, \dots, y_{n-r})$  eine stetig differenzierbare Funktion ist. Man überzeugt sich leicht, daß äquivalente Systeme dieselben Integrale haben.

Die den  $X_i f$  entsprechenden stetig differenzierbaren Gruppen von Transformationen seien mit  $T_i(t)$  bezeichnet. Wir betrachten nun die Umformung von  $T_i(t)$  durch  $T_j(\tau)$ , also die Transformationen  $T_j(\tau) T_i(t) T_j(-\tau)$ , die für jedes feste  $\tau$  wieder eine eingliedrige Gruppe bilden, die mit der Gruppe  $T_i(t)$  ähnlich ist. Da die Transformationen  $T_1(t), \dots, T_r(t)$  alle stetig differenzierbar sind, so sind die Transformationen  $T_j(\tau) T_i(t) T_j(-\tau)$  auch alle stetig differenzierbar. Daraus folgt, daß die Gruppe  $T_j(\tau) T_i(t) T_j(-\tau)$  eine erzeugende infinitesimale Transformation besitzt, die wir mit  $T_j(\tau) X_i T_j(-\tau)$  bezeichnen werden. Ist in der Tat die Transformation  $T_j(\tau)$  durch die Gleichungen  $x'_j = g_j(x, \tau)$  gegeben, so ist

$$(T_j(\tau) X_i T_j(-\tau))f = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \beta_{il}(x) \frac{\partial g_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

wobei  $x_j = g_j(x', -\tau)$  in den Koeffizienten  $\sum_{l=1}^n \beta_{il}(x) \frac{\partial g_k}{\partial x_l}$  einzusetzen sind.

Das System  $B_r$  heißt nun vollständig, wenn für alle  $i, j$  die Differentialoperatoren  $T_j(\tau) X_i T_j(-\tau)$  für alle genügend kleinen Werte von  $\tau$  von  $B_r$  abhängig sind. Ist das System  $B_r$  nicht vollständig, dann kann man es immer durch wiederholte Hinzunahme eines geeigneten „Klammerausdrucks“  $T_j(\tau) X_i T_j(-\tau)$  zu einem vollständigen System  $B_s$  vom Range  $s$  im Punkte  $a$  erweitern. Da ein Integral von  $B_r$  gegenüber den Transformationen  $T_1(t), \dots, T_r(t)$  invariant bleibt, so bleibt es auch invariant gegenüber den Transformationen von  $B_s$ , woraus folgt, daß es auch ein Integral von  $B_s$  ist. Die Systeme  $B_r$  und  $B_s$  haben also dieselben Integrale. Die Zahl  $s - r$  nennen wir den Index von  $B_r$ .

**Satz A.** Ein vollständiges System  $B_s$  besitzt in der Umgebung eines regulären Punktes  $a$  ein Hauptsystem von Integralen  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-s}(x)$  (und zwar mit  $\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{x=a} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n-s$ ;  $j = s+1, \dots, n$ ), wenn  $|\beta_{ij}(a)| \neq 0$  ( $i, j = 1, \dots, s$ ) ist). Jeder Punkt der durch  $a$  gehenden Integralmannigfaltigkeit  $\varphi_1(x) = \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-s}(x) = \varphi_{n-s}(a)$  läßt sich durch einen aus den Bahnkurven von  $B_s$  zusammengesetzten Weg mit  $a$  verbinden.

**Beweis durch Induktion.** Der Satz gilt offenbar für eine Differentialgleichung. Wir nehmen also an, daß der Satz für  $B_{s-1}$  schon bewiesen ist, und werden ihn nun für  $B_s$  beweisen. Wie wir oben schon erwähnt haben, können wir durch eine Koordinatentransformation eine von den infinitesimalen Transformationen, etwa  $X_1 f$ , in die Form  $X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$  bringen. Die Transformationen  $T_1(t)$  sind dann Translationen in Richtung der  $x_1$ -Achse. Daraus folgt, daß jedes Integral von  $B_s$  eine Funktion von  $x_2, \dots, x_n$ , aber

nicht von  $x_1$  ist. Da die Matrix  $\|\beta_{ij}(a)\|$  den Rang  $s$  hat und  $\beta_{12}(a) = \beta_{13}(a) = \dots = \beta_{1n}(a) = 0$  sind, so muß für jedes  $i \neq 1$  mindestens ein  $\beta_{ij}(a) \neq 0$  mit  $j \neq 1$  sein. Das bedeutet, daß jede  $X_i f$  ( $i \neq 1$ ) mindestens ein Integral  $\psi_i(x)$  mit  $\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}\right)_{x=a_1} \neq 0$  besitzt. Durch die Transformation

$$U_i: (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\psi_i(x) - \psi_i(a) + a_1, x_2, \dots, x_n),$$

die jedem Punkte eine Verrückung in Richtung der  $x_1$ -Achse erteilt, werden die Transformationen  $T_i(t)$  auf die zur  $x_1$ -Achse senkrecht stehenden Hyper-ebenen „projiziert“. Die infinitesimale Transformation  $U_i X_i U_i^{-1}$  der trans-

formierten Gruppe  $T_i(t) = U_i T_i(t) U_i^{-1}$  sei mit  $X'_i f = \sum_{j=1}^n \beta'_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$  bezeichnet.

Es sind dann offenbar  $\beta'_{21}(x) = \beta'_{31}(x) = \dots = \beta'_{s1}(x) = 0$ . Der Einfachheit der Bezeichnungen wegen setzen wir auch  $X'_1 f = \sum \beta'_{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j} = X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ .

Wir behaupten nun, daß die  $s$  infinitesimalen Transformationen  $X'_1 f, X'_2 f, \dots, X'_s f$  ein System  $B'_s$  vom Range  $s$  bilden, das mit dem System  $B_s$  äquivalent ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß die Umformung einer  $X_i f$  durch eine Transformation  $U: (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\psi(x), x_2, \dots, x_n)$ , die jedem Punkte eine Verrückung in Richtung der  $x_1$ -Achse erteilt, eine infinitesimale

Transformation  $(U X_i U^{-1}) f = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$  ergibt, die von dem System  $B_s$  abhängig ist. Denn es ist für jeden festen Punkt  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}(c) \frac{\partial f}{\partial x_j} &= (\beta_{i1}(c'_1, c'_2, \dots, c'_n) \frac{\partial \psi(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)}{\partial c'_1}) \\ &+ \sum_{j=2}^n \beta_{ij}(c'_1, c'_2, \dots, c'_n) \frac{\partial \psi(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)}{\partial c'_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &+ \sum_{j=2}^n \beta_{ij}(c'_1, c'_2, \dots, c'_n) \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= (\beta_{i1}(c'_1, c'_2, \dots, c'_n) \frac{\partial \psi(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)}{\partial c'_1} - \beta_{i1}(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)) \\ &+ \sum_{j=2}^n \beta_{ij}(c'_1, c'_2, \dots, c'_n) \frac{\partial \psi(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)}{\partial c'_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &+ (T_1(c_1 - c'_1) X_1 T_1(c_1 - c'_1)) f, \end{aligned}$$

wobei überall  $c'_i = \psi^{-1}(c)$  einzusetzen ist. Da das System  $B_s$  vollständig ist, so ist  $T_1(c_1 - c'_1) X_1 T_1(c_1 - c'_1)$  und folglich auch  $U X_i U^{-1}$  für jeden Punkt  $c$  von  $B_s$  abhängig, woraus folgt, daß  $U X_i U^{-1}$  überhaupt von  $B_s$  abhängig ist. Die infinitesimalen Transformationen  $X'_1 f, X'_2 f, \dots, X'_s f$  sind

also alle von dem System  $B_s$  abhängig. Daß sie ein System vom Range  $s$  bilden, folgt daraus, daß die Matrix

$$\|\beta'_{ij}(a)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{22}(a) & \dots & \beta_{2n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_{s2}(a) & \dots & \beta_{sn}(a) \end{vmatrix}$$

denselben Rang wie die Matrix

$$\|\beta_{ij}(a)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21}(a) & \beta_{22}(a) & \dots & \beta_{2n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{s1}(a) & \beta_{s2}(a) & \dots & \beta_{sn}(a) \end{vmatrix},$$

also den Rang  $s$  hat. Daraus folgt, wie man sich leicht überzeugt, daß das System  $B'_s$  mit dem System  $B_s$  äquivalent ist.

Das System  $B'_s$  ist auch vollständig. Denn die Umformung von  $X'_i/f$  durch  $T'_j(\tau)$  ergibt eine infinitesimale Transformation

$$T'_j(\tau) X'_i T'_j(-\tau) = U_j T_j(\tau) U_j^{-1} U_i X_i U_i^{-1} U_j T_j(-\tau) U_j^{-1},$$

die aus  $X_i/f$  durch sukzessive Umformungen durch  $U_j^{-1} U_i T_j(\tau) U_j$  entsteht. Da jede dieser Umformungen eine von  $B_s$  abhängige infinitesimale Transformation in eine solche überführt, so ist  $T'_j(\tau) X'_i T'_j(-\tau)$  von  $B_s$ , folglich auch von  $B'_s$ , abhängig. Die infinitesimalen Transformationen  $X'_2/f, \dots, X'_s/f$  bilden nun auch für sich ein vollständiges System  $B'_{s-1}$ . Denn die Transformationen  $T'_j(\tau) T'_i(t) T'_j(-\tau)$ , und folglich auch die infinitesimalen Transformationen  $T'_j(\tau) X'_i T'_j(-\tau)$ , haben für  $i \neq 1$  überhaupt keine Komponente in Richtung der  $x_1$ -Achse, d. h.  $T'_j(\tau) X'_i T'_j(-\tau)$  ist schon von  $X'_2/f, \dots, X'_s/f$  allein abhängig. Damit ist auch gezeigt, daß die Umformung von  $B'_{s-1}$  durch  $T'_1(\tau) = T_1(t)$  ein äquivalentes System ergibt. Mit anderen Worten,  $B'_{s-1}$  ist bis auf Äquivalenz gegenüber den Translationen in Richtung der  $x_1$ -Achse invariant. Da nun  $x_1$  in dem System  $B'_{s-1}$  offenbar die Rolle eines Parameters spielt, so können wir  $x_1$  gleich einem festen Wert, etwa  $x_1 = a_1$  setzen, und bekommen dann ein System  $B''_{s-1}$  in den  $n-1$  Veränderlichen  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Jedes Integral  $\varphi(x_2, \dots, x_n)$  von  $B''_{s-1}$  ist nun wegen der soeben erwähnten Invarianzeigenschaft von  $B'_{s-1}$  ein Integral von  $B'_{s-1}$  und, da es  $x_1$  nicht enthält, auch ein Integral von  $B'_s$ , mithin auch von  $B_s$ . Umgekehrt ist jedes Integral von  $B_s$  auch ein Integral von  $B'_s$ , mithin auch von  $B'_{s-1}$ , mithin, da es  $x_1$  nicht enthält, auch von  $B''_{s-1}$ .

Da nun  $B_{s-1}''$  nach der Induktionsvoraussetzung ein Hauptssystem von  $(n-1)-(s-1) = n-s$  Integralen  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-s}(x)$  besitzt, und zwar mit  $\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{x=a} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n-s; j = s+1, \dots, n$ ), falls  $|\beta_{ij}''(a)| \neq 0$  ( $i, j = 2, \dots, s$ ) ist, so besitzt  $B_s$  auch das Hauptssystem  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-s}(x)$ , und zwar mit  $\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{x=a} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n-s; j = s+1, \dots, n$ ), falls  $|\beta_{ij}(a)| = |\beta_{ij}'(a)| = |\beta_{ij}''(a)| \neq 0$  ( $i, j = 1, \dots, s; k, l = 2, \dots, s$ ) ist. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Was den zweiten Teil betrifft, ist er nach dem vorangegangenen ziemlich klar. Denn nach der Induktionsvoraussetzung läßt sich jeder Punkt der Integralmannigfaltigkeit  $x_1 = a_1$ ,  $\varphi_1(x) = \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-s}(x) = \varphi_{n-s}(a)$  durch einen aus den Bahnkurven von  $B_{s-1}''$  zusammengesetzten Weg mit  $a$  verbinden. Daraus folgt, daß jeder Punkt der Mannigfaltigkeit  $\varphi_1(x) = \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-s}(x) = \varphi_{n-s}(a)$  sich durch einen aus den Bahnkurven von  $B_s$  zusammengesetzten Weg mit  $a$  verbinden läßt. Da nun die Bahnkurven von  $X_i f$  offenbar aus denen von  $X_i f$  und  $X_1 f$  zusammengesetzt sind, so läßt sich jeder Punkt der Mannigfaltigkeit  $\varphi_1(x) = \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-s}(x) = \varphi_{n-s}(a)$  auch durch einen aus den Bahnkurven von  $B_s$  zusammengesetzten Weg mit  $a$  verbinden. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Aus diesem Satz A folgt dann für ein beliebiges System  $B$ , der folgende Satz B. Ein lineares partielles Differentialgleichungssystem  $B$ , hat in jedem Punkt  $a$ , der für seine vollständige Erweiterung  $B_s$  regulär ist, ein Hauptssystem von  $n-s$  Integralen  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-s}(x)$ . Jeder Punkt der durch  $a$  gehenden Integralmannigfaltigkeit  $\varphi_1(x) = \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-s}(x) = \varphi_{n-s}(a)$  läßt sich durch einen aus den Bahnkurven von  $B_s$  zusammengesetzten Weg mit  $a$  verbinden.

Zu dem zweiten Teil des Satzes braucht man nur noch zu bemerken, daß die Bahnkurven einer umgeformten Gruppe  $T, (\tau) T, (t) T, (-\tau)$  offenbar durch eine aus den Bahnkurven von  $T, (t)$  und  $T, (\tau)$  zusammengesetzte Kurve ersetzt werden können. Daß es nötig ist, den Punkt  $a$  als einen regulären Punkt nicht nur von  $B$ , sondern auch von  $B_s$  vorzusetzen, zeigt das folgende Beispiel: Das nicht vollständige System  $B_2$

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

ist offenbar in dem Punkte  $O = (0, 0, 0)$  regulär. Durch Hinzunahme des Klammerausdrucks  $(X_1 X_2) f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$  entsteht ein vollständiges System  $B_3$ , das aber offenbar nicht mehr in dem Punkte  $O$  regulär ist. In der Tat liegen alle durch einen Punkt der Ebene  $x_3 = 0$  gehenden Bahnkurven der infinitesimalen Transformation  $\alpha X_1 f + \beta X_2 f$ , wo  $\alpha(x), \beta(x)$  beliebige stetig differenzierbare Funktionen sind, immer in der Ebene  $\dot{x}_3 = 0$ , woraus folgt, daß man niemals einen nicht in der Ebene  $x_3 = 0$  liegenden Punkt durch einen

aus den Bahnkurven von allen solchen infinitesimalen Transformationen  $\alpha X_1 f + \beta X_2 f$  zusammengesetzten Weg mit  $O$  verbinden kann. Aus dem Satze *B* folgt dann, daß  $B_2$  nicht in einem im Punkte  $O$  regulären vollständigen System  $B_3$  enthalten sein kann.

Ohne Heranziehung des vollständigen Systems  $B$ , kann man auch den zweiten Teil des Satzes *B* in folgender Weise formulieren:

**Satz C.** Ein lineares Differentialgleichungssystem  $B$ , vom Index  $m$  im Punkte  $a$  hat in jeder Umgebung von  $a$  Punkte mit der Eigenschaft, daß die von ihnen aus durch die aus den Bahnkurven von  $B$ , zusammengesetzten Wege erreichbaren Punkte eine  $(r + m)$  dimensionale Mannigfaltigkeit bilden. Oder: Hat ein System  $B$ , in dem Punkte  $a$  die Eigenschaft, daß in jedem Punkte einer Umgebung von  $a$  die von ihm aus durch die aus den Bahnkurven von  $B$ , zusammengesetzten Wege erreichbaren Punkte eine Mannigfaltigkeit von höchstens  $r + m$  Dimensionen bildet, dann hat das System  $B$ , höchstens den Index  $m$ . Gibt es außerdem in jeder Umgebung von  $a$  immer Punkte, wobei diese höchste Dimension  $r + m$  wirklich auftritt, so hat das System  $B$ , genau den Index  $m$ .

Dies ist die eingangs erwähnte Verallgemeinerung des Carathéodoryschen Satzes. Um sie in eine Aussage über Pfaffsche Systeme zu verwandeln, brauchen wir nur folgendes zu bemerken: Es sei

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x) dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, r)$$

ein Pfaffsches System  $A$ , vom Range  $r$  im Punkte  $a$ , wobei die Funktionen  $\alpha_{ij}(x)$  in der Umgebung von  $a$  stetig differenzierbar sein sollen. Durch die Bedingungen  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{kj} = 0$  wird, bis auf Äquivalenz ein Differentialgleichungssystem  $B_{n-r}$ , vom Range  $n - r$ ,  $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$  ( $i = 1, \dots, n - r$ ) bestimmt. Die Systeme  $A$ , und  $B_{n-r}$ , heißen dann zueinander assoziiert, sie bestimmen einander bis auf Äquivalenz eindeutig. Die Integralkurven von  $A$ , sind nichts anderes als die aus den Bahnkurven von  $B_{n-r}$ , zusammengesetzten Kurven. Wir sagen, das System  $A$ , habe den Index  $m$ , wenn sein assoziiertes System  $B_{n-r}$ , den Index  $m$  hat. Wir können nun den Satz *C* in folgender Weise formulieren:

**Satz D.** Hat ein Pfaffsches System  $A$ , in dem Punkte  $a$  die Eigenschaft, daß in jedem Punkte einer Umgebung von  $a$  die von ihm aus durch die Integralkurven von  $A$ , erreichbaren Punkte eine Mannigfaltigkeit von höchstens  $n - r + m$  Dimensionen bilden, dann hat das System  $A$ , höchstens den Index  $m$ . Gibt es außerdem in jeder Umgebung von  $a$  immer Punkte, wobei diese höchste Dimension  $n - r + m$  wirklich auftritt, so hat das System genau den Index  $m$ .

Der Satz von Carathéodory entspricht dem Falle  $r = 1$ ,  $m = 0$ . (Im Falle  $m = 0$  ist der letzte Zusatz von Satz *D* überflüssig, da der Index niemals negativ sein kann.)

(Eingegangen am 19. 11. 1938.)

# Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Integraltransformationen.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

## § 1.

### Einleitung.

Für die linearen Integraltransformationen mit dem Grundgebiet  $(0, \infty)$ , deren Kern nur vom Produkt der Variablen abhängt<sup>1)</sup>:

$$(1.1) \quad \varphi(z) = \int_0^\infty \kappa(z\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta,$$

läßt sich eine Theorie entwickeln, die an formaler Eleganz und inhaltlicher Geschlossenheit nichts zu wünschen übrig läßt, wenn man einerseits die integrierte Gestalt<sup>2)</sup>

$$(1.2) \quad \int_0^z \varphi(\zeta) d\zeta = \int_0^\infty \frac{\chi(z\zeta)}{\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta$$

zugrunde legt und andererseits nur solche Transformationen betrachtet, die jeder Funktion  $\varphi$  aus der Klasse  $L^2(0, \infty)$  wieder eine Funktion aus dieser Klasse zuordnen, die also den ganzen Raum  $L^2(0, \infty)$  auf einen Teilbereich desselben Raumes abbilden. Wenn eine Transformation diese Eigenschaft hat, so sagen wir, sie erfülle das Postulat A. Die Funktion  $\frac{\chi(z)}{z}$  gehört dann notwendig auch zu  $L^2(0, \infty)$  [siehe § 3].

<sup>1)</sup> Die Variablen  $z, \zeta$  sind reell, die Funktionen  $\varphi, \psi, \kappa$  können komplexe Werte haben.

<sup>2)</sup> Hier ist formal  $\chi(z) = \int_0^z \kappa(v) dv$  und

$$\begin{aligned} \int_0^z \varphi(\zeta) d\zeta &= \int_0^z du \int_0^\infty \kappa(u\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta = \int_0^\infty \varphi(\zeta) d\zeta \int_0^z \kappa(u\zeta) du \\ &= \int_0^\infty d\zeta \varphi(\zeta) \frac{1}{\zeta} \int_0^z \kappa(v) dv = \int_0^\infty \frac{\chi(z\zeta)}{\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

gesetzt.

Die formale Einfachheit der Theorie liegt darin begründet, daß die *transzendente* Gleichung (1.2) sich durch die Mellin-Transformation

$$(1.3) \quad \mathfrak{M}\{\varphi; s\} \equiv \int_0^{\infty} x^{s-1} \varphi(x) dx$$

„algebraisieren“, d. h. in eine *algebraische* Gleichung übersetzen läßt. Diese Methode der Algebraisierung der Transformation (1.2) habe ich seinerzeit, um statt an die Mellin-Transformation an die weitaus bekanntere Fourier-Transformation (im Sinne der Plancherelschen Theorie) anknüpfen zu können, in etwas anderer Form entwickelt<sup>3)</sup>, mit der die eben erwähnte durch einfache Substitutionen zusammenhängt. Es werde gesetzt

$$(1.4) \quad \varphi(z) = z^{-\frac{1}{2}} F(\log z^{\frac{1}{2}}), \quad \psi(z) = z^{-\frac{1}{2}} G(\log z^{\frac{1}{2}}), \quad \frac{\chi(z)}{z} = z^{-\frac{1}{2}} T(\log z^{\frac{1}{2}}),$$

d. h.

$$F(x) = e^x \varphi(e^{2x}), \quad G(x) = e^x \psi(e^{2x}), \quad T(x) = e^{-x} \chi(e^{2x}).$$

Dann ist

$$\int_0^{\infty} |\varphi(z)|^2 dz = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 dx, \text{ usw.},$$

d. h. die Funktionen  $\varphi, \psi, \frac{\chi}{z}$  gehören dann und nur dann zu  $L^2(0, \infty)$ , wenn die  $F, G, T$  zu  $L^2(-\infty, \infty)$  gehören. Die Gleichung (1.2) geht durch die Substitution (1.4) mit

$$z = e^{2\xi}, \quad \zeta = e^{2\xi}, \quad \text{d. h. } x = \log z^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = \log \zeta^{\frac{1}{2}}$$

nach Division durch  $2e^x$  über in

$$\int_{-\infty}^{\xi} e^{-(x-\xi)} G(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x+\xi) F(\xi) d\xi$$

oder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x-\xi) G(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x-\xi) F(-\xi) d\xi,$$

wo

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{,, } x \geq 0 \end{cases}$$

gesetzt ist. Benutzt man für die hier vorkommende und als „*Faltung*“ bekannte Integralbildung die Symbolik

$$(1.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-\xi) F_2(\xi) d\xi = F_1(x) * F_2(x),$$

<sup>3)</sup> G. Doetsch, Beitrag zu Watsons „General Transforms“, Math. Annalen 113 (1937), S. 226–241; Zur Theorie der involutorischen Transformationen (General Transforms) und der selbstreziproken Funktionen, ebenda S. 663–676. Diese beiden Arbeiten werden im folgenden als Tr. I und Tr. II zitiert.

so nimmt die Gleichung der Transformation die einfache Gestalt an:

$$(1.6) \quad R(x) \bullet G(x) = T(x) \bullet F(-x).$$

Eine Faltung läßt sich aber in gewissen Fällen durch die Fourier-Transformation, die für Funktionen aus  $L^2(-\infty, \infty)$  in der Plancherelschen Gestalt als quadratischer Mittelwert (limes in medio = l. i. m.) anzusetzen ist:

$$(1.7) \quad \mathfrak{F}\{F; y\} = \text{l. i. m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} e^{-iyx} F(x) dx = f(y),$$

in ein algebraisches Produkt überführen (Faltungssatz):

$$(1.8) \quad \mathfrak{F}\{F_1 \bullet F_2\} = \mathfrak{F}\{F_1\} \cdot \mathfrak{F}\{F_2\}.$$

Es zeigt sich, daß der Faltungssatz für die Gleichung (1.6) zutrifft, so daß diese im Bereich der Fourier-Transformierten, die wir immer durch entsprechende kleine Buchstaben bezeichnen, die algebraische Gleichung

$$(1.9) \quad r(y) g(y) = t(y) f(-y)$$

als Abbild besitzt. Diese ist natürlich außerordentlich einfach zu handhaben, so daß man an ihr alle Eigenschaften der Transformation (1.6) ablesen kann. Durch Rückgängigmachen der Substitution (1.4) kann man die gewonnenen Aussagen in solche über die Transformation (1.2) übersetzen.

Statt erst die Funktionen  $\varphi, \dots$  durch die Substitution (1.4) in die Funktionen  $F, \dots$  überzuführen und dann auf diese die Fourier-Transformation anzuwenden, kann man auch gleich auf die  $\varphi, \dots$  eine entsprechende Transformation ausüben <sup>4)</sup>:

$$\begin{aligned} f(y) &= \text{l. i. m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} e^{-iyx} F(x) dx = \text{l. i. m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} e^{-iyx} e^x \varphi(e^2 x) dx \\ &= \frac{1}{2} \text{l. i. m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{e^{-1}}^a z^{-\frac{1}{2} - i\frac{y}{2}} \varphi(z) dz \end{aligned}$$

( $a = e^{2a}$ ). Diese Transformation ist bis auf den Faktor  $\frac{1}{2}$  nichts anderes als die Mellin-Transformation (1.3) (in Gestalt eines mittellkonvergenten Integrals), gebildet für  $s = \frac{1}{2} - i\frac{y}{2}$ .

Die Mellin-Transformation mit komplexem  $s$  ist äquivalent mit der (zweiseitigen) Laplace-Transformation  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \Phi(t) dt$  (Substitution  $e^{-t} = z, \Phi(-\log z) = \varphi(z)$ ). Durch Beschränkung des  $s$  auf eine vertikale Gerade mit der Abszisse 0 wird aus der Laplace-Transformation die Fourier-Transformation. Durch die Beschränkung des  $s$  auf eine vertikale Gerade

<sup>4)</sup> Vgl. Tr. II, S. 667.

mit der Abszisse  $\frac{1}{2}$  wird aus der Mellin-Transformation eine besondere Transformation, die ebenso selbständige Bedeutung hat wie die Fourier-Transformation und daher einen eigenen Namen verdiente. Da bisher kein Forschername besonders mit ihr verknüpft war, wollen wir sie *R-Transformation* nennen und definieren:

$$\mathfrak{R}\{\varphi; y\} \equiv \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{a-1}^a z^{-\frac{1}{2} + iy} \varphi(z) dz = \varphi^*(y).$$

(Statt  $\mathfrak{R}\{\varphi; y\}$  schreiben wir manchmal auch kürzer  $\mathfrak{R}\{\varphi\}$ .) Zwischen ihr und der Fourier-Transformation besteht der Zusammenhang:

$$(1.10) \quad \mathfrak{F}\{F; y\} = \frac{1}{2} \mathfrak{R}\left\{z^{-\frac{1}{2}} F(\log z^{\frac{1}{2}}); -\frac{y}{2}\right\},$$

$$(1.11) \quad \mathfrak{R}\{\varphi; y\} = 2 \mathfrak{F}\{e^x \varphi(e^{2x}); -2y\} = \mathfrak{F}\{e^{-\frac{x}{2}} \varphi(e^{-x}); y\}.$$

Da in der gegenwärtigen Arbeit die Integraltransformation (1.2) direkt mit der *R-Transformation* angegriffen werden soll, übersetzen wir zunächst in § 2 die in Tr. I und II benutzten Hilfssätze über die Fourier-Transformation in die Sprache der *R-Transformation*. Dabei handelt es sich vor allem um den Faltungssatz (1.8), der gemäß (1.10) die Gestalt erhält:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathfrak{R}\left\{z^{-\frac{1}{2}} (F_1 \circ F_2)_{x=\log z^{\frac{1}{2}}}; -\frac{y}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{R}\left\{z^{-\frac{1}{2}} F_1(\log z^{\frac{1}{2}}); -\frac{y}{2}\right\} \cdot \frac{1}{2} \mathfrak{R}\left\{z^{-\frac{1}{2}} F_2(\log z^{\frac{1}{2}}); -\frac{y}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir in (1.5)

$$x = \log z^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = \log \zeta^{\frac{1}{2}}; \quad z^{-\frac{1}{2}} F_1(\log z^{\frac{1}{2}}) = \varphi_1(z), \quad z^{-\frac{1}{2}} F_2(\log z^{\frac{1}{2}}) = \varphi_2(z),$$

so folgt:

$$\begin{aligned} z^{-\frac{1}{2}} (F_1 \circ F_2)_{x=\log z^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}} F_1\left(\log\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \zeta^{-\frac{1}{2}} F_2(\log \zeta^{\frac{1}{2}}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi_1\left(\frac{z}{\zeta}\right) \varphi_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

Ersetzt man noch  $-\frac{y}{2}$  durch  $y$ , so ergibt sich: Für folgende Integralbildung, die wir als „*Komposition*“ bezeichnen und für die wir als symbolisches Zeichen einen kleinen Kreis einführen:

$$(1.12) \quad \varphi_1 \circ \varphi_2 = \int_0^\infty \varphi_1\left(\frac{z}{\zeta}\right) \varphi_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^\infty \varphi_1(z\zeta) \varphi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

gilt unter gewissen Bedingungen (Kompositionssatz):

$$\mathfrak{R}\{\varphi_1 \circ \varphi_2\} = \mathfrak{R}\{\varphi_1\} \cdot \mathfrak{R}\{\varphi_2\}.$$

Der Inhalt der Hilfssätze 4 und 5 von § 2 besteht darin, solche Bedingungen zu präzisieren.

In § 3 schreiben wir die Transformation (1. 2) als Kompositionsgleichung und algebraisieren sie durch die  $\mathfrak{R}$ -Transformation, was nur eine andere Schreibweise für die Operationen in Tr. I darstellt. Wir brauchen die Zusammenhänge aber in diesem Gewand als Vorbereitung für den eigentlichen Hauptgegenstand dieser Arbeit in § 4. Hier werden die *Eigenwerte* und die zu  $L^2(0, \infty)$  gehörigen *Eigenfunktionen*, die eine Transformation (1. 2) haben kann, bestimmt. Es zeigt sich u. a., daß es höchstens abzählbar viele (eventuell gar keine) Eigenwerte gibt, die immer paarweise auftreten ( $+\lambda$  und  $-\lambda$ ). Zu jedem Eigenwert gehört eine symmetrisch zum Nullpunkt liegende Menge, in deren positiver Hälfte die  $\mathfrak{R}$ -Transformierte der Eigenfunktion beliebig gewählt werden kann, wodurch sie in der anderen Hälfte festliegt, während sie außerhalb der Menge verschwindet.

§ 5 behandelt speziell die Eigenwerte von *involutionen* und *unitären* Transformationen, d. h. solchen, die sich durch eine Integraltransformation mit demselben bzw. dem konjugierten Kern umkehren lassen. Um die hierbei erhaltenen Resultate abrunden zu können, stellen wir in § 6 den Eigenfunktionen eine andere Sorte von Funktionen gegenüber, die wir *Spiegelfunktionen* nennen und die sich nicht wie die Eigenfunktionen bei Anwendung der Transformation bis auf einen Faktor reproduzieren, sondern in die konjugierte Funktion verwandeln. Die unitären Transformationen nehmen in der Theorie dieser Spiegelfunktionen genau dieselbe Sonderstellung ein, wie die involutorischen Transformationen in der Theorie der Eigenfunktionen.

Die Arbeit ist so abgefaßt, daß sie im wesentlichen ohne Kenntnis von Tr. I und II sowie der übrigen Literatur gelesen werden kann.

## § 2.

### Hilfssätze über die $\mathfrak{R}$ -Transformation.

Im folgenden sind die Sätze des § 2 in Tr. I, die sich auf die Plancherelsche Theorie der Fourier-Transformation beziehen, vermittle der Beziehung (1. 10) in Sätze über die  $\mathfrak{R}$ -Transformation umgewandelt.

Hilfssatz 1. Ist  $\varphi(z)$  eine Funktion aus  $L^2(0, \infty)$ , so gehört zu ihr in umkehrbar eindeutiger Weise eine  $\mathfrak{R}$ -Transformierte

$$(2.1) \quad \mathfrak{R}\{\varphi; y\} \equiv \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \int_{a-1}^a z^{-\frac{1}{2} + iy} \varphi(z) dz = \varphi^*(y) \quad (-\infty < y < +\infty),$$

die der Klasse  $L^2(-\infty, \infty)$  angehört. — Jede Funktion  $\varphi^*(y)$  aus  $L^2(-\infty, \infty)$  ist die  $\mathfrak{R}$ -Transformierte einer Funktion  $\varphi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$ , die man durch die Umkehrformel

$$(2.2) \quad \varphi(z) = \text{l.i.m.}_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} z^{-\frac{1}{2}-iy} \varphi^*(y) dy = \mathfrak{R}^{-1}\{\varphi^*; z\}$$

erhält.

In Zukunft bezeichnen wir die  $\mathfrak{R}$ -Transformierte einer Funktion immer durch denselben Buchstaben wie diese mit einem oberen Stern.

Hilfssatz 2 (Parsevalsche Gleichung). Unter der Voraussetzung von Hilfssatz 1 ist

$$(2.3) \quad \int_0^{\infty} |\varphi(z)|^2 dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y)|^2 dy,$$

d. h.

$$\int_0^{\infty} \varphi(z) \overline{\varphi}(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(y) \overline{\varphi^*}(y) dy$$

und allgemeiner

$$(2.4) \quad \int_0^{\infty} \varphi_1(z) \overline{\varphi_2}(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(y) \overline{\varphi_2^*}(y) dy.$$

Hilfssatz 3 (Umgekehrter Kompositionssatz). Wenn  $\varphi_1(z)$  und  $\varphi_2(z)$  zu  $L^2(0, \infty)$  gehören, so gilt für die Komposition

$$(2.5) \quad \varphi_1(z) \circ \varphi_2(z) = \int_0^{\infty} \varphi_1\left(\frac{z}{\zeta}\right) \varphi_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^{\infty} \varphi_1(z\zeta) \varphi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

die Beziehung <sup>5)</sup>:

$$(2.6) \quad \varphi_1(z) \circ \varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{-\frac{1}{2}-iy} \varphi_1^*(y) \varphi_2^*(y) dy.$$

Hilfssatz 4 (I. Kompositionssatz). Gehören  $\varphi_1(z)$  und  $\varphi_2(z)$  zu  $L^2(0, \infty)$  und  $\varphi_1^*(y) \cdot \varphi_2^*(y)$  zu  $L^2(-\infty, \infty)$ , so gehört auch  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  zu  $L^2(0, \infty)$ , und es ist

$$\mathfrak{R}\{\varphi_1 \circ \varphi_2\} = \mathfrak{R}\{\varphi_1\} \cdot \mathfrak{R}\{\varphi_2\}.$$

<sup>5)</sup> Wegen  $\int_0^{\infty} |\varphi(z)|^2 dz = \int_0^{\infty} \left| \varphi\left(\frac{1}{z}\right) \right|^2 \frac{dz}{z^2}$  gehört mit  $\varphi(z)$  auch  $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$  zu  $L^2(0, \infty)$ .

Der Integrand des Kompositionsintegrals gehört als Produkt zweier Funktionen aus  $L^2(0, \infty)$  zu  $L^1(0, \infty)$ , das Integral konvergiert also absolut. — Dasselbe gilt für das Integral auf der rechten Seite von (2. 6), da  $\varphi_1^*$  und  $\varphi_2^*$  zu  $L^2(-\infty, \infty)$  gehören, ihr Produkt also zu  $L^1(-\infty, \infty)$ .

Hilfssatz 5 (II. Kompositionssatz). Wenn  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(z)$  und  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  zu  $L^2(0, \infty)$  gehören und die hiernach existierende Funktion  $\Re\{\varphi_1 \circ \varphi_2\}$  zu  $L^1(-\infty, \infty)$  gehört, so ist

$$\Re\{\varphi_1 \circ \varphi_2\} = \Re\{\varphi_1\} \cdot \Re\{\varphi_2\}.$$

Hilfssatz 6. Wenn  $\varphi(z)$  zu  $L^2(0, \infty)$  gehört, so gilt

$$(2.7) \quad \Re\left\{\varphi\left(\frac{1}{z}\right); y\right\} = \Re\{\varphi; -y\} = \varphi^*(-y),$$

$$(2.8) \quad \Re\{\overline{\varphi}(z); y\} = \overline{\Re\{\varphi(z); -y\}} = \overline{\varphi^*(-y)}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $\varphi(z)$  reell ist, lautet:

$$(2.9) \quad \varphi^*(y) = \overline{\varphi^*(-y)}.$$

### § 3.

#### Algebraisierung der Integraltransformation.

Wenn die Transformation (1. 2), für die wir auch kurz

$$\psi = \mathfrak{T}_x\{\varphi\}$$

schreiben, das Postulat A erfüllt, d. h. wenn sie jeder Funktion  $\varphi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$  eine Funktion  $\psi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$  zuordnet, so gehört die Funktion

$$\theta(z) = \frac{\chi(z)}{z}$$

notwendig zu  $L^2(0, \infty)$ . Denn für die spezielle Funktion

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{,, } z > 1 \end{cases}$$

aus  $L^2(0, \infty)$  ergibt (1. 2):

$$\int_0^z \psi(\zeta) d\zeta = \int_0^1 \frac{\chi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \int_0^z \frac{\chi(\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

also  $\psi(z) \equiv \frac{\chi(z)}{z}$  \*). — Das Integral auf der rechten Seite von (1. 2) ist daher absolut konvergent.

Schreibt man die Transformation (1. 2) folgendermaßen:

$$\int_0^z \frac{1}{\frac{z}{\zeta}} \psi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^{\frac{z}{z}} \frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\frac{z}{\zeta}} \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

\*) Hier und in der Folge bedeutet das Zeichen  $\equiv$  so viel wie: überall gleich bis auf eine Nullmenge.

so erkennt man, daß sie nach Einführung der zu  $L^2(0, \infty)$  gehörigen Funktion <sup>7)</sup>

$$(3.1) \quad \varrho(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{z} & \text{,, } z \geq 1 \end{cases}$$

bei Verwendung des Kompositionssymbols (vgl. (2.5)) die einfache Gestalt hat:

$$(3.2) \quad \varrho(z) \circ \psi(z) = \vartheta(z) \circ \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}.$$

Wir zeigen, daß sich auf beide Seiten der Kompositionssatz anwenden läßt <sup>8)</sup>, so daß unter Beobachtung von (2.7) im Bereich der  $\mathfrak{R}$ -Transformierten gilt:

$$(3.3) \quad \varrho^*(y) \psi^*(y) = \vartheta^*(y) \varphi^*(-y),$$

wobei

$$(3.4) \quad \varrho^*(y) = \int_1^\infty z^{-\frac{1}{2} + iy} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{\frac{1}{2} - iy}$$

ist <sup>9)</sup>.  $\psi^*(y)$  gehört nach Hilfssatz 1 zu  $L^2(-\infty, \infty)$ , also wegen der Beschränktheit von  $\varrho^*(y)$  auch  $\varrho^*(y) \psi^*(y)$ . Nach Hilfssatz 4 gehört dann  $\varrho \circ \psi$  zu  $L^2(0, \infty)$ , und es ist

$$\mathfrak{R}\{\varrho \circ \psi\} = \varrho^*(y) \psi^*(y).$$

Wegen (3.2) gehört auch  $\vartheta(z) \circ \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$  zu  $L^2(0, \infty)$ , ferner die Funktion

$$\mathfrak{R}\left\{\vartheta(z) \circ \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\right\} = \mathfrak{R}\{\varrho(z) \circ \psi(z)\} = \varrho^*(y) \psi^*(y)$$

zu  $L^1(-\infty, \infty)$ , da  $\varrho^*$  und  $\psi^*$  zu  $L^2(-\infty, \infty)$  gehören. Hilfssatz 5 liefert somit:

$$\mathfrak{R}\left\{\vartheta(z) \circ \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\right\} = \vartheta^*(y) \varphi^*(-y),$$

womit bewiesen ist, daß die transzendente Gleichung (3.2) die algebraische Gleichung (3.3) zur notwendigen Folge hat.

<sup>7)</sup>  $\varrho(z)$  entspricht gemäß der Substitution (1.4) der Funktion  $R(x)$  von § 1.

<sup>8)</sup> Das folgende ist eine Übersetzung von Tr. I, S. 235 in die Sprache der  $\mathfrak{R}$ -Transformation.

<sup>9)</sup> Wenn ein Integral im gewöhnlichen Sinne und als quadratischer Mittelwert konvergiert, so stimmen beide Werte überein; man kann also  $\mathfrak{R}\{\varrho\}$  durch das gewöhnliche Integral ausrechnen.

Damit vermöge der Gleichung (man beachte  $\varrho^*(y) \neq 0$ )

$$\psi^*(y) = \frac{\theta^*(y)}{\varrho^*(y)} \varphi^*(-y)$$

jeder<sup>10)</sup> Funktion  $\varphi^*(-y)$  aus  $L^2(-\infty, \infty)$  wieder eine Funktion  $\psi^*(y)$  aus  $L^2(-\infty, \infty)$  entsprechen kann, muß notwendig bis auf eine Nullmenge

$$(3.5) \quad \left| \frac{\theta^*(y)}{\varrho^*(y)} \right| \leq M$$

sein. Diese Bedingung ist aber, wenn die Funktion  $\theta^*(y)$  meßbar ist und also wegen (3.5) eo ipso zu  $L^2(-\infty, \infty)$  gehört, auch hinreichend, damit die Transformation (1.2) mit dem Kern  $\chi = z \theta$  jede Funktion  $\varphi$  aus  $L^2(0, \infty)$  wieder in eine Funktion  $\psi$  aus  $L^2(0, \infty)$  überführt: Zu  $\varphi$  bestimme man zunächst das zugehörige  $\varphi^*$  aus  $L^2(-\infty, \infty)$  und hierzu vermittle (3.3) eine Funktion  $\psi^*$ , die wegen (3.5) auch zu  $L^2(-\infty, \infty)$  gehört, also nach Hilfssatz 1 eine Funktion  $\psi = \mathfrak{R}^{-1}\{\psi^*\}$  aus  $L^2(0, \infty)$  besitzt. Multipliziert man die Gleichung (3.3) mit  $\frac{1}{2\pi} z^{-\frac{1}{2}-iy}$  und integriert sie von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , so steht nach Hilfssatz 3 die Gleichung (3.2) da. Damit ergibt sich<sup>11)</sup>:

Satz 1. Die Transformationen (1.2), die das Postulat A erfüllen, sind genau diejenigen, bei denen die Funktion  $\theta(z) = \frac{\chi(z)}{z}$  zu  $L^2(0, \infty)$  gehört und die Bedingung B erfüllt, daß bis auf eine Nullmenge

$$(3.5) \quad \left| \frac{\theta^*(y)}{\varrho^*(y)} \right| \leq M, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{R} \left\{ \frac{\chi(z)}{z} \right\} \leq \frac{M}{\sqrt{\frac{1}{4} + y^2}}$$

ist. Für sie ist die transzendente Gleichung (3.2) völlig äquivalent mit der algebraischen Gleichung (3.3).

<sup>10)</sup> Wenn  $\varphi(z)$  jede Funktion aus  $L^2(0, \infty)$  sein kann, so darf  $\varphi^*(y)$  nach Hilfssatz 1 jede Funktion aus  $L^2(-\infty, \infty)$  sein.

<sup>11)</sup> Die Bedingung B ist von H. Kober, Eine Verallgemeinerung der Transformationen vom Fourier-Typ, Quart. Journ. (Oxford Ser.) 8 (1937), S. 172–185 (Satz 2, S. 174) angegeben worden. Die Ableitung von (3.3) geschieht hier nach dem Vorgang von I. Busbridge, On general transforms with kernels of the Fourier type, Journ. Lond. Math. Soc. 9 (1934), S. 179–187, über den Parsevalschen Satz für die Mellin-Transformation. Es scheint mir aber, daß gerade die Schreibweise der Transformation (1.2) als Kompositionsgleichung und ihre Algebraisierung durch den Faltungssatz besonders deutlich den inneren Mechanismus hervortreten läßt. — Beim Vergleich des Obigen mit den eben zitierten Arbeiten ist zu beachten, daß die Funktion  $\frac{\theta^*(y)}{\varrho^*(y)}$  bei I. Busbridge mit  $\Omega(\frac{1}{2} + iy)$ , bei H. Kober mit  $\omega(y)$  bezeichnet ist.

## § 4.

**Eigenwerte und Eigenfunktionen von Integraltransformationen.**

Es sei jetzt grundsätzlich (1. 2) eine Transformation, die das Postulat A, d. h. die Bedingung B erfüllt. Wenn es eine komplexe Zahl  $\lambda \neq 0$  und eine Funktion  $\varphi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$ , die nicht  $\equiv 0$ , d. h. die in einer Menge positiven Maßes  $\neq 0$  ist, gibt derart, daß

$$(4.1) \quad \varphi(z) = \lambda \mathcal{T}_x \{ \varphi(z) \}, \quad \text{d. h. } \varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{\lambda}$$

oder explizit

$$\int_0^z \varphi(\zeta) d\zeta = \lambda \int_0^{\infty} \chi\left(\frac{z\zeta}{\zeta}\right) \varphi(\zeta) d\zeta$$

ist, so heiße  $\lambda$  ein *Eigenwert* der Transformation und  $\varphi(z)$  eine dazugehörige *Eigenfunktion* aus  $L^2(0, \infty)$ <sup>12)</sup>. (Speziell für  $\lambda = 1$  bzw.  $\lambda = -1$  heißt  $\varphi(z)$  eine *selbstreziproke* bzw. *schiefreziproke* Funktion.) Wegen der in § 3 bewiesenen Äquivalenz der Gleichungen (3. 2) und (3. 3) ergibt sich, wenn man dort  $\varphi = \frac{\varphi}{\lambda}$  setzt<sup>13)</sup>:

**Satz 2.** *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Eigenfunktion  $\varphi(z)$  der Transformation (1. 2) zum Eigenwert  $\lambda$  existiert, ist die Existenz einer zu  $L^2(-\infty, \infty)$  gehörigen Funktion  $\varphi^*(y) \neq 0$ , die die algebraische Gleichung*

$$(4.2) \quad \varphi^*(y) \varphi^*(y) = \lambda \vartheta^*(y) \varphi^*(-y)$$

*befriedigt. Die Eigenfunktion  $\varphi(z)$  ergibt sich durch  $\varphi(z) = \mathcal{R}^{-1} \{ \varphi^*(y) \}$ <sup>14)</sup>.*

Aus diesem Satz wollen wir nun eine vollständige Charakterisierung aller Eigenfunktionen ableiten.

Wenn die Funktionalgleichung (4. 2), die für alle reellen  $y$  gilt, von einer Funktion  $\varphi^*(y)$  erfüllt wird, so ist auch die Gleichung, in der  $y$  durch  $-y$  ersetzt ist, richtig:

$$(4.3) \quad \varphi^*(-y) \varphi^*(-y) = \lambda \vartheta^*(-y) \varphi^*(y).$$

Also erfüllt  $\varphi^*$  auch das Produkt der Gleichungen (4. 2) und (4. 3):

$$\varphi^*(y) \varphi^*(-y) \varphi^*(y) \varphi^*(-y) = \lambda^2 \vartheta^*(y) \vartheta^*(-y) \varphi^*(y) \varphi^*(-y)$$

<sup>12)</sup> Es kann natürlich zu demselben  $\lambda$  auch noch weitere Eigenfunktionen, die nicht zu  $L^2(0, \infty)$  gehören, und ebenso weitere  $\lambda$  geben, denen nicht zu  $L^2(0, \infty)$  gehörige Eigenfunktionen entsprechen. Siehe das Beispiel S. 121.

<sup>13)</sup> Für den Fall  $\lambda = 1$  siehe I. Busbridge, l. c.<sup>11)</sup>, S. 186 und Doetsch, Tr. II, S. 668.

<sup>14)</sup> Ist  $\varphi(z) \neq 0$ , so kann  $\varphi^*(y)$  wegen (2. 2) nicht  $\equiv 0$  sein. Ist  $\varphi^*(y) \neq 0$ , so kann  $\varphi(z)$  wegen (2. 1) nicht  $\equiv 0$  sein.

oder

$$(4.4) \quad [\lambda^2 \vartheta^*(y) \vartheta^*(-y) - \varrho^*(y) \varrho^*(-y)] \varphi^*(y) \varphi^*(-y) = 0.$$

Demnach ist für alle  $y$ , wo

$$(4.5) \quad D_1(y) = \lambda^2 \vartheta^*(y) \vartheta^*(-y) - \varrho^*(y) \varrho^*(-y)$$

von 0 verschieden ist, notwendig entweder  $\varphi^*(y) = 0$  und damit wegen (4.3) auch  $\varphi^*(-y) = 0$ ; oder  $\varphi^*(-y) = 0$  und damit wegen (4.2) auch  $\varphi^*(y) = 0$ ; also auf jeden Fall  $\varphi^*(y) = \varphi^*(-y) = 0$ . Damit eine Funktion  $\varphi^*(y)$ , die nicht  $\equiv 0$  ist, existieren kann, muß also notwendig in einer Menge  $\mathfrak{M}_1$  von positivem Maß<sup>15)</sup>  $D_1(y) = 0$  sein. Da  $D_1(y) = D_1(-y)$  ist, so liegt diese Menge symmetrisch zum Nullpunkt.

(Man kann die erhaltene Bedingung auch auf Grund der Bemerkung ableiten, daß das System von zwei linearen homogenen Gleichungen (4.2) und (4.3) für die beiden Unbekannten  $\varphi^*(y)$  und  $\varphi^*(-y)$  nur dort eine von der trivialen Lösung  $\varphi^*(y) = \varphi^*(-y) = 0$  verschiedene Lösung besitzt, wo die Determinante  $D_1(y)$  gleich 0 ist.)

Ist umgekehrt in einer Menge  $\mathfrak{M}_1$  von positivem Maß  $D_1(y) = 0$ , so existieren sicher Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda$ . Bedeutet  $\mathfrak{C}_1$  die Komplementärmenge von  $\mathfrak{M}_1$  (die auch symmetrisch zum Nullpunkt liegt), so setze man:

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } y \text{ aus } \mathfrak{C}_1: & \varphi^*(y) = 0, \\ \text{für } y \text{ aus } \mathfrak{M}_1: & \begin{cases} \varphi^*(y) = h(y) & \text{für } y > 0, \\ \varphi^*(y) = \lambda \frac{\vartheta^*(y)}{\varrho^*(y)} h(-y) & \text{für } y < 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

wo  $h(y)$  eine beliebige Funktion aus  $L^2(0, \infty)$  ist, die in  $\mathfrak{M}_1$  nicht  $\equiv 0$  ist. Dann gehört  $\varphi^*(y)$  auf Grund der Bedingung B zu  $L^2(-\infty, \infty)$ , ist  $\neq 0$  und erfüllt die Gleichung (4.2) für alle  $y$ : Für  $y$  aus  $\mathfrak{C}_1$  trivialerweise, weil dort  $\varphi^*(y) = \varphi^*(-y) = 0$  ist; für negative  $y$  aus  $\mathfrak{M}_1$  gemäß Definition; für positive  $y$  aus  $\mathfrak{M}_1$  aus folgendem Grunde: Die letzte Zeile der Definitionsgleichung für  $\varphi^*(y)$  kann in der Form

$$\varphi^*(-y) = \lambda \frac{\vartheta^*(-y)}{\varrho^*(-y)} h(y) \quad \text{für } y > 0 \text{ aus } \mathfrak{M}_1$$

geschrieben werden. Das ist wegen

$$h(y) = \varphi^*(y) \quad \text{für } y > 0 \text{ aus } \mathfrak{M}_1$$

<sup>15)</sup>  $\vartheta^*(y)$  und  $\varrho^*(y)$  sind meßbar, also auch  $D_1(y)$ . Die Menge, wo  $D_1(y) = 0$  ist, hat folglich stets ein Maß. Dieses kann natürlich  $\infty$  sein.

die Gleichung (4.3). Bei verschwindender Determinante ist aber Gleichung (4.2) eine Folge der Gleichung (4.3)<sup>16)</sup>.

Zu einem Eigenwert existieren also unendlich viele Eigenfunktionen; offenbar stellt (4.6) die allgemeine Lösung von (4.2), also die Gesamtheit der  $\mathfrak{R}$ -Transformierten aller Eigenfunktionen dar.

Die Menge  $\mathfrak{M}_1$ , in deren positiver Hälfte  $\varphi^*(y)$  beliebig gewählt werden darf, wollen wir die zum Eigenwert  $\lambda$  gehörige *Lizenzmenge* nennen.

Wenn in einer Menge  $\mathfrak{M}_1$  von positivem Maß  $D_1(y) = 0$  ist, so gilt dort

$$\lambda^2 = \frac{\varphi^*(y) \varphi^*(-y)}{\vartheta^*(y) \vartheta^*(-y)}.$$

Gemäß Bedingung B ist bis auf eine Nullmenge, also sicher in Punkten von  $\mathfrak{M}_1$

$$\left| \frac{\varphi^*(y)}{\vartheta^*(y)} \right| \geq \frac{1}{M},$$

folglich ist

$$|\lambda| \geq \frac{1}{M}.$$

Die Eigenwerte können daher 0 nicht zur Häufungsstelle haben.

Für eine Transformation mit reellem Kern  $\chi$  (d. h.  $\vartheta$  reell) ist nach (2.9)  $\vartheta^*(-y) = \overline{\vartheta^*(y)}$ , also

$$\lambda^2 = \frac{|\varphi^*(y)|^2}{|\vartheta^*(y)|^2} = \text{positiv reell}$$

und folglich  $\lambda$  stets reell.

Wir fassen unser Ergebnis so zusammen:

**Satz 3.** *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Transformation der Gestalt (1.2), die das Postulat A erfüllt, Eigenfunktionen aus  $L^2(0, \infty)$  zum Eigenwert  $\lambda$  ( $\lambda$  beliebig komplex  $\neq 0$ ) besitzt, ist die Existenz einer (symmetrisch zum Nullpunkt liegenden) Menge  $\mathfrak{M}_1$  von positivem Maß, der sogenannten Lizenzmenge zu  $\lambda$ , in der*

$$(4.7) \quad \frac{\vartheta^*(y) \vartheta^*(-y)}{\varphi^*(y) \varphi^*(-y)} = \frac{1}{\lambda^2},$$

d. h.

$$\vartheta^*(y) \vartheta^*(-y) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2} + y^2}$$

mit  $\vartheta^*(y) = \mathfrak{R} \left\{ \frac{\chi(z)}{z} \right\}$  ist. — Mit  $\lambda$  ist also stets auch  $-\lambda$  Eigenwert. (Mit selbstreziproken Funktionen gibt es daher stets auch schiefreziproke und umge-

<sup>16)</sup> Multipliziert man Gleichung (4.3) mit der aus  $D_1(y) = 0$  folgenden Gleichung

$$\frac{\lambda \vartheta^*(y)}{\varphi^*(-y)} = \frac{\varphi^*(y)}{\lambda \vartheta^*(-y)},$$

so erhält man Gleichung (4.2). — Wegen  $D_1 = 0$ ,  $\varphi^*(y) \neq 0$ ,  $\varphi^*(-y) \neq 0$  ist  $\vartheta^*(y) \neq 0$  in  $\mathfrak{M}_1$ .

kehrt.) — Die Eigenwerte liegen sämtlich außerhalb eines Kreises um den Nullpunkt:

$$(4.8) \quad |\lambda| \geq \frac{1}{M}.$$

wo  $M$  die Schranke von Bedingung  $B$  ist<sup>17)</sup>. — Eine Transformation mit reellem Kern hat nur reelle Eigenwerte. — Zu jedem Eigenwert gibt es unendlich viele Eigenfunktionen; die Gesamtheit ihrer  $\mathcal{R}$ -Transformierten wird durch die Konstruktionsvorschrift (4.6) gegeben; die Eigenfunktionen lassen sich hieraus mittels (2.2) berechnen.

Da es auf der  $y$ -Achse höchstens abzählbar viele elementefremde Mengen von positivem Maß geben kann, so ergibt sich aus Satz 3:

Satz 4. Eine Transformation der Gestalt (1.2), die das Postulat  $A$  erfüllt, hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte mit Eigenfunktionen aus  $L^2(0, \infty)$ <sup>18)</sup>.

Der Satz 3 zeigt, daß es Transformationen gibt, die überhaupt keine Eigenfunktionen (insbesondere auch keine selbst- und schiefreziproken Funktionen) aus  $L^2(0, \infty)$  besitzen, daß man aber auch Transformationen angeben kann mit einem beliebig vorgegebenen abzählbaren Spektrum, das nur gemäß (4.8) den Nullpunkt nicht zum Häufungspunkt haben darf. Es sei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  eine beliebige Folge von komplexen Zahlen mit  $|\lambda_v| \geq A > 0$ . Dann setze man beispielsweise

$$\vartheta^*(y) = \frac{1}{\lambda_v(\frac{1}{2} - iy)} = \frac{e^*(y)}{\lambda_v} \quad \text{für } v-1 < |y| \leq v \quad (v = 1, 2, \dots)$$

(Ist die Folge endlich und bricht mit  $\lambda_v$  ab, so setze man  $\vartheta^*(y) = 0$  für  $|y| > q$ .) Dann ist  $\vartheta^*(y)$  meßbar und erfüllt wegen

$$|\vartheta^*(y)| \leq \frac{1}{A|\frac{1}{2} - iy|} = \frac{1}{A} |e^*(y)|$$

die Bedingung  $B$ , ferner ist

$$\frac{\vartheta^*(y)}{e^*(y)} \frac{\vartheta^*(-y)}{e^*(-y)} = \frac{1}{\lambda_v^2} \quad \text{in } v-1 < |y| \leq v,$$

also in einer Menge von positivem Maß. Dagegen gibt es keine weitere Zahl  $\lambda$ , für die (4.7) irgendwo erfüllt ist.

<sup>17)</sup> Insbesondere gibt es im Falle  $M < 1$  keine selbstreziproken und schiefreziproken Funktionen.

<sup>18)</sup> Es gibt Transformationen (1.2), die kontinuierlich viele Eigenwerte mit Eigenfunktionen, die nicht zu  $L^2(0, \infty)$  gehören, besitzen. Hierfür geben wir S. 121 ein Beispiel.

In dem klassischen Beispiel der *Fourierschen cos-Transformation*, die in der Form (1.1) die Gestalt

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos z \zeta \varphi(\zeta) d\zeta,$$

in der Form (1.2) die Gestalt

$$(4.9) \quad \int_0^z \varphi(\zeta) d\zeta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin z \zeta}{\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta$$

hat, ist  $\phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{z}$  und

$$(4.10) \quad \frac{\phi^*(y)}{\phi^*(y)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + iy\right),$$

also

$$\begin{aligned} & \frac{\phi^*(y)}{\phi^*(y)} \frac{\phi^*(-y)}{\phi^*(-y)} \\ &= \frac{2}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + iy\right) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - iy\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x} \text{ und } 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

ist

$$\frac{\phi^*(y)}{\phi^*(y)} \frac{\phi^*(-y)}{\phi^*(-y)} = \frac{1}{\cos \pi iy} \left( \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi iy \right) = 1.$$

Hier ist auf der ganzen Achse die Bedingung (4.7) mit  $\lambda^2 = 1$  erfüllt<sup>19)</sup>. Die cos-Transformation hat also im Raum  $L^2(0, \infty)$  nur Eigenfunktionen zu den Eigenwerten  $\lambda = \pm 1$ , die Lizenzmenge ist die ganze Achse. — Das gleiche gilt übrigens auch für die Fouriersche sin-Transformation ( $\kappa(z) = \sin z$ ) und die Hankel-Transformation ( $\kappa(z) = z^{\frac{1}{2}} J_\nu(z)$ ). Vgl. hierzu auch § 5, Satz 5.

Ein anderes bekanntes Beispiel einer Transformation der Gestalt (1.1) ist die *Laplace-Transformation*

$$(4.11) \quad \varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta,$$

<sup>19)</sup> Da in diesem Beispiel

$$1 = \frac{\phi^*(y)}{\phi^*(y)} \frac{\phi^*(-y)}{\phi^*(-y)} = \frac{\phi^*(y)}{\phi^*(y)} \frac{\overline{\phi^*(y)}}{\phi^*(y)} = \left| \frac{\phi^*(y)}{\phi^*(y)} \right|^2$$

ist, so ergibt sich, daß die beste Konstante  $M$  in der Bedingung B hier gleich 1 ist. Vgl. hierzu auch <sup>27)</sup>.

deren Algebraisierung bereits früher<sup>20)</sup> in anderer Form, nämlich durch Ausführung der Substitution (1. 4) und Anwendung der Fourier-Transformation bewerkstelligt wurde. Hier braucht man nicht zur integrierten Gestalt überzugehen, sondern kann die  $\mathfrak{R}$ -Transformation direkt auf die Gleichung (4. 11) anwenden, die wir zunächst in der Form

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\zeta}} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta}{\zeta} \quad \text{oder} \quad \varphi(z) = e^{-z} \circ \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$$

schreiben.  $e^{-z}$  gehört zu  $L^2(0, \infty)$ , und es ist  $\Re\{e^{-z}\} = \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)$ ; diese Funktion ist wegen  $|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)| \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi}{2}|y|}$  beschränkt. Gehört nun  $\varphi(z)$ , also auch  $\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$  zu  $L^2(0, \infty)$  und damit  $\Re\left\{\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\right\}$  zu  $L^2(-\infty, \infty)$ , so gehört  $\Re\{e^{-z}\} \cdot \Re\left\{\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\right\}$  zu  $L^2(-\infty, \infty)$ , also nach Hilfssatz 4  $\varphi(z)$  zu  $L^2(0, \infty)$ <sup>21)</sup>, und es ist

$$(4. 12) \quad \varphi^*(y) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \varphi^*(-y).$$

Für eine Eigenfunktion  $\varphi(z)$  zum Eigenwert  $\lambda$  gilt

$$\varphi^*(y) = \lambda \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \varphi^*(-y)$$

und

$$\varphi^*(-y) = \lambda \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) \varphi^*(y),$$

also

$$[\lambda^2 \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) - 1] \varphi^*(y) \varphi^*(-y) = 0.$$

Damit nicht  $\varphi^*(y) \equiv 0$  ist, müßte in einer Menge von positivem Maß

$$\lambda^2 \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) - 1 = \frac{\pi \lambda^2}{\cos \pi i y} - 1 = 0$$

sein. Diese Gleichung ist aber bei komplexem  $\lambda^2$  für kein reelles  $y$ , bei reellem  $\lambda^2$  höchstens für zwei reelle  $y$  erfüllt.

<sup>20)</sup> G. Doetsch, Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation, Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 263–286 (§ 6).

<sup>21)</sup> Die Laplace-Transformierte einer Funktion aus  $L^2(0, \infty)$  gehört also wieder zu dieser Klasse, so daß man in  $L^2(0, \infty)$  die Laplace-Transformation beliebig oft iterieren kann.

Die Laplace-Transformation hat also überhaupt keine Eigenfunktionen im Raum  $L^2(0, \infty)$ . Dagegen hat sie im Raum  $L^1(0, \infty)$  sogar ein kontinuierliches Spektrum und zu jedem Eigenwert  $\lambda$  die Eigenfunktionen<sup>22)</sup>

$$\varphi(z) = C \left( t^{-\beta} + \frac{1}{\lambda \Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \right) \quad \text{mit} \quad \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{und} \quad 0 < \Re \beta < 1.$$

Bemerkung. Aus (4.12) ergibt sich ein besonders durchsichtiger Beweis für die Tatsache<sup>23)</sup>, daß die Laplace-Transformierte einer für die *Fouriersche*  $\cos$ - ( $\sin$ -) Transformation selbstreziproken Funktion für die  $\sin$ - ( $\cos$ -) Transformation selbstreziprok ist. Dazu brauchen wir nur neben die Kern-Transformierte (4.10) der  $\cos$ -Transformation die entsprechende Formel für die  $\sin$ -Transformation ( $\kappa(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z$ ,  $\chi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - \cos z)$ ) zu stellen. Für diese ist

$$\frac{\varphi^*(y)}{\varphi^*(y)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + iy\right).$$

Ist nun  $\varphi$  selbstreziprok für die  $\frac{\cos}{\sin}$ -Transformation, so ist (siehe (4.2) für  $\lambda = 1$ )

$$\varphi^*(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + iy\right) \varphi^*(-y),$$

woraus durch Ersatz von  $y$  durch  $-y$  und Multiplikation mit  $\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)$  wird:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \varphi^*(-y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) \varphi^*(y).$$

Wegen  $\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - iy\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + iy\right)$  bedeutet das für die Laplace-Transformierte  $\psi(z)$  von  $\varphi(z)$  nach (4.12):

$$\psi^*(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + iy\right) \psi^*(-y),$$

d. h.  $\psi(z)$  ist selbstreziprok für die  $\frac{\sin}{\cos}$ -Transformation.

<sup>22)</sup> G. H. Hardy and E. C. Titchmarsh, Solution of an integral equation, Journ. Lond. Math. Soc. 4 (1929), S. 300–304. — Die Gleichung zwischen  $\beta$  und  $\lambda$  kann man einfacher so schreiben:  $\sin \pi \beta = \pi \lambda^2$ .

<sup>23)</sup> E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford 1937, S. 267.

## § 5.

## Eigenwerte und Eigenfunktionen von involutorischer und unitären Transformationen.

Unter den Transformationen der Gestalt (1. 2), die das Postulat A erfüllen, gibt es solche, die sich durch eine Integraltransformation derselben Gestalt mit einem Kern  $\chi_0$  umkehren lassen. Von diesen sind zwei Klassen von Transformationen besonders bemerkenswert, nämlich die mit  $\chi_0 = \chi$ , die „involutorisch“, und die mit  $\chi_0 = \bar{\chi}$ , die „unitär“ heißen sollen<sup>24)</sup>. Wir wollen zusehen, wie sich unsere Ergebnisse für diese Klassen spezialisieren.

## 1. Die involutorischen Transformationen.

Das sind, genau gesagt, diejenigen Transformationen (1. 2), die jeder Funktion  $\varphi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$  eine Funktion  $\psi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$  zuordnen und bei denen  $\varphi(z)$  aus  $\psi(z)$  durch dieselbe Transformation zurückgewonnen werden kann (klassisches Beispiel: die cos-Transformation). Es ist klar, daß dann die Bildfunktionen  $\psi(z)$  ebenso wie die Originalfunktionen  $\varphi(z)$  den ganzen Raum  $L^2(0, \infty)$  ausmachen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung

<sup>24)</sup> Damit weiche ich von der in Tr. II eingeführten Bezeichnung ab. Dort und in Tr. I kamen nur Transformationen mit  $\chi_0 = \bar{\chi}$  vor, und diese wurden involutorisch genannt, weil im Falle eines *reellen*  $\chi$  genau das vorliegt, was man in der Geometrie eine involutorische Transformation nennt. Werden nun aber auch Transformationen mit komplexem  $\chi$ , für die  $\chi_0 = \chi$  ist, in den Kreis der Betrachtung einbezogen, so erscheint es zweckmäßig, den Namen „involutorisch“ für diese zu reservieren und die Transformationen mit  $\chi_0 = \bar{\chi}$  in üblicher Weise „unitär“ zu nennen. Eine durch eine Matrix  $\|a_{ik}\|$  definierte lineare Transformation heißt ja unitär, wenn  $\|a_{ik}\| \cdot \|\bar{a}_{kl}\| = E$  ist, d. h. wenn die Umkehrung durch  $\|\bar{a}_{kl}\|$  bewerkstelligt wird, wofür bei einer symmetrischen Matrix  $\|\bar{a}_{ik}\|$  geschrieben werden kann. Dem entspricht bei unserem in den Variablen  $z, \zeta$  symmetrischen Kern  $\chi(z, \zeta)$  die Umkehrung durch den Kern  $\bar{\chi}(\zeta, z)$ . — Bei Kober, l. c. <sup>11)</sup>, werden die involutorischen Transformationen als „Watson-Klasse“, die unitären als „Fourier-Klasse“ bezeichnet. Diese Benennungen sind insofern sachlich nicht ganz treffend, als einerseits Watson in seiner bekannten Arbeit, die die Theorie der dem Postulat A genügenden Transformationen (1. 2) inauguriert hat (siehe <sup>23)</sup>) nur reelle  $\chi$  betrachtet, für die beide Klassen zusammenfallen, und andererseits die Fourier-Transformation mit dem Kern  $e^{-iz\eta}$  zwar durch die Transformation mit dem konjugierten Kern umgekehrt wird, aber sich nicht auf das Grundgebiet  $(0, \infty)$ , sondern auf  $(-\infty, \infty)$  bezieht, also gar nicht zur „Fourier-Klasse“ gehört.

dafür, daß die Transformation involutorisch ist, besteht darin, daß  $\vartheta^*(y)$  außer der Bedingung B noch die Gleichung

$$(5.1) \quad \frac{\vartheta^*(y) \vartheta^*(-y)}{\varrho^*(y) \varrho^*(-y)} = 1 \quad \text{für } -\infty < y < \infty$$

erfüllt<sup>25)</sup>. Durch Vergleich mit Satz 3 folgt<sup>26a)</sup>:

**Satz 5.** *Die involutorischen Transformationen sind identisch mit denjenigen Transformationen, die nur die Eigenwerte  $\pm 1$  haben und bei denen die zugehörige Lizenzmenge die ganze y-Achse ist.*

<sup>25)</sup> H. Kober, l. c. <sup>11)</sup>, S. 177. Übersetzt man (5.1) mittels Hilfssatz 3 in eine Kompositionsgleichung, so erhält man:

$$\vartheta(z) \circ \frac{\vartheta\left(\frac{1}{z}\right)}{z} = \varrho(z) \circ \frac{\varrho\left(\frac{1}{z}\right)}{z} \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty \frac{\chi(z\zeta)}{\zeta} \frac{\chi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \text{Min}(z, 1).$$

(5.1) ergibt sich genau wie die entsprechende Relation für unitäre Transformationen in Tr. I: Aus dem gleichzeitigen Bestehen von

$$(a) \quad \varrho^*(y) \varphi^*(y) = \vartheta^*(y) \varphi^*(-y) \quad (\text{Abbild der Transformation})$$

und

$$(b) \quad \varrho^*(y) \varphi^*(y) = \vartheta^*(y) \varphi^*(-y) \quad (\text{Abbild der Umkehrung})$$

folgt (5.1), und umgekehrt folgt aus (a) und (5.1) die Relation (b). — Übrigens ergibt sich durch Multiplikation über Kreuz von (a) und (b):

$$\varphi^*(y) \varphi^*(-y) = \varphi^*(y) \varphi^*(-y)$$

und hieraus nach Hilfssatz 2 [in Formel (2.4)  $\overline{\varphi}_2(z) = \varphi_1(z)$ , also  $\overline{\varphi}_2^*(y) = \varphi_1^*(-y)$ ] gesetzt:

$$\int_0^\infty \varphi^2(z) dz = \int_0^\infty \varphi^2(z) dz.$$

Das ist nur für reelle  $\varphi$  und  $\varphi$  eine Parsevalsche Gleichung.

<sup>26a)</sup> Zusatz bei der Korrektur (Mai 1939): Satz 5 findet sich in anderer Gestalt in der unlängst erschienenen Arbeit von H. Kober, Involutorische Transformationen und selbstreziproke Funktionen, Proc. Lond. Math. Soc. 44 (1938), S. 453—465. Hier wird nur nach denjenigen Transformationen gefragt, die mindestens eine Eigenfunktion haben, deren  $\mathcal{R}$ -Transformierte fast überall  $\neq 0$  ist; das bedeutet in unserer Sprache, daß es (nur zwei) Eigenwerte gibt, deren Lizenzmenge die ganze Achse ist. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch auf die mir inzwischen näher bekannt gewordene Arbeit von E. Frola, Trasformazioni funzionali lineari ed equazioni integrali singolari, Ann. Mat. pura appl. (4) 16 (1937), S. 127—155, 165—182 hinweisen, die mit meiner gegenwärtigen Note gewisse Analogien aufweist. Hier wird nicht die Transformation (1.2), sondern (1.1) zugrundegelegt, und zwar unter der speziellen Annahme, daß  $\chi(z)$  reell ist und eine (als Cauchyscher Hauptwert existierende)  $\mathcal{R}$ -Transformierte besitzt, die beschränkt, stetig und durchweg  $\neq 0$  ist. Ge-

fragt wird nach solchen Eigenfunktionen, die sich in der Gestalt  $\int_{-\infty}^\infty z^{-\frac{1}{2} + iy} dV(y)$

mit einem  $V(y)$  von beschränkter Variation in  $(-\infty, \infty)$  darstellen lassen. Unter der zusätzlichen Forderung, daß die Funktionen außerdem zu  $L^2(0, \infty)$  gehören.

Hat allgemeiner eine Transformation nur die Eigenwerte  $\pm \lambda$  und ist die zugehörige Lizenzmenge die ganze Achse, so sind die beiden Transformationen mit den Kernen  $\pm \lambda \chi$  involutorisch, und umgekehrt.

## 2. Die unitären Transformationen.

Das sind diejenigen Transformationen  $\varphi = \mathfrak{I}_\chi \{\psi\}$ , die jeder Funktion  $\varphi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$  eine Funktion  $\psi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$  zuordnen und bei denen  $\varphi(z)$  aus  $\psi(z)$  durch die Transformation  $\varphi = \mathfrak{I}_\chi \{\psi\}$  zurückgewonnen werden kann. Auch hier machen die Bildfunktionen den ganzen Raum  $L^2(0, \infty)$  aus. Erfüllt nämlich  $\chi$  die Bedingung B, so auch  $\chi$ , denn

$$|\Re\{\bar{\theta}\}| = |\bar{\theta}^*(-y)| = |\theta^*(-y)| \leq M |\varrho^*(-y)| = M |\varrho^*(y)|.$$

Also liefert  $\mathfrak{I}_\chi$  für jede Funktion  $\psi$  aus  $L^2(0, \infty)$  eine Funktion  $\varphi$  aus  $L^2(0, \infty)$ :

$$\varphi = \mathfrak{I}_\chi \{\psi\}.$$

Dann ist

$$\bar{\varphi} = \mathfrak{I}_\chi \{\bar{\psi}\}.$$

Da die Transformation  $\mathfrak{I}_\chi$  durch  $\mathfrak{I}_\chi$  umgekehrt wird, so ist

$$\bar{\psi} = \mathfrak{I}_\chi \{\bar{\varphi}\}$$

oder

$$\psi = \mathfrak{I}_\chi \{\varphi\}.$$

Folglich läßt sich jede Funktion  $\psi$  aus  $L^2(0, \infty)$  durch die Transformation  $\mathfrak{I}_\chi$  einer Funktion  $\varphi$  aus  $L^2(0, \infty)$  erzeugen.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Transformation unitär ist, besteht in der Erfüllung der Gleichung <sup>26)</sup>

$$(5.2) \quad \frac{\theta^*(y)}{\varrho^*(y)} \frac{\bar{\theta}^*(y)}{\bar{\varrho}^*(y)} = 1,$$

sollen, entstehen Sätze, die zu gewissen Resultaten meiner Arbeit analog sind: Teorema VII, S. 154 entspricht der Formel (4.7) in Satz 3, Teorema X, S. 155 dem Satz 5. Das Analogon zu Teorema VIII, S. 154 wäre ebenfalls leicht aufzustellen. — Die Ergebnisse der gegenwärtigen Arbeit habe ich bereits 1936 bei der Publikation von Tr. I und II besessen. Die dem Herausgeber der Annalen schon damals angekündigte Ausarbeitung unterblieb dann wegen der Fertigstellung meines Buches über die Laplace-Transformation.

<sup>26)</sup> Für reelle Kerne bei G. N. Watson, General transforms, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 35 (1933), S. 156–199; für komplexe Kerne bei M. Plancherel, Sur les formules de réciprocité du type de Fourier, Journ. Lond. Math. Soc. 8 (1933), S. 220–226; Beweis mittels Algebraisierung in Tr. I, er läuft genau wie der in <sup>25)</sup>.

d. h.

$$(5.3) \quad \left| \frac{\vartheta^*(y)}{\vartheta^*(y)} \right| = 1 \quad \text{für } -\infty < y < \infty^{27}).$$

Aus der Tatsache, daß eine unitäre Transformation isometrisch ist, d. h. daß für sie der Parsevalsche Satz

$$\int_0^\infty |\varphi(z)|^2 dz = \int_0^\infty |\psi(z)|^2 dz$$

gilt<sup>28)</sup>, folgt sofort, daß die Gleichung  $\varphi(z) = \lambda \psi(z)$  nur für  $|\lambda| = 1$  bestehen, d. h. daß es nur Eigenwerte vom Absolutbetrag 1 geben kann<sup>28)</sup>.

Die Bedingung (4.7) nimmt hier wegen (5.2) die Gestalt an, daß in einer Menge  $\mathfrak{M}_1$  von positivem Maß  $\lambda^2 \vartheta^*(-y) = \overline{\vartheta^*}(y)$  sein muß. Wir erhalten also den

Satz 6. Eine unitäre Transformation kann nur Eigenwerte  $\lambda$  mit  $|\lambda| = 1$  haben. Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Eigenwertes  $\lambda$  ist das Bestehen der Gleichung

$$(5.4) \quad \lambda^2 \vartheta^*(y) = \overline{\vartheta^*}(-y)$$

in einer Lizenzmenge  $\mathfrak{M}_2$  von positivem Maß.

Ist der Kern reell, so ist die unitäre Transformation zugleich involutorisch, sie hat also nach Satz 5 genau die Eigenwerte  $\pm 1$ , und die Lizenzmenge ist die ganze Achse. Das geht auch aus (5.4) hervor, da für reelles  $\vartheta$  nach (2.9)  $\vartheta^*(y) = \overline{\vartheta^*}(-y)$  für alle  $y$  ist.

## § 6.

### Spiegelwerte und Spiegelfunktionen.

Der Satz 5 zeigt, daß die involutorischen Transformationen im Rahmen des Eigenwertproblems eine ausgezeichnete Rolle spielen. Es gibt eine andere Art von „Eigenwertproblem“, für das die unitären Transformationen eine analoge Rolle übernehmen und das an folgende Definition anknüpft:

Wenn es eine komplexe Zahl  $\mu \neq 0$  und eine Funktion  $\varphi(z) \neq 0$  gibt, so daß für die lineare Transformation  $\psi(z) = \mathfrak{I}\{\varphi(z)\}$

$$(6.1) \quad \overline{\varphi}(z) = \mu \mathfrak{I}\{\varphi(z)\}$$

<sup>27)</sup> Die Bedingung B ist hier eo ipso mit  $M = 1$  und  $=$  statt  $\leq$  erfüllt.

<sup>28)</sup> Derselbe Satz gilt auch für unitäre Matrizen, siehe z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl. 1931, S. 37 und für allgemeine unitäre Transformationen im Hilbertschen Raum, siehe M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space, New York 1932, S. 302. — Die Bedingung  $|\lambda| = 1$  kann natürlich auch aus (4.7) in Verbindung mit (5.3) erschlossen werden.

ist, so heiße  $\mu$  ein *Spiegelwert* der Transformation und  $\varphi(z)$  eine dazugehörige *Spiegelfunktion*. (Man könnte auch von „Eigenfunktion im Hermiteschen Sinn“ sprechen.)

Es handle sich nun wieder um eine Transformation der Gestalt (1. 2), die das Postulat A erfüllt, und wir suchen die Spiegelfunktionen aus  $L^2(0, \infty)$ . Die Gleichung (6. 1) hat hier die Form (vgl. § 3):

$$(6. 2) \quad \varrho(z) \circ \bar{\varphi}(z) = \mu \vartheta(z) \circ \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$$

und ist völlig quivalent mit der algebraischen Gleichung

$$\varrho^*(y) \bar{\varphi}^*(-y) = \mu \vartheta^*(y) \varphi^*(-y)$$

Also erhalten wir:

**Satz 7.** *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Spiegelfunktion  $\varphi(z)$  aus  $L^2(0, \infty)$  zum Spiegelwert  $\mu$  existiert, ist die Existenz einer zu  $L^2(-\infty, \infty)$  gehörigen Funktion  $\varphi^*(y) \neq 0$ , die die Gleichung*

$$(6. 3) \quad \varrho^*(-y) \bar{\varphi}^*(y) = \mu \vartheta^*(-y) \varphi^*(y)$$

*befriedigt.  $\varphi(z)$  ergibt sich als  $\Re^{-1}\{\varphi^*\}$ .*

Hieraus leiten wir analog zu § 4 eine vollständige Charakterisierung aller Spiegelfunktionen ab. Geht man in (6. 3) zu den Absolutbeträgen über, so folgt:

$$(|\mu| |\vartheta^*(-y)| - |\varrho^*(-y)|) |\varphi^*(y)| = 0.$$

Also ist für alle  $y$ , in denen

$$(6. 4) \quad E_\mu(y) = |\mu| |\vartheta^*(-y)| - |\varrho^*(-y)|$$

von 0 verschieden ist, notwendig  $\varphi^*(y) = 0$ . Damit ein  $\varphi^*(y) \neq 0$  existieren kann, muß daher in einer Menge  $\mathfrak{M}_\mu$  von positivem Maß  $E_\mu(y) = 0$  sein. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so kann man unendlich viele  $\varphi^*(y)$  bestimmen, die die Gleichung (6. 3), d. h.

$$(6. 5) \quad \bar{\varphi}^*(y) = \mu \frac{\vartheta^*(-y)}{\varrho^*(-y)} \varphi^*(y)$$

befriedigen. In der Komplementärmenge  $\mathfrak{C}_\mu$  von  $\mathfrak{M}_\mu$  ist  $\varphi^*(y) = 0$  zu setzen. In den Punkten von  $\mathfrak{M}_\mu$  ist wegen  $\left| \mu \frac{\vartheta^*(-y)}{\varrho^*(-y)} \right| = 1$  durch (6. 5) für den Absolutbetrag von  $\varphi^*(y)$  keine Bedingung vorgeschrieben, dagegen muß

$$\arccos\left(\mu \frac{\vartheta^*(-y)}{\varrho^*(-y)}\right) + \arccos \varphi^*(y) = \arccos \bar{\varphi}^*(y) = -\arccos \varphi^*(y),$$

also

$$\arccos \varphi^*(y) = -\frac{1}{2} \arccos\left(\mu \frac{\vartheta^*(-y)}{\varrho^*(-y)}\right)$$

sein. Ist der arcus auf der rechten Seite, der an sich nur bis auf Multipla von  $2\pi$  bestimmt ist, fest gewählt und versteht man unter  $\sqrt{\mu \frac{\vartheta^*( -y)}{\varrho^*( -y)}}$  eindeutig die komplexe Zahl auf dem Einheitskreis, die den halben arcus wie der Radikand hat, so kann man setzen:

$$-\frac{1}{2} \arccos \left( \mu \frac{\vartheta^*( -y)}{\varrho^*( -y)} \right) = \arccos \frac{1}{\sqrt{\mu \frac{\vartheta^*( -y)}{\varrho^*( -y)}}} = \arccos \sqrt{\mu \frac{\vartheta^*( -y)}{\varrho^*( -y)}}.$$

Dadurch ist  $\arccos \varphi^*(y)$  festgelegt, während der Absolutbetrag eine beliebige positive Funktion aus  $L^2(-\infty, \infty)$  sein darf. — Bemerken wir noch, daß aus  $E_\mu(y) = 0$  in  $\mathfrak{M}_\mu$  und der Bedingung B die Ungleichung  $|\mu| \geq \frac{1}{M}$  folgt, so können wir unser Ergebnis so zusammenfassen:

**Satz 8.** Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Transformation der Gestalt (1. 2), die das Postulat A erfüllt, Spiegelfunktionen aus  $L^2(0, \infty)$  zum Spiegelwert  $\mu$  ( $\mu$  beliebig komplex  $\neq 0$ ) besitzt, ist die Existenz einer Lizenzmenge  $\mathfrak{M}_\mu$  von positivem Maß, in der

$$(6.6) \quad \left| \frac{\vartheta^*( -y)}{\varrho^*( -y)} \right| = \frac{1}{|\mu|}$$

ist. — Mit  $|\mu|$  ist also auch jede Zahl vom gleichen Absolutbetrag Spiegelwert. — Die Spiegelwerte mit Spiegelfunktionen aus  $L^2(0, \infty)$  haben höchstens abzählbar viele verschiedene Absolutbeträge; sie liegen außerhalb eines Kreises um den Nullpunkt:

$$(6.7) \quad |\mu| \geq \frac{1}{M},$$

wo  $M$  die Schranke von Bedingung B ist. — Zu jedem Spiegelwert gibt es unendlich viele Spiegelfunktionen, deren  $\mathfrak{R}$ -Transformierte sämtlich durch folgende Charakterisierung erfaßt werden:

$$\varphi^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \in \mathfrak{C}_\mu, \\ \frac{r(y)}{\sqrt{\mu \frac{\vartheta^*( -y)}{\varrho^*( -y)}}} & \text{für } y \in \mathfrak{M}_\mu, \end{cases}$$

wo  $r(y)$  jede reelle positive Funktion aus  $L^2(-\infty, \infty)$  bedeuten kann und der Wurzel nach fester Wahl des arcus des Radikanden eindeutig die Hälfte dieses arcus zuzuschreiben ist.

Im übrigen kann man hier die analogen Bemerkungen wie bei den Eigenfunktionen in § 4 anschließen.

Die Bedingung (6. 6), die man auch in der Gestalt

$$\frac{\vartheta^*( -y)}{\varrho^*( -y)} \frac{\overline{\vartheta^*( -y)}}{\overline{\varrho^*( -y)}} = \frac{1}{|\mu|^2}$$

schreiben kann, nimmt für reelle Kerne, bei denen  $\overline{\vartheta^*}(-y) = \vartheta^*(y)$  ist, wegen  $\overline{\varrho^*}(-y) = \varrho^*(y)$  die Form an:

$$\frac{\vartheta^*(y)}{\varrho^*(y)} \frac{\vartheta^*(-y)}{\varrho^*(-y)} = \frac{1}{|\mu|^2},$$

die mit der Bedingung (4. 7) für  $\lambda^2 = |\mu|^2$  übereinstimmt. Da bei einer Transformation mit reellem Kern alle  $\lambda^2$  reell positiv sind (S. 117), so folgt:

**Satz 9.** *Hat eine Transformation mit reellem Kern das (notwendig reelle) Eigenwertpaar  $\lambda > 0$  und  $-\lambda$ , so hat sie jeden Wert  $\mu$  mit  $|\mu| = \lambda$  zum Spiegelwert und umgekehrt. Die Lizenzmengen für die Eigen- und Spiegelfunktionen sind dieselben.*

So hat also z. B. die Fouriersche cos-Transformation und allgemein jede reelle involutorische Transformation jeden Wert  $\mu$  mit  $|\mu| = 1$  zum Spiegelwert; die Laplace-Transformation besitzt keinen Spiegelwert mit einer Spiegelfunktion aus  $L^2(0, \infty)$ .

Vergleicht man nun (6. 6) mit der die unitären Transformationen charakterisierenden Gleichung (5. 3), so erhält man:

**Satz 10.** *Die unitären Transformationen sind identisch mit denjenigen Transformationen, die nur die Spiegelwerte mit  $|\mu| = 1$  haben und bei denen die zugehörige Lizenzmenge die ganze  $y$ -Achse ist.*

Es gibt also z. B. für sie stets unendlich viele „spiegelreziproke“ Funktionen ( $\mu = 1$ ), d. h. solche, die der Gleichung  $\overline{\varphi}(z) = \mathfrak{T}_\chi\{\varphi(z)\}$  genügen<sup>29)</sup>.

Hat allgemeiner eine Transformation nur Spiegelwerte vom Absolutbetrag  $\mu_0$  und ist die zugehörige Lizenzmenge die ganze Achse, so sind die Transformationen mit den Kernen  $\mu\chi$ , wo  $|\mu| = \mu_0$ , unitär und umgekehrt.

<sup>29)</sup> Dieses spezielle Resultat ist auch bei Kober, l. c. <sup>11)</sup>, S. 179 erwähnt.

# Über lineare Integralgleichungen mit vom Parameter abhängigem Kern.

Von

Rudolf Iglisch in Braunschweig.

Vor einiger Zeit <sup>1)</sup> hat C. Miranda lineare Integralgleichungen mit Kernen der Form

$$(1) \quad K(x, y; \lambda) = G(x, y) + \sum_{i=1}^p \frac{\lambda}{\lambda + a_i} H_i(x, y)$$

betrachtet, wo  $G(x, y)$  und die  $H_i(x, y)$  reelle symmetrische Kerne sind, die  $H_i(x, y)$  außerdem positiv definit mit nur endlich vielen Eigenfunktionen; die  $a_i$  sind positive Konstanten. Unter einigen weiteren z. T. recht unübersichtlichen und offenbar nur durch die Beweismethode der unendlich vielen Veränderlichen bedingten Voraussetzungen wird festgestellt, daß der Kern (1) nur reelle Eigenwerte besitzt, die sich im endlichen nicht häufen, daß „im allgemeinen“ unendlich viele Eigenwerte vorhanden sind, stets aber mindestens einer <sup>2)</sup>.

Die Bemerkungen in vorliegender Arbeit sind beim Lesen der eben erwähnten Arbeit entstanden. Sie beziehen sich auf die lineare Integralgleichung zweiter Art

$$(2) \quad z(x) - \lambda \int K(x, y; \lambda) z(y) dy = f(x),$$

wo über den (im allgemeinen in  $x$  und  $y$  symmetrischen) Kern  $K(x, y; \lambda)$  in den einzelnen Sätzen jeweils verschiedene Voraussetzungen gemacht werden. Insbesondere werden die Ergebnisse von Miranda in allgemeinerer Form erhalten. Die Veränderlichen  $x$  und  $y$  können dabei (mehrdimensionale) Punktvariable sein. Die erhaltenen Sätze dürften sich ohne große Mühe noch weiter verallgemeinern lassen; vor allem ist die aus Bequemlichkeit eingeführte Voraussetzung der Stetigkeit von  $K(x, y; \lambda)$  in  $x$  und  $y$  leicht zu mildern. Es sei noch bemerkt, daß alle in der Arbeit auftretenden Integrale über das der Integralgleichung (2) zugrunde liegende Integrationsgebiet zu erstrecken sind.

<sup>1)</sup> C. Miranda, Su di una classe di equazioni integrali il cui nucleo e funzione del parametro, Rend. Circ. mat. Palermo 60 (1937), S. 286—304.

<sup>2)</sup> Die darüber hinaus von Miranda noch aufgestellten Entwicklungssätze sind nicht Gegenstand der vorliegenden Note. Entwicklungssätze dieser Art lassen sich nur für die speziellsten hier betrachteten Kerne erwarten, nämlich die in Satz XI betrachteten. Darüber ein anderes Mal.

## § 1.

**Existenz unendlich vieler reeller Eigenwerte.**

**Satz I. Voraussetzung.** a)  $K(x, y; \lambda)$  sei für alle positiven Werte  $\lambda \geq \kappa > 0$  definiert, in  $x, y$  symmetrisch und z. B. in allen drei Veränderlichen stetig. Insbesondere sei also  $K(x, y; \infty)$  ein gewöhnlicher symmetrischer Kern.

b)  $K(x, y; \lambda^*) - K(x, y; \lambda)$  sei für  $\lambda > \lambda^* \geq \kappa$  positiv definit.

c)  $K(x, y; \infty)$  habe unendlich viele positive Eigenwerte.

**Behauptung.**  $K(x, y; \lambda)$  hat unendlich viele positive Eigenwerte  $\geq \kappa$ .

**Beweis.** Sei  $\Lambda_m > \kappa$   $m$ -ter positiver Eigenwert von  $K(x, y; \infty)$ . Wegen

$$(3) \quad K(x, y; \Lambda_m) = K(x, y; \infty) + [K(x, y; \Lambda_m) - K(x, y; \infty)]$$

liegt nach dem Weylschen Additionstheorem zweier Kerne der  $m$ -te positive Eigenwert  $\Lambda_m^{(1)}$  von  $K(x, y; \Lambda_m)$  vor  $\Lambda_m$ :

$$\Lambda_m^{(1)} \leq \Lambda_m.$$

Ist auch  $\Lambda_m^{(1)} \geq \kappa$ , so liegt der  $m$ -te positive Eigenwert  $\Lambda_m^{(2)}$  von  $K(x, y; \Lambda_m^{(1)})$  vor  $\Lambda_m^{(1)}$ :

$$\Lambda_m^{(2)} \leq \Lambda_m^{(1)}.$$

Ist  $\Lambda_m^{(2)} \geq \kappa$ , so läßt sich das Verfahren fortsetzen. Sei so etwa rekursiv  $\Lambda_m^{(n+1)}$   $m$ -ter positiver Eigenwert von  $K(x, y; \Lambda_m^{(n)})$ . Ist für alle  $n$   $\Lambda_m^{(n)} \geq \kappa$ , so folgt

$$\Lambda_m^{(n+1)} \leq \Lambda_m^{(n)}.$$

In diesem Falle ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_m^{(n)} = \lambda_m \geq \kappa$$

und  $\lambda_m$  ist Eigenwert zu  $K(x, y; \lambda_m)$ , d. h.  $\lambda_m$  ist Eigenwert von  $K(x, y; \lambda)$ . Die so für verschiedene  $m$  erhaltenen Eigenwerte von  $K(x, y; \lambda)$  sind ersichtlich alle verschieden in dem Sinne, daß für etwaige gleiche Eigenwerte die zugehörigen Eigenfunktionen linear unabhängig sind. Würde nun für unendlich viele Indizes  $m$  ein  $n_m$  existieren derart, daß  $\Lambda_{n_m}^{(n_m)} < \kappa$  ist, so müßte, wieder nach dem Weylschen Additionstheorem,  $K(x, y; \kappa)$  unendlich viele positive Eigenwerte vor  $\kappa$  besitzen, was nicht möglich ist. Damit ist die Existenz unendlich vieler Eigenwerte größer als  $\kappa$  bewiesen.

**Satz II.** An die Stelle der Voraussetzung b) des Satzes I trete die Voraussetzung

b\*)  $K(x, y; \lambda) - K(x, y; \lambda^*)$  sei für  $\lambda > \lambda^* \geq \kappa$  positiv definit.

Dazu trete die neue Voraussetzung

d)  $K(x, y; \kappa)$  habe unendlich viele positive Eigenwerte.

**Behauptung.**  $K(x, y; \lambda)$  hat unendlich viele positive Eigenwerte  $\geq \kappa$ .

**Beweis.**  $\Lambda_m \geq \kappa$  sei wieder  $m$ -ter positiver Eigenwert von  $K(x, y; \infty)$ .

Dann liegt der  $m$ -te positive Eigenwert  $\Lambda_m^{(1)}$  von  $K(x, y; \Lambda_m)$  wegen (3) rechts von  $\Lambda_m$ :

$$\Lambda_m^{(1)} \geq \Lambda_m.$$

Es sei  $\Lambda_m^{(1)}$  endlich. Analog gilt dann für den  $m$ -ten positiven Eigenwert  $\Lambda_m^{(2)}$  von  $K(x, y; \Lambda_m^{(1)})$

$$\Lambda_m \leq \Lambda_m^{(2)} \leq \Lambda_m^{(1)}.$$

Der Prozeß läßt sich fortsetzen:

$$\Lambda_m^{(2)} \leq \Lambda_m^{(3)} \leq \Lambda_m^{(1)},$$

$$\Lambda_m^{(3)} \leq \Lambda_m^{(4)} \leq \Lambda_m^{(2)},$$

$$\Lambda_m^{(4)} \leq \Lambda_m^{(5)} \leq \Lambda_m^{(3)}$$

usw.

Man sieht: Die  $\Lambda_m^{(2^n)}$  bilden eine aufsteigende beschränkte Zahlenfolge, ihr Grenzwert sei  $\lambda_m^*$ ; die  $\Lambda_m^{(2^{n+1})}$  bilden eine absteigende beschränkte Zahlenfolge, ihr Grenzwert sei  $\lambda_m \geq \lambda_m^*$ . Steht hier das Gleichheitszeichen, so ist  $\lambda_m \geq \kappa$  Eigenwert des Kernes  $K(x, y; \lambda)$ . Ist dagegen  $\lambda_m > \lambda_m^* \geq \kappa$ , so muß einerseits  $\lambda_m$   $m$ -ter positiver Eigenwert zu  $K(x, y; \lambda_m^*)$  sein, andererseits  $\lambda_m^*$   $m$ -ter positiver Eigenwert zu  $K(x, y; \lambda_m)$ . Setzen wir unter Einführung des von 0 nach 1 laufenden reellen Parameters  $\tau$

$$\Lambda_m(\tau) = (1 - \tau) \lambda_m^* + \tau \lambda_m$$

und sei  $\lambda_m(\tau)$  der zu  $K(x, y; \Lambda_m(\tau))$  gehörende  $m$ -te positive Eigenwert, so ist

$$\lambda_m(0) = \lambda_m, \quad \lambda_m(1) = \lambda_m^*, \quad \Lambda_m(0) = \lambda_m^*, \quad \Lambda_m(1) = \lambda_m.$$

Ersichtlich hängen die  $\lambda_m(\tau)$  und  $\Lambda_m(\tau)$  stetig von  $\tau$  ab; daher muß es eine Stelle  $\tau^*$  zwischen 0 und 1 geben derart, daß  $\lambda_m(\tau^*) = \Lambda_m(\tau^*)$  ist. Dieses  $\lambda_m(\tau^*) \geq \kappa$  ist dann  $m$ -ter positiver Eigenwert von  $K(x, y; \lambda_m(\tau^*))$ , d. h.  $\lambda_m(\tau^*)$  ist Eigenwert von  $K(x, y; \lambda)$ . — Hieraus folgt sofort die Existenz unendlich vieler positiver Eigenwerte  $\geq \kappa$  von  $K(x, y; \lambda)$ , wenn noch gezeigt wird, daß für unendlich viele Indizes  $m$  die Größe  $\Lambda_m^{(1)}$  endlich ist. Das ist aber nach Voraussetzung d) sicher der Fall, da ja der  $m$ -te positive Eigenwert von  $K(x, y; \kappa)$  größer ist als  $\Lambda_m^{(1)}$ .

Bemerkung. Zu den Sätzen I und II gelten die analogen Sätze, wenn man die Umgebung des Punktes  $\lambda = \infty$  durch die von  $\lambda = -\infty$  ersetzt.

## § 2.

### Über die Unmöglichkeit von Häufungspunkten von Eigenwerten.

Satz III. Voraussetzung. In der Umgebung von  $\lambda = \lambda_0$  sei  $K(x, y; \lambda)$  ein symmetrischer reeller Kern und in allen drei Veränderlichen stetig; außerdem sei dort

$$\text{für } \left. \begin{array}{l} \lambda > \lambda_0 \\ \lambda < \lambda_0 \end{array} \right\} K(x, y; \lambda) - K(x, y; \lambda_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\} \text{ definit.}$$

Behauptung.  $\lambda_0$  ist kein Häufungspunkt reeller Eigenwerte.

**Beweis.** Sei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  eine gegen  $\lambda_0$  konvergierende Folge reeller Eigenwerte,  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  zugehörige normierte Eigenfunktionen. Zunächst folgt in üblicher Weise, daß alle  $\varphi_n(x)$  gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind. Die nach dem Arzelschen Prinzip für  $n \rightarrow \infty$  möglichen Häufungsfunktionen  $\Phi(x)$  müssen alle einem Komplex aus endlich vielen linear unabhängigen Funktionen angehören, da sonst  $K(x, y; \lambda_0)$  unendlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda_0$  hätte. — Sei  $\lambda_n$  ein beliebig wenig von  $\lambda_0$  verschiedener Eigenwert und z. B.  $\lambda_n > \lambda_0$ . Ist etwa  $\lambda_0 > 0$  (der andere Fall erledigt sich in gleicher Weise), so mögen bis zum Eigenwert  $\lambda_0$  einschließlich (immer mit richtiger Vielfachheit gezählt)  $N$  positive Eigenwerte von  $K(x, y; \lambda_0)$  vorhanden sein. Der  $(N + 1)$ -te positive Eigenwert von  $K(x, y; \lambda_0)$  liegt um einen endlichen Betrag rechts von  $\lambda_0$ . Infolge der Voraussetzung liegt der  $\mu$ -te positive Eigenwert von  $K(x, y; \lambda_n)$  links vom  $\mu$ -ten positiven Eigenwert von  $K(x, y; \lambda_0)$ .  $\lambda_n$  kann mithin nicht einer der  $N$  ersten positiven Eigenwerte von  $K(x, y; \lambda_n)$  sein. Ist  $\lambda_n$  genügend dicht an  $\lambda_0$  gelegen, so kann aber  $\lambda_n$  infolge der stetigen Änderung der Eigenwerte mit dem Kern auch nicht der  $(N + 1)$ -te oder ein höherer positiver Eigenwert von  $K(x, y; \lambda_n)$  sein. — In ähnlicher Weise schließt man, wenn  $\lambda_n < \lambda_0$  ist; dann sind die Eigenwerte von  $K(x, y; \lambda_n)$  rechts von denen von  $K(x, y; \lambda_0)$  gelegen. In allen Fällen kann somit  $\lambda_0$  nicht Häufungsstelle reeller Eigenwerte sein.

**Satz IV.** Voraussetzung. In der Umgebung von  $\lambda = \lambda_0$  sei  $K(x, y; \lambda)$  ein symmetrischer reeller Kern und in allen drei Veränderlichen stetig. Außerdem sei dort  $\frac{\partial \lambda K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda}$  in allen drei Veränderlichen stetig und an der Stelle  $\lambda = \lambda_0$  ein eigentlich (positiv oder negativ) definiter Kern.

**Behauptung.**  $\lambda = \lambda_0$  ist nicht Häufungspunkt reeller Eigenwerte.

**Beweis.** Wieder indirekt. Wie beim Beweis des vorigen Satzes folgt, daß dann  $K(x, y; \lambda_0)$  zu  $\lambda_0$  nur endlich viele zueinander orthogonale Eigenfunktionen besitzt, aus denen sich die Häufungsfunktionen der  $\varphi_n(x)$  linear zusammensetzen lassen. Zu jeder noch so kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$  gibt es ein  $\lambda_n$  mit  $|\lambda_0 - \lambda_n| < \varepsilon$ , eine Eigenfunktion  $\varphi_0(x)$  zu  $\lambda_0$  und  $K(x, y; \lambda_0)$ , eine Eigenfunktion  $\varphi_n(x)$  zu  $\lambda_n$  und  $K(x, y; \lambda_n)$  derart, daß  $\varphi_0(x) - \varphi_n(x) = \eta(x)$  mit  $|\eta(x)| \leq \varepsilon$  ist. Aus

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 \int K(x, y; \lambda_0) \varphi_0(y) dy$$

und

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int K(x, y; \lambda_n) \varphi_n(y) dy$$

folgt in üblicher Weise

$$0 = \iint [\lambda_0 K(x, y; \lambda_0) - \lambda_n K(x, y; \lambda_n)] \varphi_0(x) \varphi_n(y) dx dy,$$

d. h.

$$0 = \iint \left. \frac{\partial \lambda K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda_n) \varphi_0(x) \varphi_0(y) dx dy + \text{Glieder,}$$

welche  $\lambda_0 - \lambda_n$  als Faktor enthalten, außerdem aber noch mindestens einen zweiten Faktor, der mit  $\varepsilon$  gegen Null strebt. Nach Voraussetzung ist aber der angeschriebene Faktor von  $\lambda_0 - \lambda_n$  von Null verschieden; es ist ja für den eigentlich definiten Kern  $\left. \frac{\partial \lambda K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$

$$(4) \quad \iint \varphi_0(x) \left. \frac{\partial \lambda K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \varphi_0(y) dx dy \neq 0.$$

Satz IV\*. Der gleiche Satz gilt auch, wenn man von  $\left. \frac{\partial \lambda K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$  nur voraussetzt, daß für jede Eigenfunktion  $\varphi_0(x)$  von  $K(x, y; \lambda_0)$  zum Eigenwert  $\lambda_0$  die Integralform (4) von Null verschieden ist.

Bemerkungen. a) Die Bedingung (4) ist übrigens gleichbedeutend mit

$$(4^*) \quad \iint \varphi_0(x) \left. \frac{\partial K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \varphi_0(y) dx dy \neq -\frac{1}{\lambda_0^2}.$$

b) Daß ein Wert  $\lambda = \lambda_0$  Häufungspunkt von Eigenwerten sein kann, ja sogar alle Werte  $\lambda_0$  gleichzeitig, zeigt der Kern

$$K(x, y; \lambda) = \frac{\varphi(x) \varphi(y)}{\lambda}$$

mit normiertem  $\varphi(x)$ . Denn hier ist die homogene Integralgleichung

$$\varphi(x) = \varphi(x).$$

Ersichtlich ist (4) und (4\*) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt. Ein allgemeineres Beispiel dieser Art bietet der symmetrische Kern

$$K(x, y; \lambda) = \frac{\varphi(x) \varphi(y)}{a} + K_1(x, y; \lambda) + f(\lambda) \varphi(x) \varphi(y)$$

mit normiertem  $\varphi(x)$  und  $\int K_1(x, y; \lambda) \varphi(x) dx = 0$ , wenn man setzt

$$\left[ f(\lambda) + \frac{1}{a} \right] \lambda = 1, \quad \text{d. h. } f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{a} = \frac{a - \lambda}{a \cdot \lambda}.$$

Satz V. Voraussetzung. In dem abgeschlossenen Bereich  $\mathfrak{B}$  der komplexen  $\lambda$ -Ebene sei  $K(x, y; \lambda)$  in allen drei Veränderlichen stetig und in  $\lambda$  eindeutig und regulär analytisch.

Behauptung. Die Eigenwerte des Kernes  $K(x, y; \lambda)$  haben keinen Häufungspunkt in  $\mathfrak{B}$ , falls nicht jeder Wert  $\lambda$  aus  $\mathfrak{B}$  Eigenwert zu  $K(x, y; \lambda)$  ist.

Beweis. Bei festem  $x$  gibt es zu dem Kern  $K(x, y; x)$  einen lösenden Kern

$$(5) \quad \Gamma_x(x, y; \lambda) = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} d_r(x, y; x) \lambda^r}{\sum_{r=0}^{\infty} d_r(x) \lambda^r} = \frac{D_x(x, y; \lambda)}{D_x(\lambda)},$$

wobei die Nullstellen des Fredholmschen Nenners  $D_*(\lambda) = 0$  die Eigenwerte von  $K(x, y; \kappa)$  liefern und Zähler und Nenner ganze transzendente Funktionen von  $\lambda$  sind. Da

$$d_r(\kappa) = \frac{(-1)^r}{r!} \int_{(\nu)} \dots \int \begin{vmatrix} K(\alpha_1, \alpha_1; \kappa) & \dots & K(\alpha_1, \alpha_r; \kappa) \\ \vdots & & \vdots \\ K(\alpha_r, \alpha_1; \kappa) & \dots & K(\alpha_r, \alpha_r; \kappa) \end{vmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_r,$$

$$d_r(x, y; \kappa) = \frac{(-1)^r}{r!} \int_{(\nu)} \dots \int \begin{vmatrix} K(\alpha_1, \alpha_1; \kappa) & \dots & K(\alpha_1, \alpha_r; \kappa) & K(\alpha_1, y; \kappa) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ K(\alpha_r, \alpha_1; \kappa) & \dots & K(\alpha_r, \alpha_r; \kappa) & K(\alpha_r, y; \kappa) \\ K(x, \alpha_1; \kappa) & \dots & K(x, \alpha_r; \kappa) & K(x, y; \kappa) \end{vmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_r,$$

$$d_0(\kappa) = 1, \quad d_0(x, y; \kappa) = K(x, y; \kappa)$$

gilt, sind alle  $d_r(\kappa)$  und  $d_r(x, y; \kappa)$  in  $\mathfrak{B}$  regulär analytische Funktionen von  $\kappa$ . Setzt man in (5)  $\kappa = \lambda$ , so ist ersichtlich

$$(6) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} d_r(x, y; \lambda) \lambda^r}{\sum_{r=0}^{\infty} d_r(\lambda) \lambda^r}$$

der lösende Kern zu  $K(x, y; \lambda)$  in dem Sinne, daß die Auflösung der Integralgleichung (2) an jeder Stelle, wo der Nenner  $D(\lambda) \neq 0$  ist, geliefert wird durch

$$z(x) = f(x) + \lambda \int \Gamma(x, y; \lambda) f(y) dy.$$

Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz sind aber Zähler und Nenner von (6) in  $\mathfrak{B}$  regulär analytische Funktionen von  $\lambda$ . Die Eigenwerte  $\lambda$  von  $K(x, y; \lambda)$  in  $\mathfrak{B}$  sind die Nullstellen von  $D(\lambda)$ . Diese können sich in  $\mathfrak{B}$  dann und nur dann häufen, wenn  $D(\lambda)$  identisch verschwindet.

Die folgenden beiden Aussagen sind einfache Spezialfälle dieses Satzes.

**Satz VI.** Voraussetzung. a)  $K(x, y; \lambda)$  sei eine in  $\lambda$  meromorphe Funktion, deren Polstellen von  $x, y$  unabhängig sind; für alle von den Polstellen verschiedenen Werte von  $\lambda$  sei  $K(x, y; \lambda)$  in allen drei Veränderlichen stetig.

b)  $\lambda = 0$  sei keine Polstelle von  $K(x, y; \lambda)$ .

**Behauptung.** Die Eigenwerte von  $K(x, y; \lambda)$  können sich in der endlichen  $\lambda$ -Ebene höchstens an den Polstellen von  $K(x, y; \lambda)$  häufen.

**Beweis.** Der Satz folgt sofort aus Satz V, da  $\lambda = 0$  nicht Eigenwert von  $K(x, y; 0)$  ist.

**Satz VII.** Voraussetzung. a) Wie bei Satz VI.

b) In der Umgebung irgendeines reellen endlichen Wertes  $\lambda_0$  sei  $K(x, y; \lambda_0)$  reell für reelle  $\lambda$ , in allen drei Veränderlichen stetig und in  $x$  und  $y$  symmetrisch; ferner sei dort  $\frac{\partial \lambda K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda}$  in allen drei Veränderlichen stetig und an der Stelle  $\lambda_0$  ein eigentlich definiter reeller symmetrischer Kern.

**Behauptung.**  $K(x, y; \lambda)$  besitzt im endlichen mit Ausnahme höchstens der Polstellen keinen Häufungspunkt von Eigenwerten.

**Beweis.** Der Beweis folgt sofort aus Satz V und Satz IV, da  $\lambda_0$  nicht Häufungspunkt von reellen Eigenwerten sein kann.

**Bemerkung.** Ein sehr einfaches und lehrreiches Beispiel zu den vorigen Sätzen ist das folgende: Sei  $G(x, y)$  ein reeller symmetrischer Kern mit unendlich vielen Eigenwerten und sei  $G(x, y)$  in seine gleichmäßig konvergente Bilinearreihe entwickelbar:

$$G(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varphi_r(x) \varphi_r(y)}{\alpha_r}.$$

Der von  $\lambda$  abhängende Kern

$$K(x, y; \lambda) = \frac{1}{\lambda - a} G(x, y)$$

mit einer beliebigen Konstanten  $a$  besitzt dann  $\varphi_r(x)$  als Eigenfunktion zum Eigenwert

$$\lambda_r = a \frac{\alpha_r}{\alpha_r - 1}.$$

Ersichtlich häufen sich die Eigenwerte gegen die Polstelle  $a$  von  $K(x, y; \lambda)$ .

Ich schließe diesen Paragraphen mit folgendem Satz, der sich leicht auf den Fall einer mehrfachen Polstelle von  $K(x, y; \lambda)$  verallgemeinern ließe.

**Satz VIII.** Voraussetzung. Es sei mit einer komplexen Zahl  $a$

$$K(x, y; \lambda) = H(x, y; \lambda) + \frac{1}{\lambda - a} \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(x) \bar{\varphi}_r(y)}{\alpha_r};$$

dabei sei  $H(x, y; \lambda)$  in der Umgebung von  $\lambda = a$  in  $\lambda$  eindeutig und regulär analytisch und in allen drei Veränderlichen stetig; die Eigenwerte von  $H(x, y; \lambda)$  mögen nicht die ganze Umgebung von  $\lambda = a$  ausmachen. Die  $\varphi_r(x)$  seien normierte und zueinander orthogonale stetige Funktionen.

**Behauptung.**  $\lambda = a$  ist nicht Häufungspunkt von Eigenwerten von  $K(x, y; \lambda)$ , falls nicht alle Werte  $\lambda$  der Umgebung von  $a$  Eigenwerte sind.

**Beweis.** Verschwindet  $H(x, y; \lambda)$  in der Umgebung von  $\lambda = a$  nicht identisch, so gibt es dort nach dem Beweis zu Satz V dazu einen lösenden Kern  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , der eine bis auf Pole reguläre Funktion in  $\lambda$  ist mit sich in der Umgebung von  $\lambda = a$  nicht häufenden Polstellen. Die homogene Integralgleichung (2) schreibt sich dann

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{\lambda^2}{\lambda - a} \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(x)}{\alpha_r} \int \bar{\varphi}_r(y) z(y) dy \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{\lambda - a} \iint \Gamma(x, y; \lambda) \sum_{r=1}^n \frac{\bar{\varphi}_r(y)}{\alpha_r} \bar{\varphi}_r(Y) z(Y) dY dy. \end{aligned}$$

Kürzt man ab

$$z_r = \int \bar{\psi}_r(y) z(y) dy,$$

multipliziert mit  $\bar{\psi}_r(x)$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) und integriert, so erhält man  $n$  lineare homogene Gleichungen für diese  $z_r$ ; die Koeffizientendeterminante hat offenbar die Form

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{11}(\lambda) & \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{12}(\lambda) & \dots & \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{1n}(\lambda) \\ \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{21}(\lambda) & 1 + \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{22}(\lambda) & \dots & \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{n1}(\lambda) & \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{n2}(\lambda) & \dots & 1 + \frac{\lambda}{\lambda-a} b_{nn}(\lambda) \end{vmatrix},$$

wo die  $b_{\mu\nu}(\lambda)$  in der Umgebung von  $\lambda = a$  bis auf höchstens endlich viele Pole regulär sind. Die gleiche Aussage gilt daher für die Determinante selbst. Die Nullstellen dieser Determinante können sich daher nicht in der Umgebung von  $\lambda = a$  häufen, es sei denn, daß die Determinante identisch verschwindet. Damit ist unser Satz bewiesen. — Verschwindet  $H(x, y; \lambda)$  identisch in der Umgebung von  $\lambda = a$ , so führt der analoge Schluß ohne Einführung des lösenden Kernes  $\Gamma(x, y; \lambda)$  zum Ziel.

### § 3.

#### Realität der Eigenwerte.

Im allgemeinen ist bei den hier studierten Kernen die Realität der Eigenwerte natürlich nicht gesichert. So besitzt ja z. B. der Kern

$$K(x, y; \lambda) = \lambda G(x, y),$$

wenn  $G(x, y)$  den negativen Eigenwert  $-\kappa^2$  besitzt, die imaginären Eigenwerte  $\pm i\kappa$ . Ich beweise hier nur folgenden

Satz IX. Voraussetzung. Es sei

$$(7) \quad K(x, y; \lambda) = G(x, y) + \sum_r H_r(x, y) \frac{a_r \lambda + b_r}{c_r \lambda + d_r},$$

mit reellen  $a_r, b_r, c_r, d_r$  und  $a_r d_r - b_r c_r > 0$ ; alle  $H_r(x, y)$  seien stetige reelle symmetrische positiv definite Kerne,  $G(x, y)$  eine beliebige reelle stetige Funktion, die in  $x$  und  $y$  symmetrisch ist; die auftretende Summe möge, falls sie unendlich viele Summanden besitzt, in jedem endlichen Bereich der  $\lambda$ -Ebene, der keinen

Punkt  $\lambda = -\frac{d_r}{c_r}$  enthält, gleichmäßig konvergieren<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup>  $\frac{a_r \lambda + b_r}{c_r \lambda + d_r}$  ist übrigens im Falle  $a_r d_r - b_r c_r > 0$  die allgemeinste konforme

Abbildung der oberen Halbebene auf sich; im Falle  $a_r d_r - b_r c_r = 0$  artet die gebrochene lineare Funktion in eine Konstante aus, so daß ein derartiger Summand in  $G(x, y)$  hineingenommen werden könnte.

Behauptung.  $K(x, y; \lambda)$  besitzt nur reelle Eigenwerte <sup>4)</sup>.

Beweis. Seien  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  zwei konjugiert komplexe Eigenwerte,  $\varphi(x)$  und  $\bar{\varphi}(x)$  die zugehörigen Eigenfunktionen. Dann folgt wegen

$$\int \varphi(x) \bar{\varphi}(x) dx \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) = \iint \varphi(x) \bar{\varphi}(y) [K(x, y; \lambda) - K(x, y; \bar{\lambda})] dx dy$$

nach Division durch 2 i-mal dem Imaginärteil von  $\lambda$

$$- \frac{1}{|\lambda|^2} \int \varphi(x) \bar{\varphi}(x) dx = \sum \frac{a_r d_r - b_r c_r}{|c_r \lambda + d_r|^2} \iint \varphi(x) \bar{\varphi}(y) H_r(x, y) dx dy.$$

Hier ist die linke Seite negativ, die rechte dagegen positiv oder höchstens Null; denn mit  $\varphi(x) = \Phi(x) + i\Psi(x)$  wird ja

$$\begin{aligned} \iint \varphi(x) \bar{\varphi}(y) H_r(x, y) dx dy &= \iint \Phi(x) H_r(x, y) \Phi(y) dx dy \\ &+ \iint \Psi(x) H_r(x, y) \Psi(y) dx dy \geq 0. \end{aligned}$$

Aus dem aufgewiesenen Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes IX.

#### § 4.

##### Anwendung auf die Kerne des Herrn Miranda.

Die in Satz IX behandelten Kerne (7) sind für manche Fragestellungen doch noch recht unbequem, falls die auftretende Summe unendlich viele Glieder besitzt. Die Schwierigkeiten bereiten die Häufungspunkte der Polstellen von  $K(x, y; \lambda)$ , die ja ohne weitere Voraussetzungen sogar die gesamte reelle  $\lambda$ -Achse erfüllen können. Um solchen Schwierigkeiten zu entgehen, wollen wir im folgenden stets nur endlich viele Summanden zulassen.

Satz X. Voraussetzung.  $\alpha)$  Es sei

$$(8) \quad K(x, y; \lambda) = G(x, y) + \sum_{r=1}^N H_r(x, y) \frac{a_r \lambda + b_r}{c_r \lambda + d_r},$$

mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes IX.

$\beta)$  Überdies existiere ein genügend großer positiver Wert  $\kappa > -\frac{d_r}{c_r}$  für alle  $r$  derart, daß

$$K(x, y; \kappa) = G(x, y) + \sum_{r=1}^N H_r(x, y) \frac{a_r \kappa + b_r}{c_r \kappa + d_r},$$

unendlich viele positive Eigenwerte besitzt; die gleiche Aussage gelte für

$$K(x, y; \infty) = G(x, y) + \sum_{r=1}^N \frac{a_r}{c_r} H_r(x, y).$$

<sup>4)</sup> Unser Kern (7) enthält die Kerne (1) des Herrn Miranda.

Bemerkung. Die Voraussetzung  $\beta$  ist für die Kerne (1) von Miranda erfüllt, wenn  $G(x, y)$  unendlich viele positive Eigenwerte besitzt, da für genügend großes  $\kappa$  die Differenz  $K(x, y; \kappa) - G(x, y)$  ein positiv definiter Kern ist, so daß die Eigenwerte von  $K(x, y; \kappa)$  also links von denen von  $G(x, y)$  liegen <sup>5)</sup>.

Behauptung Xa.  $K(x, y; \lambda)$  besitzt unendlich viele positive Eigenwerte.

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus Satz II, wenn man beachtet, daß

$$K(x, y; \lambda_1) - K(x, y; \lambda_2) = \sum_{r=1}^n \frac{(a_r d_r - b_r c_r) (\lambda_1 - \lambda_2)}{(c_r \lambda_1 + d_r) (c_r \lambda_2 + d_r)} H_r(x, y),$$

also für  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \kappa$  ein positiv definiter Kern ist <sup>6)</sup>.

Behauptung Xb. Die Eigenwerte von  $K(x, y; \lambda)$  sind alle reell und häufen sich in der endlichen  $\lambda$ -Ebene höchstens an den Stellen  $\lambda = -\frac{d_r}{c_r}$ , d. h. an den Polstellen von  $K(x, y; \lambda)$ .

Beweis. Die Realität der Eigenwerte folgt sofort aus Satz IX. Aus Satz VI ersieht man die Richtigkeit der Restbehauptung Xb, falls alle  $d_r \neq 0$  sind. Wäre ein  $d_r = 0$ , so bliebe als andere Möglichkeit nur die, daß alle  $\lambda$  der ganzen komplexen  $\lambda$ -Ebene Eigenwerte sind; das geht aber nicht, da ja nach Satz IX  $K(x, y; \lambda)$  keine komplexen Eigenwerte besitzt.

Satz XI. Voraussetzung. Wie bei Satz X. Dazu: Die  $H_r(x, y)$  seien Polynomkerne.

Behauptung. Die Eigenwerte von  $K(x, y; \lambda)$  häufen sich nicht in der endlichen  $\lambda$ -Ebene.

Beweis. Nach Satz X braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die Polstellen von  $K(x, y; \lambda)$  nicht Häufungspunkte von Eigenwerten sein können. Das folgt aber sofort aus Satz VIII.

Wir schließen diesen Paragraphen mit folgendem

Satz XII. Voraussetzung. Nur die Voraussetzung  $\alpha$  des Satzes X. Dazu die Voraussetzung  $\gamma$ ): Alle  $d_r$  seien von Null verschieden.

<sup>5)</sup> Ganz allgemein folgt übrigens, daß mit  $G(x, y)$  jeder Mirandasche Kern (1) bei festgehaltenem  $\lambda = \lambda_0$  unendlich viele Eigenwerte besitzt. Denn sonst wäre ja darstellbar

$$K(x, y; \kappa) = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(x) \varphi_r(y)}{\lambda_r};$$

da aber alle  $H_r(x, y)$  Polynomkerne sind, würde gelten

$$G(x, y) = \sum_{r=1}^m c_r \varphi_r(x) \varphi_r(y),$$

so daß auch  $G(x, y)$  als Kern vom Polynomtypus nur endlich viele Eigenwerte besitzen könnte.

<sup>6)</sup> Entsprechendes im Falle unendlich vieler negativer Eigenwerte.

Behauptung.  $K(x, y; \lambda)$  besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

Beweis<sup>7)</sup>. Da

$$\frac{\partial K(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{r=1}^N \frac{a_r d_r - b_r c_r}{(c_r \lambda + d_r)^2} H_r(x, y)$$

ein positiv definiten Kern ist, nehmen mit wachsendem  $\lambda$  die Eigenwerte  $\lambda$  von  $K(x, y; \lambda)$  stets ab. Geht  $\lambda$  wachsend durch eine Nennernullstelle  $\lambda = -\frac{d_r}{c_r}$  hindurch, so geht der absolut kleinste Eigenwert von  $K(x, y; \lambda)$  von positiven Werten durch Null zu negativen Werten über, wie sofort aus der Extremumseigenschaft der Eigenwerte folgt. (An den Stellen  $\lambda = -\frac{d_r}{c_r}$  selbst wird nichts ausgesagt!) — Wir betrachten die dem Nullpunkt am nächsten gelegene Stelle  $\lambda = -\frac{d_v}{c_v}$ .

A. Ist  $-\frac{d_v}{c_v} < 0$ , so lassen wir  $\lambda$  von  $-\frac{d_v}{c_v}$  nach 0 laufen. Ist  $\lambda$  ein wenig größer als  $-\frac{d_v}{c_v}$ , so ist der absolut kleinste Eigenwert  $\lambda_1$  von  $K(x, y; \lambda)$  dicht vor 0 gelegen und fällt monoton mit wachsendem  $\lambda$ . Außerdem ist dies  $\lambda_1(\lambda)$  eine stetige Funktion von  $\lambda$ . Daher muß es eine negative Zahl  $\lambda_0$  geben derart, daß  $\lambda_1(\lambda_0) = \lambda_0$  ist; d. h.  $\lambda_0$  ist Eigenwert von  $K(x, y; \lambda)$ . —

B. Ist  $-\frac{d_v}{c_v} > 0$ , so lasse man  $\lambda$  von  $-\frac{d_v}{c_v}$  nach 0 abnehmen. Für  $\lambda$  kurz vor  $-\frac{d_v}{c_v}$  ist der absolut kleinste Eigenwert  $\lambda_1$  dicht hinter 0 gelegen, und  $\lambda_1(\lambda)$  wächst stetig mit abnehmendem  $\lambda$ , so daß wir diesmal zu einem positiven Eigenwert  $\lambda_0$  von  $K(x, y; \lambda)$  gelangen.

Bemerkung. Ist  $\lambda = 0$  ein Pol von  $K(x, y; \lambda)$ , so braucht unser Satz nicht richtig zu sein. So hat z. B. der Kern

$$K(x, y; \lambda) = -\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{\lambda}$$

mit normiertem  $\varphi(x)$  überhaupt keinen Eigenwert. — Satz XII, einschließlich des Beweisganges, läßt sich natürlich leicht übertragen auf allgemeinere Kerne als die hier in Betracht gezogenen.

<sup>7)</sup> Zusatz bei der zweiten Korrektur: In der Arbeit von B. Manià: *Autovalori di nuclei dipendenti dal parametro* (Ann. della Scuola Norm. Sup.-Pisa, 1939, S. 89–104), die mir soeben in die Hände kommt, findet sich prinzipiell der gleiche Schluß in weiterer Ausgestaltung.

ACKERMANN-  
TEUBNERPREIS  
1938.

Der für das Jahr 1938 fällige Ackermann-Teubnerpreis  
(für Analysis) ist dem ordentlichen Professor Dr. Erich  
Hecke, Hamburg, für seine funktionentheoretischen  
Arbeiten zuerkannt worden. Die Erteilung erfolgte ge-  
mäß dem Statut auf Grund der Leistungen der letzten  
16 Jahre.

## Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig

Was war der Zweck der berühmten Antinomien des Zenon? Nach der landläufigen Meinung, die wohl auf Elias<sup>1)</sup> zurückgeht, wollte Zenon die Möglichkeit der Bewegung widerlegen. Demgegenüber hat Paul Tannery<sup>2)</sup> im Rahmen seiner naturphilosophischen Deutung der eleatischen Philosophie geltend gemacht, daß Zenon doch kein Skeptiker sei. Zenon habe keineswegs die Bewegung verneint, sondern sein Ziel sei, die Pythagoreische These zu widerlegen, nach der die Körper, die Flächen und die Linien Vielheiten, nämlich Vielheiten von Punkten seien. In diesem Sinne aufgefaßt, erscheinen ihm die Argumente Zenons „nets, pressants, irréfutables“ und in ihrem Erfolg durchschlagend.

Von diesen Anschauungen Tannerys sind die Philologen inzwischen (aus guten Gründen, wie sich zeigen wird) allgemein abgekommen, aber eine Reihe von Philosophen und Mathematikern haben sie freudig aufgenommen und weiter ausgestaltet. So schien Zenon eine immer größere Bedeutung für die Geschichte der Mathematik zu erlangen, indem er angeblich weit verbreitete infinitesimale Schlußweisen als Fehlschlüsse entlarvt und so den Weg für die exakte Mathematik des vierten Jahrhunderts vorbereitet habe.

Am schärfsten pointiert, um nicht zu sagen dramatisiert, tritt diese Auffassung bei Hasse und Scholz<sup>3)</sup> hervor, die ein lebendiges und auf den ersten Blick sehr ansprechendes Bild von einer Grundlagenkrise der Mathematik im frühen fünften Jahrhundert entwerfen, in dem Zenon die zentrale Rolle spielt. Sie stellen die Hypothese auf, daß „die Pythagoreer“, die ihre These „Alles ist Zahl“ durch die Entdeckung des Irrationalen gefährdet sahen, diese These durch die Auffassung einer Strecke als Aggregat von unendlich vielen unendlich kleinen Teilstrecken retten wollten. Sie vermuten weiter, daß auch die Mathematik auf den gefährlichen Seitenweg des „Unendlichkleinen“ geraten war. Sie behaupten schließlich, daß Zenon durch seine unerbittliche Kritik die Mathematik wieder in die Bahn der wissenschaftlichen Strenge zurückgerufen hat. Zenon, der „unter dem Einfluß der Autorität des Aristoteles über zwei Jahrtausende nur als ein scharfsinniger Sophist und Urheber von geistreichen

<sup>1)</sup> Vgl. Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker, Zenon A 15.

<sup>2)</sup> P. Tannery, *Pour l'histoire de la science hellène*. Paris 1887.

<sup>3)</sup> H. Hasse u. H. Scholz, Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. Berlin, Pan-Bücherei, 1928.

Trugschlüssen gegolten hat“, sei in Wirklichkeit „der Schicksalsmensch der antiken Mathematik in der Stunde ihrer größten Krisis“.

Verschiedene Mathematikgeschichtler, wie Enriques und Dyksterhuis, haben sich, mit mehr oder weniger Reserve, den Anschauungen von Tannery, Hasse und Scholz angeschlossen. Ich glaube aber, die Unhaltbarkeit dieser Hypothesen, soweit sie Zenon und seine Zeit betreffen, nachweisen zu können. Die Pythagoreerfrage lasse ich dabei ganz außer Betracht, da ich davon zu wenig verstehe. Das Verhältnis Zenons zum Unendlichkleinen und zur Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik kann aber, wie ich glaube, unabhängig davon geklärt werden.

Unter „Infinitesimalmathematik“ verstehe ich jede Verwendung einer fingierten Zerlegung der Raumgrößen (Strecken, Flächen usw.) in unendlich kleine Teile zu mathematischen Herleitungen. Ich werde nun in doppelter Weise zeigen, daß Zenon und die Infinitesimalmathematik nichts miteinander zu tun haben. Zuerst wird der Nachweis von der Philosophie des Zenon her geführt. Es wird gezeigt, daß die Tannerysche Interpretation zu dem, was wir authentisch von der eleatischen Philosophie wissen, in Widerspruch steht, daß sich bei genauer Betrachtung in den überlieferten Zenonfragmenten keine Spur von einer Polemik gegen die Zerlegung einer Strecke in kleinste oder unendlich kleine Teile findet, und daß die Worte des Aristoteles sogar direkt gegen eine solche Auffassung der Zenonschen Antinomien sprechen. In diesem Teil der Beweisführung lehne ich mich eng an das vorzügliche Werk von Calogero<sup>4)</sup> an. Calogero hat gezeigt, daß man die Absichten Zenons von der eleatischen Philosophie her viel besser verstehen kann als von der Infinitesimalhypothese aus. Zenon war weder ein Sophist, noch ein „Schicksalsmensch der antiken Mathematik“, sondern ein eleatischer Philosoph und Dialektiker, was die Antike auch niemals bezweifelt hat.

Der zweite Nachweis geht von der Mathematik aus. Es wird untersucht, welchen Inhalt eine Infinitesimalmathematik zur Zeit Zenons haben könnte, welche Probleme den Anlaß zur Anwendung von Infinitesimalmethoden hätten geben können, und welche historischen Hinweise auf solche Methoden wir haben, alles mit eindeutig negativem Ergebnis. Es gibt keine historische Nachricht über eine Infinitesimalmathematik vor 450, und es ist auch in keiner Weise einzusehen, wieso und wozu es eine solche Mathematik geben sollte.

Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik hat in der Tat nichts mit Zenon zu tun und ist vermutlich viel später zu datieren. Sie geht nicht von der Widerlegung des Infinitesimalen, sondern von der Entdeckung des Irrationalen aus. Ich werde noch genauer zeigen, wie die Entdeckung des Irrationalen die Mathematik am Anfang des vierten Jahrhunderts zu einer radikalen Revision ihrer Begriffe und Umgestaltung der Methoden zwang.

<sup>4)</sup> Calogero, Studi sull' eleatismo, Publ. Scuola di Filos. di Roma. 1932.

Zum besseren Verständnis der folgenden Ausführungen füge ich hier eine kleine Zeittafel ein.

*Zeittafel.*

Zenon von Elea	± 465,	
Hippokrates von Chios		} eine Generation später.
Demokritos von Abdera		
Archytas von Tarent		} ± 400,
Theodoros von Kyrene		
Theaitetos von Athen	† 367,	
Eudoxos von Knidos	† 355,	
Eudemos (Schüler des Aristoteles),		
Euklid	± 300,	
Archimedes	† 212.	

§ 1.

**Die Antinomien der Bewegung.**

„Zénon n'a nullement nié le mouvement (ce n'est pas un sceptique), il a seulement affirmé son incompatibilité avec la croyance de la pluralité“ schreibt Tannery. Ähnlich meinen Hasse und Scholz, daß es Zenon nicht um die Leugnung der Bewegung zu tun ist, sondern: „Diese Paradoxie“ (des fliegenden Pfeils) „hat die ad absurdum zu führende Voraussetzung einer Zeitstrecke als eines Aggregats von unendlich vielen Zeitpunkten zur Voraussetzung.“

Nach diesen (und erstaunlich vielen anderen) Autoren hätte also Zenon folgendermaßen geschlossen: Wenn die Hypothese der Vielheit (etwa die Auffassung einer Raum- oder Zeitstrecke als einer Vielheit von kleinsten Teilen) richtig wäre, so wäre keine Bewegung möglich; *da wir aber sehen, daß Bewegung stattfinden kann*, ist die Hypothese der Vielheit zu verwerfen.

Aber so kann Zenon unmöglich geschlossen haben, betont Calogero mit Recht. Zenon kann nicht von der Realität der Bewegung als feststehender Tatsache ausgegangen sein, da er als Eleat diese Realität unmöglich anerkennen konnte<sup>5)</sup>! Zenon ist doch (nach dem Zeugnis Platons im Dialog Parmenides)

<sup>5)</sup> Mit beißendem Spott schreibt Calogero (S. 114—115): „Ma l'assurdo di questa interpretazione si chiarisce immediatamente, appena si pensi che, a questo modo, Zenone sarebbe venuto a dire che l'unica maniera di poter giustificare la realtà del moto era quella di negare il molteplice e di ammettere l'uno: solo l'uno, cioè, poteva veramente muoversi! Che sarebbe stato, davvero, un modo singolare di venire in soccorso dell'immobilità dell'ente parmenideo. Eppure, per strano ch'è paia, questo tipo di collocazione sistematica della polemica zenoniana è pur quello che, esplicito o implicito, appare in molti dei più autorevole e moderni interpreti, anche se spesso accostato o confusi con altri motivi critici con esso in realtà inconciliabili.“

ein treuer Schüler des Parmenides, und Parmenides behauptet in seinem authentischen Lehrgedicht ausdrücklich, daß das Seiende sich nicht bewegt, oder an anderer Stelle noch deutlicher, daß jede Veränderung des Ortes ein leerer Name, eine bloße Einbildung der Sterblichen sei<sup>6)</sup>.

So wie Tannery ihn deutet, hat Zenon es also bestimmt nicht gemeint. Aber was war dann seine Absicht? Eine gewisse Schwierigkeit ergibt sich aus dem bestimmten Zeugnis Platons (im Parmenides), Zenon wolle mit seiner Schrift *ausschließlich* die Hypothese der Vielheit widerlegen, und alle seine verschiedenen Beweisgründe dienten nur dem einen Zweck. Wollte man in aller Strenge daran festhalten, so bliebe (nach Calogero) nur die Annahme übrig, daß die überlieferten vier Bewegungsaporien zusammen nur das eine Glied einer Antinomie bilden, indem in ihnen gezeigt wird, daß das Seiende, wenn es Vieles ist, sich nicht bewegen kann. Im anderen (nicht überlieferten) Teil der Antinomie müßte dann gezeigt werden, daß das Seiende, wenn es Vieles ist, auch nicht ruhen kann. Diese Auffassung erscheint aber recht gezwungen; es liegt viel näher, die Äußerung der Platonischen Dialogperson Zenon mit einem Körnchen Salz zu genießen und anzunehmen, wie es das spätere Altertum auch immer getan hat, daß Zenon, um die Thesen seines Lehrers allseitig zu stützen, seinen vielen Beweisgründen gegen die Vielheit noch vier Beweisgründe gegen die Möglichkeit der Bewegung hinzufügte. Diese ungezwungene Interpretation steht auch am besten in Einklang mit den Worten: „Vier sind die Argumente Zenons über die Bewegung“, mit denen Aristoteles seinen Bericht über die vier Bewegungsaporien anhebt.

Da dieser Bericht des Aristoteles unsere einzige Quelle für die Bewegungsaporien darstellt, wollen wir ihn wörtlich zitieren<sup>7)</sup>.

Ζήνων δὲ παραλογίζεται· εἰ γὰρ αἰεὶ, φησὶν, ἥρεται πᾶν ᾧ κινεῖται, <οὐδὲν δὲ κινεῖται>, ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον, ἔστι δ' αἰεὶ τὸ φερόμενον ἐν ταῖς νῦν, ἀκίνητον τὴν φερόμενὴν εἶναι διστόν.

Zenon macht einen Fehlschluß; denn wenn, sagt er, immer alles entweder in Ruhe oder in Bewegung ist, (aber nichts in Bewegung sein kann), wenn es sich in einem mit ihm selbst gleichen Raume aufhält, wenn ferner das Bewegte jeweils im Jetzt ist, dann müßte der in Bewegung befindliche Pfeil unbewegt sein.

<sup>6)</sup> H. Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker, Parmenides B 8. Die zitierte Stelle heißt wörtlich: τῷ παντί ὄνομα(α) ἔστιν, ὅσα βροτοὶ κατέθεντο πιπιδότας εἶναι ἀληθῆ, . . . καὶ τόπον ἀλλόθεν . . .

<sup>7)</sup> Text nach Diels, Fragmente. Die Übersetzung wurde mir von Herrn Gadamer freundlichst zur Verfügung gestellt.

τοῦτο δ' ἐστὶ ψεῦδος· οὐ γὰρ σύγκειται ὁ χρόνος ἐκ τῶν νῦν τῶν ἀδιαίρετων, ὥσπερ οὐδ' ἄλλο μέγεθος οὐδέν.

τέτταρες δ' εἰσὶν οἱ λόγοι περὶ κινήσεως Ζήνωνος οἱ παρέχοντες τὰς δυσκολίας τοῖς λύουσιν, πρῶτος μὲν ὁ περὶ τοῦ μὴ κινεῖσθαι διὰ τὸ πρότερον εἰς τὸ ἡμῖς δεῖν ἀφικέσθαι τὸ φερόμενον ἢ πρὸς τὸ τέλος, περὶ οὗ διείλομεν ἐν τοῖς πρότερον λόγοις.

δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς. ἐστὶ δ' οὗτος ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θεὸν ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἐμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἔλθειν τὸ διώκον, ὅθεν ὠρμησε τὸ φεύγον, ὥστ' αἰετὶ προέχειν ἀναγκαῖον τὸ βραδύτερον. ἐστὶ δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῷ διχοτομεῖν, διαφέρει δ' ἐν τῷ διαίρειν μὴ δίχα τὸ προσλαμβάνομενον μέγεθος.

τρίτος δ' ὁ νῦν ῥηθείς, ὅτι ἡ διαιρέσις φερομένη ἐστῆκεν. συμβαίνει δὲ παρὰ τὸ λαμβάνειν τὸν χρόνον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν νῦν· μὴ διδομένου γὰρ τούτου οὐκ ἔσται ὁ συλλογισμός.

Dies aber ist falsch. Denn nicht ist die Zeit aus den unteilbaren Jetzt zusammengesetzt, ebenso wenig wie irgend eine andere GröÙe.

Vier sind die Argumente Zenons über die Bewegung, die den Auflösenden solche Schwierigkeiten bereiten: erstens das, welches die Bewegung leugnet, weil das Bewegte immer vorher bis zur Hälfte gekommen sein müsse als bis zum Ende — worüber wir in den vorangegangenen Erörterungen gesprochen haben.

Zweitens der sogenannte Achilles. Er lautet so, daß das langsamste Wesen in seinem Lauf niemals von dem allerschnellsten eingeholt werden könne. Vorher nämlich müÙte der Verfolger jedesmal notwendig erst dorthin kommen, von wo der Fliehende schon losgelaufen sei, so daß der Langsamere doch immer ein Stück voraus sein müsse. Auch dieses Argument ist mit dem der Halbierung identisch, nur darin besteht der Unterschied, daß die Teilung der jeweils neu hinzugenommenen Strecke nicht in zwei gleiche Teile erfolgt.

Das dritte ist das eben genannte, daß der fliegende Pfeil steht. Es folgt das aber nur von der Annahme her, daß die Zeit aus Jetztpunkten zusammengesetzt sei; wenn das nämlich nicht zugegeben wird, wird der ganze Beweis nicht herauskommen.

τέταρτος δ' ὁ περὶ τῶν ἐν σταδίῳ κινουμένων ἐξ ἐναντίας ἴσων ὄγκων παρ' ἴσους, τῶν μὲν ἀπὸ τέλους τοῦ σταδίου τῶν δ' ἀπὸ μέσου, ἴσῳ τάχει, ἐν ᾧ συμβαίνειν οἴεται ἴσον εἶναι χρόνον τῷ διπλασίῳ τὸν ἡμῖσιν. ἔστι δ' ὁ παραλογισμὸς ἐν τῷ τὸ μὲν παρὰ κινούμενον τὸ δὲ παρ' ἡρεμοῦν τὸ ἴσον μέγεθος ἀξιοῦν τῷ ἴσῳ τάχει τὸν ἴσον φέρεσθαι χρόνον. τοῦτο δ' ἐστὶ ψεῦδος. οἷον ἔστωσαν οἱ ἐστώτες ἴσοι ὄγκοι ἐφ' ὧν τὰ AA, οἱ δ' ἐφ' ὧν τὰ BB ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ μέσου τῶν A, ἴσοι τὸν ἀριθμὸν τούτοις ὄντες καὶ τὸ μέγεθος, οἱ δ' ἐφ' ὧν τὰ ΓΓ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου, ἴσοι τὸν ἀριθμὸν ὄντες τούτοις καὶ τὸ μέγεθος, καὶ ἰσοταχεῖς τοῖς B. συμβαίνει δὴ τὸ πρῶτον B ἅμα ἐπὶ τῷ ἐσχάτῳ εἶναι καὶ τὸ πρῶτον Γ, παρ' ἀλλήλα κινουμένων. συμβαίνει δὲ καὶ τὸ Γ παρὰ πάντα τὰ B διεξεληλυθέναι, τὰ δὲ B παρὰ τὰ <A> ἡμίση· ὥστε ἡμῖσιν εἶναι τὸν χρόνον· ἴσον γὰρ ἐκάτερόν ἐστι παρ' ἑκάστον. ἅμα δὲ συμβαίνει τὰ B παρὰ πάντα τὰ Γ παρεληλυθέναι· ἅμα γὰρ ἔσται τὸ πρῶτον Γ καὶ τὸ πρῶτον B ἐπὶ τοῖς ἐναντίοις ἐσχάτοις, ἴσον χρόνον παρ' ἑκάστον γινόμενον τῶν B ὅσον· περ τῶν A, ὡς φησι, διὰ τὸ ἀμφοτέρα ἴσον χρόνον παρὰ τὰ A γίνεσθαι.

Das vierte ist das über die sich im Stadion in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbeibewegenden gleich großen Teilchen, von denen die einen vom Ende des Stadion, die anderen von der Mitte aus mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegen sollen. Hier, meinte er, ergäbe sich, daß die halbe Zeit der doppelten Zeit gleich sei. Der Fehler liegt darin, daß man meint, die gleiche Größe bewege sich mit gleicher Geschwindigkeit in der gleichen Zeit ebenso an einer selber bewegten wie an einer stehenden Größe vorbei. Das aber ist falsch. Zum Beispiel seien AA die stehenden gleichen Teilchen, ferner BB von der Mitte her anfangende, mit den ersten gleich an Zahl und Erstreckung, schließlich ΓΓ vom Ende anfangende, ebenfalls an Zahl und Erstreckung diesen ersten gleich und gleich schnell wie die B. Dann ergibt sich offenbar, daß das erste B gleichzeitig am Ende ist wie das erste Γ, wenn sie sich aneinander vorbeibewegen. Es ergibt sich aber, daß zwar das Γ an allen B vorbeigekommen ist, das B aber nur an der Hälfte der A, so daß die Zeitdauer dieser Bewegung nur die halbe ist. Die gleiche Zeit benötigt ja ein jedes von ihnen im Vorbeimarsch an jedem einzelnen. Zugleich aber ergibt sich, daß das erste<sup>\*)</sup> B an allen Γ vorbeigekommen ist, denn gleichzeitig werden das erste Γ und das erste B an den entgegengesetzten Enden sein, weil beide in der gleichen Zeit an den A vorbeikommen.

<sup>\*)</sup> Im Text steht „die B“, was aber keinen Sinn ergibt.

Man hat vielfach versucht, in diese vier Beweisgründe eine Systematik etwa folgender Art hineinzubringen: In den ersten beiden wird die Annahme gemacht, eine Raum- oder Zeitstrecke sei unendlich teilbar, in den letzten beiden dagegen die, die Teilung führe einmal zu letzten, indivisiblen Teilen. Diese Systematik ist aber im überlieferten Text nicht zu finden, sondern erst von den Kommentatoren hineingebracht. Aristoteles zeigt zwar, daß die ersten beiden Aporien auf demselben Grundgedanken beruhen, aber doch nur, um sie gemeinsam widerlegen zu können („ὥστ' ἀνάγκη καὶ τὴν λύσιν εἶναι τὴν αὐτήν“). Zenon aber setzt die unendliche Teilbarkeit nicht voraus, sondern er beweist sie durch fortgesetzte Halbierung. Aus der schlichten Tatsache, daß jede Strecke eine Mitte besitzt, leitet er die Unendlichkeit ab, die er für seinen Beweis braucht. In der zweiten Aporie, dem Achilleus, konstruiert er in anderer Weise eine unendliche Folge von Augenblicken. Auch in anderen Zenonischen Aporien wiederholt sich dieses typische Schlußverfahren: Einerseits führt die Wiederholung eines bestimmten Schlusses zu einer unendlichen Folge, andererseits ist eine fertige, „seiende“ Unendlichkeit nicht denkbar (vgl. vor allem Fragment 3 bei Diels).

Auch beim fliegenden Pfeil ist die Voraussetzung, daß die Zeit eine Vielheit von Momenten sei, nicht im Text der Aporie zu finden, sondern erst in der Aristotelischen Auflösung. Aristoteles sagt: „Die Aporie beruht auf der Voraussetzung, daß die Zeit aus einzelnen Jetzt bestehe; wenn das aber nicht zugegeben wird, wird der ganze Beweis hinfällig.“ Diese Bemerkung ist, wie aus dem ganzen Zusammenhang hervorgeht, als Kritik gemeint, nicht als Wiederholung einer von Zenon ausdrücklich gemachten Voraussetzung. „Zenon macht einen Fehlschluß“, heißt es ja auch kurz vorher bei der Besprechung derselben Aporie. Das bewußte Ausgehen von einer falschen Voraussetzung, wie es beim indirekten Beweis immer geschieht, ist (auch für Aristoteles) kein Fehlschluß. Bei Zenon ist von einer Zerlegung der Zeitspanne in einzelne Momente, soviel wir wissen, nicht die Rede<sup>9)</sup>.

<sup>9)</sup> In der Tat kann man nach Calogero, auch ohne eine solche Zerlegung voraussetzen, Zenon sehr gut verstehen. Für ihn, wie für Parmenides, ist Sein = jetzt sein. Ein Werden und ein Gewordenes gibt es nicht; das Werden ist mit dem Begriff des Seins unverträglich. Von dieser Grundüberzeugung der elatistischen Philosophie kann Zenon aber bei seiner Beweisführung nicht ausgehen, denn sie ist ja erst durch die Aporie zu beweisen. Wohl aber kann er davon ausgehen, daß Sein = jetzt sein ist, denn das liegt für ihn in der Wortbedeutung selbst. Da nun der Pfeil im Jetzt nicht von der Stelle kommt, kann er sich jetzt nicht bewegen. Da er aber immer im Jetzt ist, muß er dauernd ruhen. Diese Deutung hat den Vorteil, daß sie nichts hineininterpretiert, was nicht im Aristotelischen Text ausdrücklich dasteht. Die Widerlegung des Aristoteles geht von der entgegengesetzten Grundüberzeugung aus, wonach Sein bedeutet Sein in der Zeit. Demgemäß fragt Aristoteles: Wieso soll daraus, daß der Pfeil jetzt nicht von der Stelle kommt, folgen, daß er auch mit der Zeit nicht von der Stelle kommt? Der Schluß wäre doch nur berechtigt, wenn

Es ist sehr verständlich, daß die Philosophen, die sich um die Auflösung der Zenonischen Paradoxien bemühten, dabei auf die Frage nach der Natur des Kontinuierlichen stießen, oder daß umgekehrt diejenigen, die die Natur des Kontinuums bestimmen wollten, genötigt waren, sich mit den Zenonischen Aporien auseinanderzusetzen. Auch Zenon mag sich über das Kontinuum Gedanken gemacht haben, aber die Bestimmung der Natur des Kontinuierlichen war sicherlich nicht das Ziel seiner Beweisführungen, sondern er bediente sich der Gegenüberstellung des Zeit- und des Raumkontinuums nur als Mittel, um eine Unendlichkeit zu erhalten und damit zu einem Widerspruch zu kommen.

Oder sollte es sich anders verhalten mit jenem teilweise authentischen Fragment, in dem Zenon die räumliche Natur des als Vielheit vorausgesetzten Seienden untersucht, um zu zeigen, daß man sich dabei in Widersprüche verwickelt? Wir geben hier den Text, wie er sich bei Simplikios findet, mit der Übersetzung von Kranz unter Berücksichtigung einer Bemerkung aus der Rezension von O. Becker (Quellen u. Studien Bd. 4, S. 153).

1. Simpl. Phys. 140, 34. τὸ δὲ κατὰ μέγεθος [nämlich ἀπειρον ἔδειξε] πρότερον κατὰ τὴν αὐτὴν ἐπιχειρήσιν. προδείξας γὰρ ὅτι 'εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη', ἐπάγει 'εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθος τι ἔχειν καὶ πᾶχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἔξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὁμοιον δὲ τοῦτο ἀπαξ τε εἰπεῖν καὶ δεῖ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. οὕτως εἰ πολλὰ ἔστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρὰ τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἀπειρα εἶναι'.

1. Das der Größe nach Unendliche legte er vorher (vor fr. 3) nach demselben Beweisgang dar. Er zeigt zuerst, daß wenn das Seiende keine Größe besitze, es auch nicht sei. Dann fährt er so fort: Wenn es aber ist, so muß notwendigerweise ein jeder Teil eine gewisse Größe und Dicke und Abstand der eine vom anderen haben. Und von dem vor jenem liegenden Teile gilt dieselbe Behauptung. Auch dieser wird nämlich Größe haben und es wird ein anderer vor ihm liegen. Die gleiche Behauptung gilt nun ein für allemal<sup>9a)</sup>. Denn kein derartiger Teil desselben (des Ganzen) wird die äußerste Grenze bilden, und nie wird der eine ohne Beziehung zum anderen sein. Wenn also viele Dinge sind, so müssen sie

die Zeit aus einzelnen Jetzt zusammengesetzt wäre. Läßt man das aber nicht gelten, so entfällt auch die Schlussfolgerung.

<sup>9a)</sup> Herr Bessel-Hagen macht mich aufmerksam, daß der Text viel prägnanter ist: „Es ist nun ungefähr dasselbe, dieses einmal zu sagen und es immer wieder zu sagen“. Er bemerkt dazu, daß hier (vermutlich zum ersten Mal) das Prinzip der vollständigen Induktion ausgesprochen erscheint.

2. Simpl. Phys. 139, 5. ἐν μέντοι τῷ συγγράμματι αὐτοῦ πολλά ἔχοντι ἐπιχειρήματα καθ' ἑκαστον δείκνυσιν, ὅτι τῷ πολλά εἶναι λέγοντι συμβαίνει τὰ ἐναντία λέγειν· ὧν ἐν ἑστίν ἐπιχείρημα, ἐν ᾧ δείκνυσιν ὅτι 'εἰ πολλά ἐστί, καὶ μεγάλα ἐστί καὶ μικρά· μεγάλα μὲν ὥστε ἄπειρα τὸ μέγεθος εἶναι, μικρά δὲ οὕτως ὥστε μηθὲν ἔχειν μέγεθος' [B 1]. ἐν δὴ τούτῳ δείκνυσιν, ὅτι οὐ μήτε μέγεθος μήτε πάχος μήτε ὄγκος μηθείς ἐστιν, οὐδ' ἂν εἴη τοῦτο. 'εἰ γὰρ ἄλλωι ὄντι, φησί, προσγένοιτο, οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσκειν· μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος, προσγενομένου δέ, οὐδὲν οἶόν τε εἰς μέγεθος ἐπιδοῦναι. καὶ οὕτως ἂν ἤδη τὸ προσγινόμενον οὐδὲν εἴη. εἰ δὲ ἀπογινομένου τὸ ἕτερον μηδὲν ἐλαττον ἐστὶν μηδὲ αὐτὸ προσγινόμενον αὐξήσεται, δῆλον ὅτι τὸ προσγεγόμενον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογεγόμενον'. καὶ ταῦτα οὐχὶ τὸ ἐν ἀναιρῶν ὁ Ζήνων λέγει, ἀλλ' ὅτι μέγεθος ἔχει ἑκαστον τῶν πολλῶν καὶ ἀπείρων τῷ πρὸ τοῦ λαμβανομένου δεῖ τι εἶναι διὰ τὴν ἐπ' ἀπείρων τομὴν· ὃ δείκνυσιν προδείξας, ὅτι οὐδὲν ἔχει μέγεθος ἐκ τοῦ ἑκαστον τῶν πολλῶν ἑαυτῷ ταῦτόν εἶναι καὶ ἐν.

notwendig zugleich klein und groß sein: klein bis zur Nichtigkeit, groß bis zur Grenzenlosigkeit.

2. In seiner Schrift, die viele Beweisgänge enthält, zeigt er in jedem, daß wer die Vielheit behauptet, sich Widersprechendes sagt. So ist einer dieser Beweisgänge folgender. Er will zeigen, daß „wenn Vieles ist, dies zugleich groß und klein sein muß, und zwar groß bis zur Grenzenlosigkeit und klein bis zur Nichtigkeit“ [B 1]. Darin sucht er nun zu zeigen, daß ein Ding, das weder Größe noch Dicke noch Masse besitzt, überhaupt nicht sein könne. Denn würde es zu einem anderen Seienden zugefügt (so lauten seine Worte), so würde es dieses um nichts vergrößern. Denn wird etwas, was keine Größe hat, einem anderen Ding hinzugefügt, so kann dieses an Größe nichts gewinnen. Und so wäre denn bereits der Zuwachs Nichts. Wenn ferner durch Abziehen das andere um nichts kleiner und andererseits durch Zufügen nicht größer werden wird, so war offenbar das Zugefügte wie das Abgezogene nichts. Und dies führt Zenon nicht aus, um das Eine aufzuheben, sondern weil ein jedes der vielen und unendlichen Dinge Größe haben muß. Denn vor jedem einzelnen, das man nimmt, muß stets wieder irgendein anderes sein wegen der Teilung ins Grenzenlose. Dies legt er dar, nachdem er zuvor gezeigt, daß nichts Größe besitzt, weil jedes der vielen Dinge mit sich selbst identisch und eins ist.

Der Text ist leider etwas dunkel. Wir geben zunächst die Interpretation von Hasse und Scholz wieder:

„Wenn es zulässig ist, eine Strecke als ein Aggregat von unendlich vielen, unendlich kleinen Elementarstrecken aufzufassen, so sind zwei und nur zwei Fälle möglich. Entweder haben jene Elementarstrecken eine endliche, von Null verschiedene Größe. Dann wird die aus ihnen zusammengesetzte Strecke unendlich groß sein müssen; denn ein Aggregat von unendlich vielen Elementarstrecken von endlicher Größe übersteigt jede endliche Strecke. Oder die angenommenen Elementarstrecken sind Nullstrecken im strengen Sinne des Wortes. Dann ist auch die aus ihnen zusammengesetzte Strecke eine Nullstrecke; denn eine Zusammenstellung von Nullstrecken kann immer wieder nur eine Nullstrecke liefern, gleichviel wie groß die Anzahl der hierbei verwendeten Strecken ist.“

Wo Zenon eine Vielheit von Dingen mit räumlicher Ausdehnung betrachtet, erblicken die Interpreten eine Strecke. Wo Zenon (an zwei Stellen bei Simplicios übereinstimmend) schreibt „*zugleich klein und groß: klein bis zur Größelosigkeit, groß bis zur Unendlichkeit*“ heißt es hier „*entweder Null oder unendlich groß*“. Die Behauptung „unendlich klein“ wird hier in die Voraussetzung hereingenommen (eine Voraussetzung, die übrigens nicht benutzt wird). Die Unendlichkeit der Anzahl, die Zenon erst mühsam beweist, wird hier ebenfalls als Voraussetzung eingeführt. Usw.

Vergleicht man ganz phantasielos die beiden Fragmente, so sieht man, daß sie sich beide auf dieselbe Beweisführung beziehen. Was bewiesen werden soll, ist in beiden Fragmenten dasselbe, nämlich: *Wenn Vieles ist, so ist dieses zugleich klein und groß: klein bis zur Größelosigkeit, groß bis zur Unendlichkeit*. Auch die einzelnen Beweisschritte finden sich in beiden Fragmenten wieder, nur sind einzelne Teile des Beweises im 1. Fragment, andere im 2. Fragment ausführlicher dargestellt. Im *ersten Beweisschritt* wird gezeigt: Jedes von den Vielen hat, sofern es ein Seiendes ist, auch Größe. So steht es klar formuliert in Fragment 1, und näher ausgeführt im Fragment 2, Zeile 11–28 (Zeile 10–30 der Übersetzung). Der *zweite Beweisschritt* will zeigen, daß vor jedem Einzelnen wieder ein Anderes liegt und so fort ins Unendliche. Er findet sich ausführlich formuliert in Fragment 1, Zeile 9–16 (Zeile 10–19 der Übersetzung), während in Fragment 2 Simplicios das Ergebnis nur kurz zusammenfaßt: „Denn vor jedem einzelnen, das man nimmt, muß stets wieder irgendein anderes sein.“ Dazu kommt der zunächst unklare Zusatz „wegen der Teilung ins Grenzlose“, dessen Wortlaut ebenfalls von Simplicios herrührt, und der daher zunächst außer Betracht bleiben möge. Im wörtlichen Fragment 1 folgt auf den zweiten Beweisschritt gleich die Formulierung des Endergebnisses. Das ist auch ganz in der Ordnung, denn aus der unendlichen Anzahl der seienden Dinge und daraus, daß jedes Einzelne eine bestimmte Größe hat, folgt für

Zenon offenbar direkt, daß das Ganze der unendlich vielen Dinge eine unendliche Größe hat.

Im Fragment 1 wird demnach nur die zweite Teilbehauptung, das „groß bis zur Unendlichkeit“ bewiesen. Das stimmt auch zu der vorausgeschickten Ankündigung: „Das der Größe nach Unendliche legt er vorher nach demselben Beweisgang dar.“

Wo bleibt nun der Beweis der ersten Teilbehauptung, des „klein bis zur Größelosigkeit“? Es scheint, daß dieser Beweis im letzten Satz des 2. Fragmentes angedeutet ist: „nachdem er zuvor gezeigt, daß nichts Größe besitzt, weil jedes der vielen Dinge mit sich selbst identisch und eins ist“. Die Andeutung ist allerdings so dunkel, daß es mir unmöglich scheint, daraus einen Beweis zu rekonstruieren. Vielleicht gehört auch der bisher beiseite gelassene Nachsatz „wegen der Teilung ins Grenzenlose“ eher in diesen Zusammenhang hinein, denn durch Teilung ins Grenzenlose würde man eventuell auf Teilchen stoßen, die „klein bis zur Nichtigkeit“ wären. Jedoch diese Interpretation ist so unsicher, daß es ratsam scheint, keinerlei Schlüsse daraus zu ziehen. Gesichert sind eben nur die zwei oben herauspräparierten Beweisschritte.

Diese aber geben nicht den geringsten Anhaltspunkt dafür, daß die Frage der „kleinsten Teile“ des Seienden irgendwie zur Diskussion stand. Es ist nur von den „seienden Dingen“, ihrer Größe und ihrer Dicke und Abstand von anderen, aber nicht von ihrer Unteilbarkeit die Rede. außer in dem unklaren Nachsatz „wegen der Teilung ins Grenzenlose“. Aber sogar dieser Nachsatz läßt sich nicht so deuten, daß Zenon von der Annahme der „indivisiblen Teile“ ausgegangen wäre, um sie zu widerlegen, denn er beruft sich ganz im Gegenteil (wenn der Nachsatz echt sein soll) auf die Teilung ins Grenzenlose.

Schließlich noch eines: Wenn die Zenonischen Beweisgründe den Zweck hätten, die Zerlegung geometrischer Größen in kleinste Teile zu widerlegen, so wäre Zenon in diesem Punkte völlig einer Meinung mit Aristoteles, der im gleichen Buch Z der Physik mit allem Nachdruck darlegt, daß das Kontinuierliche nicht aus Unteilbarem bestehen kann (Physik Z 1). Wie wäre es dann zu erklären, daß Aristoteles dem Zenon immerfort  $\psi\epsilon\upsilon\delta\omicron\varsigma$  (Physik Z 2) und  $\pi\acute{\alpha}\rho\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$  (ebenda Z 9, zweimal) vorwirft und ihn ausführlich zu widerlegen sucht?

## § 2.

### Die Infinitesimalmathematik.

Wenn nun Zenon aber doch die „Indivisiblen“, die unendlich kleinen Größen bekämpft hätte, konnten die damaligen Mathematiker sich davon betroffen fühlen? Konnte es dadurch zu einer „Grundlagenkrise“ kommen?

Fragen wir einmal ganz nüchtern: In welchen Teilen der klassischen Geometrie kann man unendlich kleine Größen mit Vorteil benutzen? Die

Antwort: Bei der Berechnung von Rauminhalten, Flächeninhalten und Bogenlängen und bei der Konstruktion von Tangenten. Sonst meines Wissens nirgends.

Fangen wir bei den Tangenten an. Die Tangente eines Kreises ist leicht genug zu finden, auch ohne Infinitesimalbetrachtungen. Und höhere Kurven gehörten, soweit sie damals (im 5. Jahrhundert!) schon betrachtet wurden, zur höheren Mathematik, nicht zu den Grundlagen. Wenn man ihre Tangenten noch nicht konstruieren konnte, so war das jedenfalls kein Grund zur Aufregung oder gar zu einer Krisis.

Ebenso kann es sich bei der Bogenlänge nur um Kreisbogen, also in erster Linie um den Kreisumfang handeln. Die einfachsten Inhaltsbestimmungen, zu denen man Infinitesimalbetrachtungen gut gebrauchen kann, sind die des Kreises und der Pyramide. Gleichzeitig mit dem Flächeninhalt des Kreises erhält man auch den Kreisumfang, sowie den Inhalt des Zylinders, und mit derselben Methode wie die Pyramide kann man auch den Kegel behandeln. Das ist aber auch alles: weiter ist man vor Archimedes überhaupt nicht gekommen.

Also im wesentlichen Kreisfläche und Pyramideninhalt. Genau auf diese beiden Probleme hat man nun auch, wie die Überlieferung lehrt, die Infinitesimalmethode angewandt. Berichten doch Aristoteles<sup>10)</sup> und Simplicios<sup>11)</sup> über die Kreisquadratur des Sophisten Antiphon, die darin bestand, daß er in den Kreis ein regelmäßiges Polygon mit immer mehr Seiten einbeschrieb, bis diese Seiten mit dem Kreisumfang zusammenfielen. Und Archimedes stellt fest<sup>12)</sup>, daß Demokritos den Satz entdeckt hat, daß die Pyramide gleich dem dritten Teil des Prismas auf derselben Basis und mit derselben Höhe ist, allerdings ohne einen wissenschaftlichen Beweis dafür zu geben. Es ist nicht ganz klar, ob die Mitteilung Archimedes' sich auch auf den Kegel bezieht. Nimmt man noch den Bericht des Plutarchos<sup>13)</sup> hinzu, nach dem Demokritos die Frage aufgeworfen hat, ob beim Schnitt eines Kegels mit Ebenen parallel zur Basis die Flächen der Schnitte gleich oder ungleich seien (im letzten Fall würde nämlich der Kegel treppenförmig werden, im ersten Fall hätte er Zylindergestalt), so wird es wohl sehr wahrscheinlich, daß Demokritos sich bei seiner Herleitung des Pyramiden- oder Kegelinhalt der Methode der Zerlegung in unendlich dünne Scheiben bedient hat. Ob er die Herleitung selbst als schlüssigen Beweis betrachtet hat, steht nicht fest.

<sup>10)</sup> Aristoteles, *Physica* I, 2, 185a, S. 14.

<sup>11)</sup> Simplicii in *Aristot. Phys. comm.* ed Diels, 54, 20—55, 11.

<sup>12)</sup> Archimedes, *Ephodos* 430.

<sup>13)</sup> Plutarchos, *De communibus notitiis adversus Stoicos*, *Scripta Moralis* II (ed Dübner) 1321.

Bekanntlich hat dann Eudoxos die Inhaltsbestimmung der Pyramide und des Kegels ohne Infinitesimalbetrachtungen exakt durchgeführt<sup>14)</sup>. Die Infinitesimalmethode lebte, wenn auch nicht offiziell anerkannt, weiter und wurde noch von Archimedes als heuristisches Prinzip benutzt<sup>15)</sup>.

Könnte nun jemand vor Demokrit schon den Pyramideninhalt in ähnlicher Weise bestimmt haben? Dieser Annahme steht zunächst einmal die bestimmte Mitteilung des Archimedes entgegen. Aber nehmen wir es für einen Augenblick trotzdem an, könnte dann Zenons Kritik gegen diese Infinitesimalbetrachtung gerichtet sein? Es ist nicht anzunehmen, denn die Zenonische Schrift hat ganz gewiß großes Aufsehen erregt, und die Herleitung des Pyramideninhaltes mußte durch seine Kritik allgemeine Bekanntheit erlangt haben. Wie sollte es dann dem Demokrit möglich sein, eine Entdeckung, die so im Brennpunkt der Aufmerksamkeit stand, für seine eigene auszugeben?

Als letzte Möglichkeit einer Infinitesimalmathematik, gegen die Zenons Kritik gerichtet sein könnte, bliebe somit nur die Bestimmung der Kreisfläche und die Herleitung der Beziehung zwischen Kreisfläche und Kreisumfang. Es handelt sich also um die Sätze, daß die Kreisfläche proportional dem Quadrat des Durchmessers und gleich dem halben Produkt aus Kreisumfang und Radius ist. Diese Sätze können in der Tat „bewiesen“ werden, indem man den Kreis als Polygon mit unendlich vielen Seiten betrachtet, und es wäre immerhin möglich, daß eine solche Betrachtung nicht erst von dem Sophisten Antiphon, sondern schon vor Zenon aufgestellt worden wäre. Aber es handelt sich hier um eine bloße Möglichkeit, eine reine Phantasiekonstruktion: Nichts deutet darauf hin, daß es sich wirklich so verhalten hat. Außerdem gibt es noch Einwände genug. Wie käme z. B. Antiphon dazu, eine von Zenon endgültig widerlegte Betrachtungsweise von neuem aufzunehmen?

Nein, das Verhältnis zwischen Zenon und der Hypothese der Indivisibilen ist zeitlich und logisch umzukehren. Die Zenonischen Beweisgründe sind es, die spätere Denker dazu gebracht haben, eine Zerlegung der geometrischen Größen in kleinste Teile anzunehmen, um so den Aporien zu entgehen. So stellt es die peripatetische Schrift *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* dar, die in ihrem ersten Teil (Aristoteles Opera II, 968a) die Scheingründe für die Existenz unteilbarer Linien darstellt und dabei schreibt: „Ferner nötigt der Zenonische Beweis zur Annahme einer unteilbaren Größe“. So berichten nach Simplicios<sup>16)</sup> auch Alexandros und Porphyrios, daß Xenokrates durch die Schlüsse Zenons zu der Annahme veranlaßt wurde, daß die wiederholte Teilung einer geometrischen Größe schließlich nach endlich vielen Schritten zu solchen Teilen führen würde, die zwar noch Größe haben, aber nicht mehr geteilt werden

<sup>14)</sup> Siehe Archimedes, *De sphaera et cylindro*, sowie Euklid, *Elemente*, Buch 12.

<sup>15)</sup> Archimedes, *Ephodos*.

<sup>16)</sup> Simplicii in *Aristot. Phys.* 138, 10 und 140, 6.

können, also zu Körperatomen, Flächenatomen und Linienatomen. Ebenso wie Aristoteles und andere Zeitgenossen scheint also Xenokrates beim Versuch der Auflösung der Zenonischen Paradoxien dazu gekommen zu sein, die Natur des Kontinuums zu untersuchen, und kam dabei, soweit die Berichte Vertrauen verdienen, zum geometrischen Atomismus.

Ebenso ist ja überhaupt, nach dem ausdrücklicher Zeugnis des Aristoteles<sup>17)</sup>, der Atomismus historisch eine Reaktion auf die eleatische Philosophie, nicht umgekehrt. Die Schlüsse der Eleaten hatten die Realität von Werden und Vergehen in Frage gestellt; um nun trotzdem das Werden und Vergehen in der Sinnenwelt zu erklären, hat man die Existenz unvergänglicher Atome angenommen, die mit allen Eigenschaften des parmenideischen Einen ausgestattet wurden. Durch dieses Zeugnis ist, wie mir scheint, allen Spekulationen über einen frühen Pythagoreischen Atomismus, gegen den sich die eleatische Philosophie richten würde, der Boden entzogen.

Aus alledem ergibt sich nun, daß nicht der geringste Anhaltspunkt für die Annahme einer Infinitesimalmathematik oder eines geometrischen Atomismus zu Zenons Zeiten vorhanden ist, und daß eine solche Annahme auch in keiner Weise paßt zu dem, was wir sonst von der Geschichte der Mathematik und des Atomismus wissen. Folglich werden die Zenonischen Beweisgründe auch nicht gegen eine solche Lehre gerichtet sein.

Diese Schlußfolgerung steht mit der auf ganz anderem Wege gewonnenen des § 1 in vollem Einklang.

Sollte der Leser durch das Vorangehende noch nicht überzeugt sein, sondern doch annehmen, daß die Zenonische Kritik gegen irgendeine Art von Indivisibillienlehre gerichtet sein könnte, so wird er doch wenigstens das zugeben müssen, was sich aus den mathematischen Entwicklungen am Anfang dieses Paragraphen ergibt, nämlich daß durch die Zenonische Kritik unmöglich eine Grundlagenkrise der Mathematik veranlaßt werden konnte; denn die mathematischen Anwendungen der Indivisibillien gehören nicht zu den Grundlagen der damaligen Mathematik, sondern sie könnten sich höchstens auf den Umfang und die Fläche des Kreises beziehen.

### § 3.

#### Die Krisis des Irrationalen.

Man soll mich nicht mißverstehen: Ich leugne nicht, daß es eine Grundlagenkrise in der griechischen Mathematik gegeben hat. Ich leugne nur, daß diese Krisis vom Problem des Unendlichkleinen ausgegangen ist und daß Zenon etwas mit ihr zu tun gehabt hat.

<sup>17)</sup> Aristoteles, Über Entstehen und Vergehen, Buch A, Kap. 2.

Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik war nach meiner Meinung keine philosophische, sondern eine innermathematische Angelegenheit, und sie hat von der Entdeckung des Irrationalen ihren Ausgang genommen. Durch die Entdeckung des Irrationalen war man genötigt, die Auffassung aufzugeben, daß alle Strecken durch Zahlen dargestellt werden können, eine Auffassung, die für die ganze Struktur der babylonischen und der frühgriechischen Mathematik bestimmend war. Man war genötigt, die Algebra, die unbekümmert Strecken und Zahlen durcheinandergeworfen hatte, in eine geometrische Algebra zu verwandeln und sie von der Zahlentheorie sauber zu trennen. Man war genötigt, sich nach einer neuen Definition des Verhältnisbegriffs umzusehen und neue Beweise für die Lehre von den ähnlichen Figuren zu suchen.

Zur Begründung dieser These muß ich zunächst an die hochentwickelte babylonische Algebra erinnern, wie sie in ungebrochener Kontinuität in den mathematischen Keilschrifttexten von der frühen Hammurapizeit bis zur Seleukidenzeit uns entgegentritt<sup>18)</sup>. In diesen Texten sind in der Tat Geometrie und Algebra in der Weise vermischt, daß die Terminologie meistens der Geometrie entnommen, der Gedankeninhalt aber immer algebraisch ist. Alle die „Längen“, „Breiten“, „Höhen“ und „Flächen“, die in den Texten vorkommen, sind nicht nur als geometrische Größen, sondern gleichzeitig und hauptsächlich als Zahlen aufzufassen, was sich unter anderem darin zeigt, daß sie ohne Rücksicht auf ihre Dimension addiert und multipliziert werden<sup>19)</sup>.

Dieses Wechselspiel von Geometrie und Algebra setzt die Grundüberzeugung voraus, daß alle geometrischen Größen sich durch Zahlen darstellen lassen. Bei einem leistungsfähigen Zahlensystem, wie es das sumerisch-babylonische ist, trifft das auch praktisch zu: Jede Strecke läßt sich mit beliebiger Genauigkeit durch eine sexagesimal geschriebene Zahl darstellen. Daß man sich unter Umständen mit einer genäherten Darstellung begnügt hat, zeigt das Beispiel der babylonischen Annäherung  $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$ .

Aber auch das Bruchsystem der griechischen Logistik war reichhaltig genug, um jede Größe genähert darzustellen. Daher ist die Hypothese berechtigt, daß man auf den Frühstufen der griechischen Mathematik ebenso selbstverständlich wie in der babylonischen jede Strecke als durch eine Zahl darstellbar angenommen hat. Überhaupt: Daß man jede Strecke messen kann, ist für das vorwissenschaftliche oder frühwissenschaftliche Denken

<sup>18)</sup> Siehe vor allem O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte, Quellen und Studien* A 3 (1935).

<sup>19)</sup> Siehe z. B. den Text A 0 8862 (Neugebauer, a. a. O., S. 108) oder Strassb. 362 (a. a. O., S. 239).

(auch für unsere heutige Schuljugend und für die moderne Naturwissenschaft außer der Sphäre der exakten Mathematik) vollkommen selbstverständlich. Der Quellennachweis, den wir weiter unten führen werden, ist nicht dazu da, diese Selbstverständlichkeit für das frühgriechische Denken näher zu erhärten, sondern vielmehr, um festzustellen, zu welcher Zeit das griechische Denken angefangen hat, die Darstellbarkeit von geometrischen Größen durch Zahlen und damit die universelle Anwendbarkeit der Rechenkunst auf Geometrie zu bezweifeln.

Die Voraussetzungen für diesen Zweifel sind erst dann gegeben, wenn *erstens* der Anspruch absoluter Genauigkeit an die Geometrie gestellt wird, und wenn *zweitens* die Existenz irrationaler Streckenverhältnisse bekannt ist; denn wenn alle Strecken rational wären, wären sie durch die ganzen und gebrochenen Zahlen der griechischen Logistik ohne weiteres darstellbar. *Drittens* ist erforderlich, daß aus der Erkenntnis der Irrationalität die logische Konsequenz gezogen wird, daß Strecken nicht universell durch Zahlen darstellbar sind und daher auch nicht ohne weiteres wie Zahlen behandelt werden dürfen. Die dritte Forderung ist keineswegs überflüssig oder selbstverständlich; die meisten Vertreter der abendländischen Wissenschaft z. B. haben die Darstellbarkeit von geometrischen Größen durch Zahlen nie bezweifelt, obwohl sie mit der Existenz von irrationalen Verhältnissen bekannt waren und obwohl man vor Dedekind und Cantor nicht über den exakten modernen Begriff der „reellen Zahl“ verfügte. Die griechische Kultur ist meines Wissens die einzige, die diese logische Konsequenz wirklich vollzogen hat.

Zu welcher Zeit die Entdeckung der Existenz irrationaler Streckenverhältnisse anzusetzen ist, darüber sind die Historiker geteilter Meinung. Während Zeuthen bis zuletzt die traditionelle Auffassung festgehalten hat, daß Pythagoras oder seine unmittelbaren Schüler zumindest um die Irrationalität des Verhältnisses der Quadratseite zur Diagonale gewußt haben müssen, nimmt Vogt<sup>20)</sup>, auf gute Quellen gestützt, an, daß die Entdeckung der Irrationalität nicht lange vor 400 stattgefunden haben kann. Wir können diese alte Streitfrage zum Glück unentschieden lassen, denn worauf es jetzt ankommt, ist der Nachweis, daß die Konsequenzen aus der Tatsache der Irrationalität erst am Anfang des vierten Jahrhunderts gezogen worden sind. Es läßt sich nämlich zeigen, daß Hippokrates von Chios noch unbedenklich den naiven numerischen Verhältnisbegriff anwendet, und daß noch Archytas von Tarent die Anwendbarkeit der Rechenkunst auf geometrische Probleme nicht bezweifelt, sondern die mit Hilfe der Logistik geführten Schlüsse für voll beweiskräftig, sogar den geometrischen Schlüssen an Klarheit und Wissenschaftlichkeit überlegen hält.

<sup>20)</sup> Vogt, *Bibl. Math.* (3) 10 (1910), S. 97–155.

Das Archytasfragment spricht für sich selbst<sup>21)</sup>:

καὶ δοκεῖ ἃ λογιστικὰ ποτὶ τὴν  
σοφίαν τῶν μὲν ἄλλων τεχνῶν καὶ  
πολὺ διαφέρειν, ἀτὰρ καὶ τὰς γεω-  
μετρικὰς ἐναργεστέρῳ πραγματεύ-  
εσθαι ἃ θέλει

καὶ ἃ ἐκλείπει αὐτὰ γεωμετρία,  
καὶ ἀποδείξιας ἃ λογιστικὰ ἐπιτελεῖ

Und die Logistik hat, wie es scheint, in bezug auf Wissenschaft vor den anderen Künsten einen recht beträchtlichen Vorrang; besonders vor der Geometrie, da sie deutlicher als diese behandeln kann was sie will . . .

und wo die Geometrie wiederum versagt, bringt die Logistik Beweise zustande . . .

Das Fragment ist um so bemerkenswerter, als Archytas dem Kreise der Pythagoreer angehört, und gerade diese es sind, die (nach allen Zeugnissen übereinstimmend) die irrationalen Verhältnisse zuerst ans Licht gebracht haben.

Die Hippokrates-Stelle, die ich als weiteren Beleg anführen will, ist bekannt und findet sich am Anfang des Berichtes des Simplicios über die Mönchenquadraturen des Hippokrates<sup>22)</sup>. Simplicios zitiert hier „wörtlich“ (κατὰ λέξιν) Eudemos' Geschichte der Geometrie, aber mit erläuternden Zusätzen von Simplicios selbst, „von der Erinnerung an die Elemente Euklids“ her (ἀπὸ τῆς τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων ἀναμνήσεως). Es heißt dann an einer Stelle:

ὥς γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους  
ἔχουσιν, οὕτως καὶ τὰ ὅμοια τμήματα.  
ὅμοια γὰρ τμήματά ἐστι τὰ τὸ αὐτὸ  
μέρος ὄντα τοῦ κύκλου, ὅλον, ἡμι-  
κύκλιον ἡμικυκλίῳ καὶ τριτημόριον  
τριτημορίῳ.

Denn wie sich Kreise zueinander verhalten, so verhalten sich auch die ähnlichen Segmente. Ähnliche Segmente nämlich sind die, die denselben Teil des Kreises ausmachen, wie z. B. Halbkreis zu Halbkreis oder Drittelkreis zu Drittelkreis.

Es fragt sich nun, ob diese Stelle wörtlich aus Eudemos entnommen ist, oder einen Zusatz von Simplicios darstellt. Rudio und Zeuthen halten die Stelle für eudemisch, Tannery und Becker dagegen für einen Zusatz. Nun hat aber Dyksterhuis<sup>23)</sup> neuerdings auf Grund einer Überlegung, die ich für überzeugend halte, die eudemische Herkunft der Stelle dargetan. Dyksterhuis weist nämlich erstens darauf hin, daß Simplicios, wo er zur Erläuterung Definitionen anführt, diese immer aus Euklid schöpft. Er zitiert auch etwas später die euklidische Definition der ähnlichen Segmente als solche, die gleiche

<sup>21)</sup> Siehe Diels-Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker, Fragment B 4.

<sup>22)</sup> Simplicii in Arist. Phys. libr. quattuor comment., ed. Diels, S. 61, Berlin 1882. Oder F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen, S. 48. Leipzig 1907.

<sup>23)</sup> E. J. Dyksterhuis, De Elementen van Euklides I, S. 35. Groningen 1929.

Winkel enthalten; warum sollte er dann kurz vorher eine andere, vom nach-euklidischen Standpunkt weniger präzise Definition einschalten? Das zweite Argument ist, daß die Ausdrucksweise  $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$  bei Euklid konsequent nur für Zahlenproportionen und nur in den arithmetischen Büchern benutzt wird (und dann noch mit einem Zusatz:  $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma \eta \tau\acute{\alpha} \alpha\upsilon\tau\acute{\alpha} \mu\acute{\epsilon}\rho\eta$ ). Für die Verhältnisgleichheit allgemeiner Größen hat Euklid immer andere Ausdrücke ( $\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$  oder  $\alpha\upsilon\tau\acute{o}\nu \lambda\acute{o}\gamma\omicron\nu$  oder  $\acute{\omega}\varsigma \pi\acute{\rho}\omicron\varsigma \dots \omicron\upsilon\tau\acute{\omega}\varsigma \pi\acute{\rho}\omicron\varsigma$ ). Daher würde Simplicios, der seine Geometrie-Kenntnisse in erster Linie aus Euklid schöpft, und der unmittelbar vor dem Hinschreiben der fraglichen Stelle noch in seinem Euklid geblättert haben muß, von selbst nie dazu kommen, den ungenauen Ausdruck  $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$  zu benutzen.

Überhaupt weist der Ausdruck  $\tau\acute{o} \alpha\upsilon\tau\acute{o} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$  deutlich auf eine altertümliche (vor-eudoxische) Definition des Proportionsbegriffes hin. Die Proportion  $a : b = c : d$  bedeutet nach dieser alten Auffassung, daß  $a$  „derselbe Teil“ (z. B. die Hälfte oder ein Drittel) von  $b$  ist wie  $c$  von  $d$ . So tief verwurzelt war diese numerische Auffassung des Verhältnissbegriffs, daß noch Eudemos sie bedenkenlos von Hippokrates übernommen oder sogar (das kann man nicht entscheiden) von sich aus hingeschrieben hat.

Es zeigt sich also, daß Hippokrates in seinen (übrigens sehr exakten) Untersuchungen den naiven numerischen Verhältnissbegriff benutzt, und daß sogar noch Archytas die Rechenkunst der Geometrie voranstellt und logistische Beweismittel in der Geometrie zuläßt.

Wenige Jahrzehnte später hat sich das Blatt bereits gewendet: Theaitetos entwickelt seine Klassifikation der irrationalen Strecken, und bei Plato ist das Verhältnis zwischen Logistik und Geometrie vollständig umgekehrt. Die bisherige Logistik ist als Wissenschaft verpönt, die geometrischen Schlüsse sind die wahren Vorbilder exakter Beweisführung. Bei Euklid ist die Algebra vollends aus dem Bereich der offiziellen Geometrie verbannt und darf nur in geometrischem Gewande, als Flächenrechnung oder „geometrische Algebra“, ihr Dasein fristen.

Es ist Zeuthens großes Verdienst, die latente algebraische Komponente in der klassischen griechischen Mathematik, wie sie in den Büchern II und VI der Elemente und in den Kegelschnitten des Apollonius zu finden ist, aufgedeckt zu haben; von ihm stammt der bezeichnende Name „geometrische Algebra“. Neugebauer<sup>24)</sup> aber hat den historischen Zusammenhang zwischen der babylonischen und der griechischen Algebra nachgewiesen. Er zeigt nämlich, daß die elliptische und hyperbolische Anpassung bei Euklid, Buch VI (Prop. 28 und 29) vollständig zu erklären sind als geometrische Verkleidungen der altbabylonischen Lösungsformeln für quadratische Gleichungen.

<sup>24)</sup> O. Neugebauer, Zur geometrischen Algebra, Quellen u. Studien 3 (1936), S. 245–260.

Die Normalformen nämlich, auf die in der babylonischen Mathematik alle quadratischen Probleme zurückgeführt werden, sind Gleichungspaare in zwei Unbekannten:

$$(I) \quad \begin{cases} xy = F, \\ x + y = a; \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} xy = F, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Die babylonischen Lösungsformeln heißen

$$(I) \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - F}; \quad (II) \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + F} \pm \frac{a}{2}.$$

Die Euklidischen Flächenanlegungen nun stellen, im einfachsten Falle der Anlegungen mit quadratischem Exzeß oder Defekt, ebenfalls das Problem, ein Rechteck von gegebener Fläche  $xy = F$  zu errichten, dessen eine Seite  $x$  eine gegebene Strecke  $a$  teilweise bedeckt oder über  $a$  hinausragt, mit einem Defekt oder Exzeß gleich  $y$  (also mit  $x = a - y$  bzw.  $x = a + y$ ). Und die Lösung besteht (genau wie die babylonische) darin, daß die Fläche  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - F$  bzw.  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + F$  in ein Quadrat verwandelt wird, dessen Seite  $w$  vermöge

$$(I) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{2} + w \\ y = \frac{a}{2} - w \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad (II) \quad \begin{cases} x = w + \frac{a}{2} \\ y = w - \frac{a}{2} \end{cases}$$

die Lösung des Problems ergibt.

Die Formulierung bei Euklid ist etwas allgemeiner, indem dort statt eines Rechtecks ein Parallelogramm mit vorgegebenem Winkel, und statt eines Quadrates ein Parallelogramm von vorgegebener Form verwendet wird. Der vorhin behandelte Spezialfall hat aber sicherlich den Ausgangspunkt gebildet, wie man aus den Figuren zu Buch II, Prop. 5 und 6 ersehen kann, die das Prinzip dieser speziellen Flächenanlegung schon enthalten.

Zusammenfassend können wir sagen: Die Entdeckung der Irrationalität zwang die griechischen Mathematiker am Anfang des vierten Jahrhunderts, ihre Algebra, die eine Fortbildung der babylonischen Algebra bildete, von ihrem numerischen Ausgangspunkt loszulösen und in eine geometrische Algebra zu verwandeln.

Den Zeitpunkt und den Schauplatz dieser Umwandlung können wir noch näher bestimmen. Das 10. Buch Euklids, das die Klassifikation der Irrationalitäten behandelt, und das damit unmittelbar zusammenhängende 13. Buch über die regulären Polyeder werden aus guten Gründen allgemein dem Theaitetos zugeschrieben. Das 10. Buch benutzt aber durchweg die geometrische Algebra, während es von der Eudoxischen Proportionenlehre weitgehend unabhängig ist. Man kann nun nicht gut annehmen, daß Theaitetos, der sich gerade mit dem Begriff der Irrationalität so gründlich befaßt hat, die alte naive Algebra bedenkenlos auf irrationale Strecken übertragen hat. Also muß Theaitetos die geometrische Algebra entweder selbst geschaffen oder von einem anderen übernommen haben.

Proklos berichtet in seinem Euklid-Kommentar (ed. Friedlein, S. 419) unter Berufung auf Eudemos, daß die parabolische, hyperbolische und elliptische Flächenanlegung Erfindungen der Pythagoreer sind, und daß diese alten, götterähnlichen Männer jene Konstruktionen *παραβολή, υπερβολή* und *ἐλλειψις* nannten, welche Namen später auf die entsprechenden Kegelschnitte übertragen wurden. Diese Nachricht läßt zweierlei Deutung zu. Entweder die Pythagoreer haben tatsächlich die algebraische Lösungsformel der quadratischen Gleichungen ins Geometrische übertragen und sind somit als Schöpfer der geometrischen Algebra zu betrachten<sup>24a)</sup>. Oder sie haben nur die algebraische Lösungsformel überliefert, und die Übersetzung ins Geometrische ist das Werk eines späteren Forschers, etwa eines Zeitgenossen von Theaitetos. Dann kann man sich doch gut denken, daß dieser Forscher sich dessen bewußt war, daß die geometrischen Konstruktionen im Wesen mit den algebraischen, den Pythagoreern längst bekannten algebraischen Regeln identisch waren, und daß er diese Wesenidentität so ausgesprochen hat, daß die spätere Geschichtsschreibung daraus eine völlige Identität gemacht und die geometrischen Konstruktionen selbst den Pythagoreern zugeschrieben hat.

Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir die Pythagoreer als Vermittler der altbabylonischen Algebra an die griechische Welt zu betrachten haben, genau so wie sie ja auch den altbabylonischen „Pythagoreischen Lehrsatz“ in ihrer Tradition überliefert hatten. Sollten sie selbst schon aus dieser Algebra eine „geometrische Algebra“ gemacht haben, so kann diese Verwandlung doch, nach dem was wir gesehen haben, nicht gut vor Archytas ihren Abschluß gefunden haben. Hätten nämlich die Pythagoreer zu Archytas' Zeiten schon eine geometrische Algebra gehabt, wären sie also im Stande gewesen, wie Euklid und Apollonius, algebraische Schlüsse durch rein geometrische zu ersetzen, so wäre des Archytas Ausspruch über die Logistik, die „Beweise zustande bringt, wo die Geometrie versagt“, gänzlich unverständlich. Aber es scheint überhaupt recht unwahrscheinlich, daß die Pythagoreer die Urheber der Geometrisierung der Algebra waren, wo doch ihr ganzes Streben (soviel wir wissen) umgekehrt darauf ging, die Mathematik und Musik soweit als möglich zu arithmetisieren.

Eher wird die Geometrisierung der Pythagoreischen Mathematik in dem Augenblick erfolgt sein, als diese von dem Kreis um Plato aufgenommen und assimiliert wurde. Der platonische Dialog Theaitetos gibt eine recht anschauliche Schilderung, wie die Berührung zwischen diesen beiden Kulturkreisen zustande kam; wenn auch die historischen Einzelheiten nicht genau

<sup>24a)</sup> Es kann sich dabei nach dem Vorangehenden nur um spätere Pythagoreer (kurz vor Theaitetos) handeln. Man könnte z. B. an Theodoros von Kyrene denken. Die Worte des Theaitetos im Platonischen Dialog: „Theodoros entwarf eine Zeichnung von Quadraten“ deuten ja auf eine Art geometrische Algebra hin.

zuzutreffen brauchen, so wird Plato doch das Wesentliche richtig getroffen haben. Der Pythagoreer Theodoros von Kyrene kam also nach Athen und hielt dort einen Vortrag, in dem die Irrationalität von  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  usw. bis  $\sqrt{17}$  bewiesen wurde. Der junge Theaitetos reagierte darauf mit einer genauen Begriffsbestimmung und Klassifikation der irrationalen Strecken, die wir im 10. Buch Euklids vollendet wiederfinden. Die einzelnen Stufen, die bis zu dieser Vollendung durchlaufen werden mußten, schildert uns Plato nicht, aber sie lassen sich aus der mathematischen Notwendigkeit erschließen. Für die Begründung seiner Klassifikation der Irrationalitäten brauchte Theaitetos, wie wir sahen, algebraische Methoden. Diese gab es nun zwar, aber sie waren legitim nur auf Zahlen anwendbar, nicht auf irrationale Strecken. Also mußte die Algebra zuerst geometrisiert werden, was in der Tat mit Hilfe der Flächenrechnung gelang.

Bei den hohen Ansprüchen an die Exaktheit der Beweisführung, die man in diesem Kreise stellte, trat auch bald die Unhaltbarkeit des naiven Verhältnisbegriffs, den wir oben bei Hippokrates noch gefunden haben, ans Licht. Wiederum waren es die irrationalen Verhältnisse, an denen er scheiterte. Damit wurde aber einer der Grundpfeiler des bisherigen Lehrgebäudes der Mathematik (das wir uns etwa in den Elementen des Hippokrates verkörpern können) verbesserungsbedürftig. Nur ein Teil der damaligen Mathematik (etwa der Inhalt der ersten vier Bücher Euklids) ließ sich ohne den Verhältnisbegriff begründen. Die endgültige Rettung brachte bekanntlich die Proportionenlehre des Eudoxos, die im 5. Buch der Elemente dargestellt ist. Es hat aber, wie Zeuthen<sup>25)</sup> und Becker<sup>26)</sup> an Hand einer Aristoteles-Stelle<sup>27)</sup> gezeigt haben, sehr wahrscheinlich eine ältere Verhältnislehre gegeben, die auf dem Begriff der wechselseitigen Wegnahme ( $\delta\upsilon\tau\alpha\upsilon\alpha\lambda\epsilon\sigma\iota\varsigma$  oder  $\delta\upsilon\theta\upsilon\alpha\lambda\epsilon\sigma\iota\varsigma$ ) beruht, und die ebenso wie die Eudoxische Proportionenlehre sowohl rationale als irrationale Verhältnisse exakt zu behandeln gestattete.

Die Grundlagenkrise des anfangenden vierten Jahrhunderts verlief demnach in der Weise, daß die Kritik der alten Grundlagen mit der neuen Grundlegung Hand in Hand ging. Daher ist es auch zu keiner Erschütterung des Lehrgebäudes, zu keiner Skepsis in bezug auf die Sicherheit der mathematischen Schlüsse gekommen. Die Konstruktion der regulären Körper durch Theaitetos, die bewundernswürdigen Inhaltsbestimmungen des Eudoxos und so viele andere Spitzenleistungen bewirkten, daß die Mathematik dieser Zeit den Zeitgenossen nicht als kriselnder Kranker erschien, sondern mit Recht als eine der großartigsten Schöpfungen des griechischen Geistes gewürdigt wurde.

<sup>25)</sup> H. G. Zeuthen, Skifter Ak. Kopenhagen 1917. Vgl. auch E. J. Dyksterhuis, De Elementen van Euklides I, S. 70ff.

<sup>26)</sup> O. Becker, Quellen u. Studien 2 (1933), S. 311–333.

<sup>27)</sup> Aristoteles, Topica VIII, 3, S. 158 b, 29.

(Eingegangen am 4. 11. 1939.)

# Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie.

Von

Wilhelm Ackermann in Burgsteinfurt.

	Seite
Einleitung. . . . .	162
§ 1. Der Formalismus . . . . .	163
§ 2 Einige grundlegende Definitionen . . . . .	167
§ 3 Definition einer bestimmten Folge von Gesamtersetzungen . . . . .	169
§ 4. Eigenschaften der Folge der Gesamtersetzungen . . . . .	172
§ 5. Der Endlichkeitsbeweis. . . . .	175
§ 6. Rekursive Funktionen höherer Stufe . . . . .	178
§ 7. Definition einiger Rekursionsfunktionen . . . . .	181
§ 8. Abschätzung der Gesamtzahl der Gesamtersetzungen . . . . .	191

Das Ziel der folgenden Ausführungen ist, einen neuen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie zu geben. Ein derartiger Beweis ist, unter Benutzung eines besonderen Systems des Prädikatenkalküls, zuerst von G. Gentzen geliefert worden<sup>1)</sup>. Der vorliegende Beweis geht auf ältere Methoden zurück, mit denen ich seinerzeit unter Verfolgung eines ursprünglichen Hilbertschen Ansatzes einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie ausschließlich der vollständigen Induktion gegeben habe<sup>2)</sup>.

Bei diesem Beweis wurde ein Formalismus zugrunde gelegt, der statt der All- und Seinszeichen die Hilbertsche  $\varepsilon$ -Funktion verwendete. Der Grundgedanke des Beweises bestand darin, zu zeigen, daß man innerhalb der Beweis-

<sup>1)</sup> G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Annalen 112 (1936), S. 493—565; Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften Heft 4 (Deutsche Mathematik 1938).

<sup>2)</sup> Eine ausführliche Darstellung dieses Beweises nach meinen Mitteilungen findet sich in Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik II, § 2, 4. — Eine Skizze des Gedankenganges enthalten: D. Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik, und P. Bernays, Zusatz zu Hilberts Vortrag über die Grundlagen der Mathematik, beide erschienen in Bd. 6 (1928) d. Abhandl. d. Math. Sem. Hamburg. — In der Terminologie der vorliegenden Arbeit habe ich mich möglichst eng an den II. Band der Grundlagen der Mathematik angeschlossen.

figur die  $\varepsilon$  in geeigneter Weise so durch Zahlzeichen ersetzen konnte, daß alle Formeln der Beweisfigur in solche übergehen, die sich nach den Methoden der finiten Mathematik als „richtig“ erweisen lassen. Das Vorhandensein einer Schlußformel  $0 \neq 0$  und damit eines formalen Widerspruchs ist dann ausgeschlossen.

Die „richtigmachende“ Ersetzung für die  $\varepsilon$  konnte dabei nicht von vornherein angegeben werden, sondern es wurde rekursiv eine Folge von Ersetzungen definiert und der Beweis geführt, daß diese Folge nach endlich vielen Schritten zu einer Ersetzung der verlangten Art führt.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Beweismethode auf den Fall ausgedehnt, daß auch die vollständige Induktion bei den Beweisen Verwendung findet. Die Schwierigkeit, die sich bisher einer derartigen Ausdehnung dieser Methode in den Weg stellte, lag nicht darin, daß das rekursive Verfahren für die Bildung der aufeinanderfolgenden Ersetzungen eine besondere Umgestaltung benötigte — tatsächlich ist diese Ausdehnung leicht zu finden, übrigens auch schon in den „Grundlagen der Mathematik“, II. Bd. (a. a. O.) angegeben —, sondern allein in der Führung des genannten Endlichkeitsbeweises. Dieser Endlichkeitsbeweis steht in einer gewissen Parallele zu dem Endlichkeitsbeweis, der von Gentzen für die Endlichkeit seines Reduktionsverfahrens benutzt wurde. Es muß hier in ähnlicher Weise wie dort von der transfiniten Induktion für einen bestimmten Abschnitt der zweiten Zahlenklasse Gebrauch gemacht werden.

Der Verfasser glaubt weiter, daß die vorliegenden Ausführungen auch insofern Interesse haben, als sich ein methodischer Fortschritt in der Führung des Endlichkeitsbeweises ergibt. Es wird nämlich nicht nur für die Gesamtzahl der Schritte des betreffenden Verfahrens die Endlichkeit gezeigt, sondern es wird auch für sie eine obere Schranke angegeben, die von gewissen Konstanten der Beweisfigur abhängt; und zwar ist diese Abhängigkeit durch Rekursionsfunktionen gegeben. Diese Rekursionsfunktionen können natürlich, wie sich aus den bekannten Gödelschen Sätzen ergibt, nicht solche der bisher bekannten Art (d. h. solche mit primitiven oder verschränkten Rekursionen) sein, sondern es handelt sich um Rekursionen neuer Art, die aber jedenfalls ihren Namen verdienen, da sie für irgendwelche bestimmten Zahlen als Argumente nach endlich vielen Schritten den Wert der Funktionen für diese Argumente liefern.

### § 1.

#### Der Formalismus.

Um den Formalismus, dessen Widerspruchsfreiheit erkannt werden soll, zu beschreiben, haben wir zunächst die Begriffe „Formel“ und „Term“

zu definieren. Die Zeichen, mit deren Hilfe Formeln und Terme aufgebaut werden, sind folgende:

1. freie Zahlenvariable  $a, b, c, \dots$  <sup>\*)</sup>,
2. gebundene Zahlenvariable  $x, y, z, \dots$ ,
3. das Zeichen 0,
4. die Funktionszeichen  $\delta, ', +, \cdot$ ,
5. das Zeichen  $=$ ,
6. die logischen Zeichen  $—, \rightarrow$ ,
7. die Zeichen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots$ .

Die Begriffe „Formel“ und „Term“ werden nun durch simultane Induktion nach folgenden Regeln definiert:

1. 0 ist ein Term.
2. Ein Zeichen für eine freie Zahlenvariable ist ein Term.
3. Ist  $a$  ein Term, so sind auch  $a'$  und  $\delta(a)$  Terme.
4. Sind  $a$  und  $b$  Terme, so auch  $a + b$  und  $a \cdot b$ .
5. Sind  $a$  und  $b$  Terme, so ist  $a = b$  eine Formel.
6. Ist  $\mathfrak{A}$  eine Formel, so ist auch  $\bar{\mathfrak{A}}$  eine Formel.
7. Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Formeln, so ist auch  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  eine Formel.

8. Aus einer Formel, die eine freie Zahlenvariable enthält, entsteht ein Term in folgender Weise: Die freie Zahlenvariable wird an allen Stellen durch ein und dieselbe gebundene Zahlenvariable ersetzt, und zwar durch eine solche, die sonst in der Formel nicht vorkommt. Zugleich wird vor die Formel ein  $\varepsilon$  mit der gebundenen Variablen als Index gesetzt.

Wir haben weiter die folgenden *Schemata zur Bildung von Axiomen*:

### I. Axiomenschemata des Aussagenkalküls.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  seien Formeln ohne freie Zahlenvariable. Dann sind alle Formeln der folgenden Gestalt Axiome:

- |        |   |
|--------|---|
| (I, 1) | $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}),$   |
| (I, 2) | $(\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})) \rightarrow ((\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C})),$ |
| (I, 3) | $(\bar{\mathfrak{A}} \rightarrow \bar{\mathfrak{B}}) \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}).$  |

<sup>\*)</sup> In dem nachfolgenden Axiomensystem kommen übrigens keine Terme mit freier Variablen vor.

## II. Zahlentheoretische Axiomenschemata.

Sind  $a, b$  und  $c$  Terme ohne freie Zahlenvariable, so sind folgende Formeln Axiome:

- |          |  |
|----------|--|
| (II, 1)  | $a = a,$                                   |
| (II, 2)  | $a' = b' \rightarrow a = b,$               |
| (II, 3)  | $a \neq 0 \rightarrow [\delta(a)]' = a,$   |
| (II, 4)  | $a + 0 = a,$                               |
| (II, 5)  | $a + b' = (a + b)',$                       |
| (II, 6)  | $a \cdot 0 = 0,$                           |
| (II, 7)  | $a \cdot b' = a \cdot b + a,$              |
| (II, 8)  | $a = b \rightarrow a' = b',$               |
| (II, 9)  | $a = b \rightarrow \delta(a) = \delta(b),$ |
| (II, 10) | $a = b \rightarrow a + c = b + c,$         |
| (II, 11) | $a = b \rightarrow c + a = c + b,$         |
| (II, 12) | $a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c,$ |
| (II, 13) | $a = b \rightarrow c \cdot a = c \cdot b.$ |

III. Axiomenschemata für die  $\varepsilon$ -Funktion.

$\mathfrak{A}(a)$  sei eine Formel, die an freien Zahlenvariablen nur  $a$  enthält,  $a$  ein Term ohne freie Zahlenvariable.  $\mathfrak{A}(a)$  und  $\mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$  mögen aus  $\mathfrak{A}(a)$  dadurch entstehen, daß man an allen Stellen  $a$  durch  $a$ , bzw.  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  ersetzt.  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  entstehe aus  $\mathfrak{A}(a)$  nach Regel 8 zur Bildung von Formeln und Termen. Ferner sei  $\mathfrak{A}(a, b)$  eine Formel mit den einzigen freien Zahlenvariablen  $a$  und  $b$ ,  $a$  und  $b$  Terme ohne freie Zahlenvariable,  $\mathfrak{A}(a, a)$  und  $\mathfrak{A}(a, b)$  mögen aus  $\mathfrak{A}(a, b)$  entstehen, indem überall  $b$  durch  $a$ , bzw. durch  $b$  ersetzt wird.  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, a)$  und  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, b)$  entstehen aus  $\mathfrak{A}(a, a)$  und  $\mathfrak{A}(a, b)$  nach der Regel 8 zur Bildung von Formeln und Termen. Es sind dann Axiome (vorausgesetzt, daß es sich überhaupt um Formeln handelt):

- |          |   |
|----------|---|
| (III, 1) | $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)),$                              |
| (III, 2) | $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{A}(x) \neq a',$                                    |
| (III, 3) | $\overline{\mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))} \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{A}(x) = 0,$ |
| (III, 4) | $a = b \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{A}(x, a) = \varepsilon_x \mathfrak{A}(x, b).$                |

Statt  $x$  kann in den obigen Formeln auch irgendeine andere gebundene Variable gebraucht werden; ferner können auch in (III, 4) zwei verschiedene gebundene Variable benutzt werden.

Als *Ableitungsregel* haben wir das Schlußschema: Aus zwei Formeln  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  kann  $\mathfrak{B}$  gewonnen werden.

Zur Erläuterung des Axiomensystems bemerken wir kurz, daß durch die Axiome (III, 1) bis (III, 3) das  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  in folgender Weise definiert ist: Gibt es keine Zahl  $a$ , so daß  $\mathfrak{A}(a)$  richtig ist, so ist  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x) = 0$ . Gibt es dagegen ein derartiges Zahlenbeispiel für  $\mathfrak{A}(a)$ , so ist  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  eins von diesen Beispielen, und zwar ein solches, dem kein anderes Beispiel unmittelbar vorangeht. Mit Hilfe der  $\varepsilon$ -Funktion läßt sich ferner in bekannter Weise das All- und Seinszeichen definieren, indem unter  $(x) \mathfrak{A}(x)$  die Formel  $\mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$  und unter  $(\exists x) \mathfrak{A}(x)$  die Formel  $\mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$  verstanden wird. Unter wesentlicher Benutzung von (II, 3), (III, 1) und (III, 2) läßt sich ferner das Axiom der vollständigen Induktion beweisen<sup>4)</sup>. Andere Rekursionsfunktionen als die unter II erwähnten brauchen nicht eingeführt zu werden, da sich alle anderen mit Hilfe der  $\varepsilon$ -Funktion definieren lassen<sup>5)</sup>. Übrigens ist das Axiom (III, 3) mehr der Vollständigkeit halber hinzugesetzt worden, als weil man es wirklich braucht. Die Axiome der Formen (III, 1) bis (III, 4) werden *kritische Formeln* genannt. Wir sagen ferner, die kritischen Formeln (III, 1) bis (III, 3) gehören zu  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ , während die kritische Formel (III, 4) gleicherweise zu  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, a)$  und zu  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, b)$  gehört.

Wir schließen hier gleich einige Bemerkungen über die Methode des Widerspruchsfreiheitsbeweises für dieses System an. Zuerst seien einige weitere Begriffe eingeführt.

Unter einem „Zahlzeichen“ verstehen wir einen Term, der entweder 0 ist oder aus 0 durch endlich oft wiederholte Anfügung von Strichen entsteht, z. B. 0', 0'', usw.

Es werde ferner die „Richtigkeit“ oder „Falschheit“ einer Formel definiert, die keine Variable irgendwelcher Art enthält. Bei einer derartigen Formel läßt sich zunächst jeder Term in ein Zahlzeichen verwandeln, indem man die Rekursionen für  $\delta$ ,  $+$ ,  $\cdot$  abrollen läßt. Eine so reduzierte Formel  $a = b$  heißt dann richtig, falls  $a$  dasselbe Zahlzeichen ist wie  $b$ , sonst falsch. Die Richtigkeit bzw. Falschheit von solchen Formeln, die sich mittels der Aussageverknüpfungen  $\rightarrow$  und  $-$  aus den eben genannten aufbauen, bestimmt sich dann in bekannter Weise.

Gelingt es nun zu zeigen, daß man die in der Beweisfigur vorkommenden  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  so durch Zahlzeichen ersetzen kann, daß sämtliche kritische Formeln in richtige übergehen, so ist der Widerspruchsfreiheitsbeweis für unser Axiomensystem geliefert. (Dabei ist die Ersetzung selbstverständlich an die Bedingung gebunden, daß gleichgestaltete  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  auch in gleicher Weise ersetzt werden.) Denn man erkennt ohne Mühe, daß die Axiome der Gestalt (I, 1) bis (I, 3), (II, 1) bis (II, 13) bei jeder Ersetzung für die  $\varepsilon$  in richtige Formeln übergehen.

<sup>4)</sup> Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik II, S. 85.

<sup>5)</sup> Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik I, § 8.

Da nun die „Richtigkeit“ einer Formel eine Eigenschaft ist, die sich von zwei Formeln  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  auf  $\mathfrak{B}$  vererbt, so würde das Vorhandensein einer Ersetzung für die  $\varepsilon$  von der eben genannten Art bedeuten, daß von den Formeln ohne Variable nur richtige am Schluß einer Beweisfigur stehen können. Es wäre also z. B. nicht die falsche Formel  $0 \neq 0$  beweisbar, und damit ein formaler Widerspruch ausgeschlossen.

## § 2.

## Einige grundlegende Definitionen.

Es sollen jetzt einige weitere Begriffe, die wir im folgenden brauchen, eingeführt werden.

Zunächst ordnen wir jedem Term  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  eine bestimmte natürliche Zahl als *Rang* zu. Diese Zuordnung geschieht übrigens nicht nur für die Terme  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ , sondern auch für Gebilde der Form  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ , die keine Terme sind, aber im Innern eines Terms vorkommen. Z. B. kommt in dem Term  $\varepsilon_x (x = \varepsilon_y (y = x))$  das Gebilde  $\varepsilon_y (y = x)$  vor, das kein Term ist, sondern aus einem solchen durch Umwandlung einer freien in eine gebundene Variable entsteht. Um einen gemeinsamen Namen zu haben, bezeichnen wir die Gebilde  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ , ob sie nun Terme sind oder nicht, als  *$\varepsilon$ -Ausdrücke*.

Die Definition des Ranges geschieht nun in folgender Weise: Ein  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ , das kein anderes  $\varepsilon$  in seinem Innern enthält, hat den Rang 1, ebenso ein  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ , bei dem die gebundene Variable  $x$  an keiner Stelle im Innern eines anderen  $\varepsilon$  im Innern von  $\mathfrak{A}(x)$  steht. Kommt die Variable  $x$  in  $\mathfrak{A}(x)$  im Bereiche von anderen  $\varepsilon$  vor, die etwa  $\varepsilon_y \mathfrak{B}(y)$ ,  $\varepsilon_z \mathfrak{C}(z)$ ,  $\varepsilon_u \mathfrak{D}(u)$  seien, so hat  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  einen Rang, der um Eins höher ist als der größte Rang, der bei  $\varepsilon_y \mathfrak{B}(y)$ ,  $\varepsilon_z \mathfrak{C}(z)$ ,  $\varepsilon_u \mathfrak{D}(u)$  vorkommt. Damit ist der Rang für jeden  $\varepsilon$ -Ausdruck festgelegt.

Einige Beispiele:  $\varepsilon_y (y' = \varepsilon_x (x = \delta(0')))$  hat den Rang 1, die Ausdrücke  $\varepsilon_x (x = \varepsilon_y (y = x))$  und  $\varepsilon_x (x = \varepsilon_y (y = x + \varepsilon_z (z = 0' \cdot x)))$  haben den Rang 2,  $\varepsilon_x (x = \varepsilon_y (y = \varepsilon_z (z = x \cdot y)))$  den Rang 3.

Wir wollen nun erklären, was wir unter dem *Grundtyp* eines Terms  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  zu verstehen haben. In  $\mathfrak{A}(x)$  können als Bestandteile andere Terme auftreten. Unter diesen betrachten wir nur diejenigen, die nicht wieder Bestandteile eines anderen in  $\mathfrak{A}(x)$  vorkommenden Terms sind. Diese seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Dabei seien Terme  $a_i$ , die an verschiedener Stelle stehen, aber gleiche Gestalt haben, mehrfach gezählt. Wir ersetzen nun in  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  die Terme  $a_1, a_2, \dots, a_n$  durch die freien Zahlenvariablen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Dadurch geht  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  in einen Term  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x, a_1, \dots, a_n)$  über, wobei  $\mathfrak{B}(x, a_1, \dots, a_n)$  keine freien Variablen außer  $a_1, a_2, \dots, a_n$  enthält.  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x, a_1, \dots, a_n)$  heißt der zu  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  gehörige Grundtyp. Kommen in

$\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  keine anderen Terme als Bestandteile vor, so ist  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  sein eigener Grundtyp.

Beispiele.  $\varepsilon_y (y' = \varepsilon_x (x = \delta(0')))$  hat den Grundtyp  $\varepsilon_y (y' = a)$ ,  $\varepsilon_x (x = \varepsilon_y (y = x))$  ist sein eigener Grundtyp.

Grundtypen werden als gleich angesehen, wenn sie sich nur durch verschiedene Benennung der freien oder der gebundenen Zahlenvariablen unterscheiden. Der Rang eines Grundtyps ist, wie sich aus der Definition des Ranges ergibt, gleich dem Rang des  $\varepsilon$ -Terms, zu dem er als Grundtyp gehört.

Selbstverständlich kann zu verschiedenen  $\varepsilon$ -Termen der gleiche Grundtyp gehören. Z. B. haben die in einem Axiom der Form (III, 4)

$$a = b \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{A}(x, a) = \varepsilon_x \mathfrak{A}(x, b)$$

vorkommenden  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, a)$  und  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, b)$  immer den gleichen Grundtyp. Dies ist für später wichtig.

Seiner Bedeutung nach stellt ein Grundtyp  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x, a_1, \dots, a_n)$  eine Funktion von  $n$  Variablen, ein Grundtyp ohne freie Zahlenvariable eine bestimmte Zahl dar. Denken wir uns nun für alle in einer Beweisfigur vorkommenden  $\varepsilon$ -Terme die Grundtypen aufgeschrieben und für jeden eine Abkürzung eingeführt, z. B. für einen Grundtyp mit  $n$  freien Zahlenvariablen ein Funktionszeichen mit  $n$  Argumenten, für einen Grundtyp ohne freie Zahlenvariable ein irgendwie gewähltes Individuensymbol, so stellt sich mit Hilfe dieser Symbole jeder in der Beweisfigur vorkommende Term als ein aus Individuensymbolen, dem Zeichen 0 und Funktionszeichen aufgebauter Ausdruck dar.

Es sei dies an dem Beispiel des Terms  $\varepsilon_y (y' = \varepsilon_x (x = \delta(0')))$  erläutert.  $\varepsilon_x (x = \delta(0'))$  hat den Grundtyp  $\varepsilon_x (x = a)$ ,  $\varepsilon_y (y' = \varepsilon_x (x = \delta(0')))$  den Grundtyp  $\varepsilon_y (y' = a)$ . Bezeichnen wir nun den ersten Grundtyp mit  $\varphi(a)$ , den zweiten mit  $\psi(a)$ , so stellt sich der Term  $\varepsilon_y (y' = \varepsilon_x (x = \delta(0')))$  in der Form  $\psi(\varphi(\delta(0')))$  dar.

Ordnen wir nun jedem Grundtyp eine Rekursionsfunktion mit der gleichen Zahl von Argumenten, jedem Grundtyp ohne Argumente ein bestimmtes Zahlzeichen als Ersetzung zu, so können wir mit Hilfe dieser Ersetzungen jede Formel der Beweisfigur in eindeutiger Weise in eine „richtige“ oder „falsche“ Formel verwandeln: Eine derartige Ersetzung für die Grundtypen soll eine *Gesamtersetzung* heißen.

Nach dem, was wir kurz vorher über die Axiome der Gestalt (III, 4) sagten, ergibt sich leicht, daß durch eine Gesamtersetzung sich diese Formeln (und natürlich auch, wie früher bemerkt, die Axiome der Gruppen I und II) auf richtige reduzieren. Demnach ist unser Widerspruchsfreiheitsbeweis auf den Nachweis des Vorhandenseins einer Gesamtersetzung zurückgeführt, mit deren Hilfe sich auch alle Axiome der Gestalt (III, 1) bis (III, 3) auf richtige reduzieren.

## § 3.

**Definition einer bestimmten Folge von Gesamtersetzungen.**

Wir werden jetzt ein Verfahren definieren, das ausgehend von einer bestimmten Gesamtersetzung nacheinander immer wieder die Bildung von neuen Gesamtersetzungen gestattet, solange nicht bei einer Gesamtersetzung dieser Reihe alle kritischen Formeln in richtige übergehen.

Zuvor wollen wir aber die Bildung von Gesamtersetzungen noch etwas genauer beschreiben. Wir denken uns für die Bildung einer Gesamtersetzung ein für allemal eine bestimmte Reihenfolge der Grundtypen festgelegt, und zwar so, daß der Grundtyp mit niederem Rang dem mit höherem Rang vorangeht. Im übrigen ist die Reihenfolge gleichgültig. Ferner ergänzen wir die Reihe der Grundtypen in folgender Weise: Mit einem Grundtyp  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x, a_1, \dots, a_n)$  sollen unserer Reihe auch alle Grundtypen angehören, die zu den in einer Formel  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  vorkommenden  $\varepsilon$ -Termen gehören.  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n$  sind dabei irgendwelche Zahlzeichen. Die Art und Zahl der neu hinzukommenden Grundtypen ist offenbar von der besonderen Wahl von  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n$  unabhängig. Nachdem wir die Reihe der Grundtypen in dieser Weise ergänzt haben, gilt folgendes: Ist  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  irgendein Grundtyp der Reihe, so reicht eine Gesamtersetzung aus, um jede Formel  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  mit beliebig gewählten Zahlzeichen  $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n$  auf eine richtige oder falsche Formel zu reduzieren.

Wir setzen weiter auch eine Reihenfolge unter den kritischen Formeln der Gestalt (III, 1) fest. Die Wahl dieser Reihenfolge steht in unserem Belieben, sie soll aber dann festgehalten werden.

Vermittels einer Gesamtersetzung reduziert sich jeder in der Beweisfigur vorkommende Term auf ein bestimmtes Zahlzeichen. Wir sagen, ein zu einer Formel (III, 1)

$$\mathfrak{A}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$$

gehöriges  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  habe eine *Beispielersetzung* bekommen, falls sich  $\mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$  mit Hilfe der Gesamtersetzung auf eine richtige Formel reduziert.

Die Ausgangersetzung für unsere Reihe von Gesamtersetzungen ist nun die folgende: Sämtliche Grundtypen mit freien Zahlenvariablen werden durch Funktionen ersetzt, die immer den Wert 0 haben; ein Grundtyp ohne freie Variable wird durch 0 ersetzt.

Diese Ausgangersetzung hat die folgende Eigenschaft  $\mathfrak{E}$ : Es sei  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  einer der zu der Beweisfigur gehörenden Grundtypen;  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n$  seien irgendwelche Zahlzeichen.  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  reduziere sich bei der Gesamtersetzung auf das Zahlzeichen  $\mathfrak{z}$ . Dann ist entweder  $\mathfrak{z} = 0$  oder die folgende Bedingung ist erfüllt:  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  reduziert sich bei der Gesamtersetzung auf eine richtige Formel, ferner jede Formel

$\mathfrak{B}(\mathfrak{z}^*; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$ , wo  $\mathfrak{z}^*$  irgendein Zahlzeichen  $< \mathfrak{z}$  ist, auf eine falsche Formel.

Das Zutreffen der Eigenschaft ist in diesem Falle trivial, weil sich ja jedes  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  auf 0 reduziert. Im folgenden werden wir zeigen, daß alle Gesamtersetzungen unserer zu bildenden Reihe die Eigenschaft  $\mathfrak{E}$  haben. Wir weisen deshalb schon hier auf die folgenden Konsequenzen von  $\mathfrak{E}$  hin.

Bei einer Gesamtersetzung, die die Eigenschaft  $\mathfrak{E}$  hat, können sich nur gegebenenfalls kritische Formeln der Gestalt (III, 1), nicht aber solche der Gestalten (III, 2) und (III, 3) auf falsche Formeln reduzieren. Betrachten wir eine Formel

$$\mathfrak{A}(\alpha) \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{A}(x) \neq \alpha'.$$

Es sei  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  eine Spezialisierung des Grundtyps  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$ , so daß wir für  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  auch  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n)$  schreiben können, wobei  $b_1, b_2, \dots, b_n$  irgendwelche Terme sind. Die Formel

$$\mathfrak{A}(\alpha) \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{A}(x) \neq \alpha'$$

läßt sich dann auch schreiben

$$\mathfrak{B}(\alpha; b_1, \dots, b_n) \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n) \neq \alpha'.$$

Es möge sich nun bei der Gesamtersetzung  $\alpha$  auf  $\mathfrak{z}, b_1, \dots, b_n$  auf  $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n$  reduzieren. Die obige Formel reduziert sich dann in gleicher Weise wie

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n) \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n) \neq \mathfrak{z}'.$$

Reduziert sich nun  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  auf 0, so reduziert sich der Teil der Formel hinter dem Zeichen  $\rightarrow$  auf  $0 \neq \mathfrak{z}'$ , also auf eine richtige Formel. Die ganze Formel wird dann richtig. Reduziert sich dagegen  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  auf das Zahlzeichen  $\bar{\mathfrak{z}}$ , so wird nach Voraussetzung  $\mathfrak{B}(\bar{\mathfrak{z}}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  eine richtige Formel. Entweder ist nun  $\mathfrak{z}' = \bar{\mathfrak{z}}$ , also  $\mathfrak{z} < \bar{\mathfrak{z}}$ . Nach Voraussetzung wird dann  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  falsch, die ganze Formel also richtig. Falls  $\mathfrak{z}' \neq \bar{\mathfrak{z}}$ , so reduziert sich wieder der Teil der Formel hinter dem Zeichen  $\rightarrow$ , also auch die ganze Formel auf eine richtige. Damit ist also gezeigt, daß die Formeln (III, 2) immer richtig werden.

Eine Formel

$$\bar{\mathfrak{A}}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)) \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{A}(x) = 0$$

schreibt sich, wenn man den zu  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  gehörenden Grundtyp zum Ausdruck bringt, genauer

$$\mathfrak{B}(\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n), b_1, \dots, b_n) \rightarrow \varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n) = 0.$$

Durch dieselbe Überlegung wie oben erkennt man: Entweder reduziert sich  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n)$  auf 0, dann wird die ganze Formel zu einer richtigen Formel. Oder aber es muß sich  $\mathfrak{B}(\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n), b_1, \dots, b_n)$  auf

eine richtige, also  $\bar{\mathfrak{B}}(\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n), b_1, \dots, b_n)$  auf eine falsche Formel reduzieren. Die ganze Formel wird dann ebenfalls richtig.

Durch dieselbe Überlegung ergibt sich auch, daß eine Formel (III, 1)

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$$

nur dann zu einer falschen Formel werden kann, falls sich  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  bei der betreffenden Gesamtersetzung auf 0 reduziert.

Es seien nun schon eine Reihe von Gesamtersetzungen gebildet, die die Eigenschaft  $\mathfrak{E}$  haben. Wir geben an, wie die nächste Gesamtersetzung gebildet wird, falls nicht bei der letzten sich alle kritischen Formeln auf richtige reduzieren.

Bei der letzten Gesamtersetzung kann, wie wir sahen, nur eine Formel der Gestalt

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}(x))$$

zu einer falschen Formel werden, und zwar reduziert sich in diesem Falle  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  auf 0. Die genannte Formel sei die erste gemäß unserer Reihenfolge, die falsch wird. Der zu  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  gehörige Grundtyp sei  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$ , und zwar sei  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  mit  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  identisch. Bei der Gesamtersetzung mögen sich die Terme  $a_1, a_2, \dots, a_n$  auf die Zahlzeichen  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n$  reduzieren. Ferner möge sich  $a$  auf das Zahlzeichen  $\mathfrak{z}$  reduzieren.  $\mathfrak{A}(a)$  ist mit  $\mathfrak{B}(a; a_1, \dots, a_n)$  identisch. Da  $\mathfrak{A}(a)$  sich auf eine richtige Formel reduziert — andernfalls könnte nicht die ganze Formel falsch werden —, so gilt dasselbe für  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$ . Wir schreiben nun die  $(\mathfrak{z} + 1)$  Formeln  $\mathfrak{B}(0; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$ ,  $\mathfrak{B}(1; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$ , ...,  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  auf. Alle diese Formeln lassen sich mit Hilfe unserer Gesamtersetzung vollständig reduzieren, wie man aus den Bemerkungen zu Eingang dieses Paragraphen erkennt. Wir suchen unter diesen Formeln die erste, die sich auf eine richtige Formel reduziert. Es sei dies  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}^*; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$ .

Nun wird die nächste Gesamtersetzung folgendermaßen gebildet: Alle Grundtypen, die  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  in der Reihenfolge der Grundtypen vorangehen, behalten die Ersetzung, die sie bei der letzten Gesamtersetzung hatten. Für den Grundtyp  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  tritt eine Veränderung ein. Für die Werte  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n$  der Argumente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  erhält  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  den Wert  $\mathfrak{z}^*$  (während dieser Wert bei der vorigen Ersetzung 0 war). Für alle anderen Werte von  $a_1, \dots, a_n$  bleibt die Ersetzung von  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  dieselbe wie vorher. Die hinter  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  stehenden Grundtypen werden so ersetzt wie bei der Ausgangsgesamtersetzung, also durch Funktionen, die immer den Wert 0 haben, bzw. durch 0, falls es sich um einen Grundtyp ohne freie Variablen handelt.

Es bleibt zu zeigen, daß auch die neue Gesamtersetzung wieder die Eigenschaft  $\mathfrak{E}$  hat.

Es sei  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; a_1, \dots, a_l)$  ein beliebiger Grundtyp,  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_l$  irgendwelche Zahlzeichen.  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  reduziere sich bei der neuen Gesamtersetzung auf  $\bar{z}$ . Wir müssen dann zeigen, daß falls  $\bar{z}$  von 0 verschieden ist, sich  $\mathfrak{C}(\bar{z}; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  auf eine richtige Formel reduziert, dagegen jede Formel  $\mathfrak{C}(\bar{z}^{**}; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  mit  $\bar{z}^{**} < \bar{z}$  auf eine falsche Formel.

Es möge  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  dieselbe Bedeutung haben wie zuvor, sei also der Grundtyp, dessen Ersetzung sich jetzt gegenüber der vorigen Gesamtersetzung entscheidend verändert hat.  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$  und  $\bar{z}^*$  seien wie zuvor die Zahlzeichen, die dabei eine Rolle spielten. Steht nun  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; a_1, \dots, a_l)$  hinter  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  in der Reihenfolge der Grundtypen, so ist nichts zu beweisen, da dann ja  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  durch 0 ersetzt ist. Nun werden für die Reduktion von  $\mathfrak{C}(\bar{z}; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  wie aus der Definition des Ranges hervorgeht, nur die Ersetzungen für solche Grundtypen benutzt, die einen kleineren Rang als  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; a_1, \dots, a_l)$  haben, mithin diesem Grundtyp in der Reihenfolge der Grundtypen vorangehen. Steht nun  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; a_1, \dots, a_l)$  vor  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  in der Reihe der Grundtypen, so ergibt sich unsere Behauptung daraus, daß die Eigenschaft  $\mathfrak{C}$  für die vorige Gesamtersetzung zutraf. Für den Fall, daß  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; a_1, \dots, a_l)$  mit  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  übereinstimmt, ist ebenfalls alles in Ordnung, falls  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_l$  von  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$  verschieden ist, da ja sowohl  $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  als auch  $\mathfrak{C}(\bar{z}; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  und  $\mathfrak{C}(\bar{z}^{**}; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$  sich bei der neuen Gesamtersetzung so reduzieren wie bei der vorangegangenen. Stimmt endlich  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l$  mit  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$  überein, so ist die neue Gesamtersetzung gerade so gewählt, daß auch jetzt die Eigenschaft  $\mathfrak{C}$  zutrifft. Denn bei der neuen Gesamtersetzung reduziert sich  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  auf  $\bar{z}^*$ , ferner  $\mathfrak{B}(\bar{z}^*; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  auf eine richtige und  $\mathfrak{B}(\bar{z}^{**}; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  auf eine falsche Formel, weil bei der Reduktion der beiden letzten Formeln nur vor  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  stehende Grundtypen verwandt werden, so daß die Reduktion der beiden Formeln dieselbe ist wie bei der vorigen Gesamtersetzung.

#### § 4.

##### Eigenschaften der Folge von Gesamtersetzungen.

Damit wir imstande sind zu beweisen, daß das in § 3 definierte Verfahren zur Bildung von Gesamtersetzungen nach endlich vielen Schritten abbricht, also zu einer Gesamtersetzung führt, bei der alle kritischen Formeln richtig werden, brauchen wir noch verschiedene weitere Begriffe und Sätze über die Gesamtersetzungen.

Wir führen zunächst für jede Gesamtersetzung eine *charakteristische Zahl* ein. Bei jeder Gesamtersetzung gibt es einen Grundtyp, der der letzte ist, für den die Ersetzung nicht aus einer Funktion besteht, die immer den

Wert 0 hat. Die Stelle dieses Grundtyps in der Grundtypenreihe, diesmal aber von hinten gezählt, nennen wir die der Gesamtersetzung zugeordnete charakteristische Zahl.

Aus der Art des Verfahrens, nach dem wir die Gesamtersetzungen bilden, ergibt sich ohne weiteres der

**Satz I.** *Es seien  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_{i+1}, \dots, \mathfrak{G}_{i+k}$  eine Reihe von unmittelbar aufeinanderfolgenden Gesamtersetzungen. Keine dieser Gesamtersetzungen, mit Ausnahme eventuell der ersten, habe eine größere charakteristische Zahl als  $m$ . Dann sind bei allen obengenannten Gesamtersetzungen höchstens die Ersetzungen für die letzten  $m$  Grundtypen verschieden.*

Ein weiterer Begriff, den wir einführen, ist der des *Reduktionsgrades* einer Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}$  bezüglich einer endlichen Formelmenge.

Wir mögen irgendeine endliche Menge von Formeln haben, die keine freie Variable enthalten und die sich mit Hilfe von  $\mathfrak{G}$  vollständig reduzieren lassen. Diese Formeln brauchen nicht notwendig der Beweisfigur anzugehören. Wir denken uns nun alle  $\varepsilon$ -Terme, die in diesen Formeln vorkommen, aufgeschrieben und für sie eine bestimmte Reihenfolge festgelegt. Und zwar sollen alle  $\varepsilon$ -Terme, die den Bestandteil eines anderen  $\varepsilon$ -Terms bilden, diesem in der Reihenfolge vorangehen. Im übrigen ist die Reihenfolge an und für sich gleichgültig, doch soll ihre Herstellung in eindeutiger Weise geschehen. Wir können das etwa in der Weise erreichen, daß wir zwischen den Zeichen, die zum Aufbau unserer Formeln dienen, wie  $\delta$ ,  $+$ ,  $'$ ,  $\cdot$ , Klammern usw. eine bestimmte alphabetische Reihenfolge festsetzen, und dann die Terme, deren Reihenfolge noch unbestimmt ist, lexikographisch ordnen.

Es mögen nun im ganzen  $(t+1)$   $\varepsilon$ -Terme

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_t$$

vorkommen. Jeder dieser Terme reduziert sich bei  $\mathfrak{G}$  entweder auf 0 oder auf ein von 0 verschiedenes Zahlzeichen. Wir definieren nun eine Funktion  $\varphi(n)$  ( $0 \leq n \leq t$ ) in folgender Weise. Es ist  $\varphi(i) = 0$ , falls sich  $a_i$  auf ein von 0 verschiedenes Zahlzeichen reduziert, sonst ist  $\varphi(i) = 1$ . Die Zahl

$$2^t \varphi(0) + 2^{t-1} \varphi(1) + \dots + 2^0 \varphi(t)$$

nennen wir den *Reduktionsgrad* von  $\mathfrak{G}$  bezüglich der obigen Menge von Formeln.

Besonders interessiert uns zunächst der *Reduktionsgrad einer Gesamtersetzung bezüglich der gesamten Beweisfigur*. Für diesen Reduktionsgrad läßt sich von vornherein eine obere Schranke angeben. Ist nämlich die Anzahl der  $\varepsilon$ -Terme der Beweisfigur gleich  $e$ , so ist der Reduktionsgrad einer beliebigen Gesamtersetzung bezüglich der Beweisfigur höchstens  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{e-1}$ , also  $< 2^e$ .

Wir wollen ferner jeder Gesamtersetzung noch eine zweite Zahl zuordnen, die ebenfalls einen Reduktionsgrad darstellt. Die bei  $\mathfrak{G}$  falsche kritische Formel, auf Grund deren die Bildung der nächsten Gesamtersetzung erfolgt, gehöre zu dem Grundtyp  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$  und sei

$$\mathfrak{B}(a; a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathfrak{B}(\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n); a_1, \dots, a_n).$$

Es reduziere sich bei  $\mathfrak{G}$  der Term  $\varepsilon$  auf 3, und die  $a_1, a_2, \dots, a_n$  auf  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Der Reduktionsgrad von  $\mathfrak{G}$  bezüglich der Formeln

$$\mathfrak{B}(0; \beta_1, \dots, \beta_n), \mathfrak{B}(0'; \beta_1, \dots, \beta_n), \dots, \mathfrak{B}(\beta; \beta_1, \dots, \beta_n)$$

ist die zweite Zahl, die wir  $\mathfrak{G}$  zuordnen. Für diesen zweiten Reduktionsgrad läßt sich nicht ohne weiteres eine obere Schranke angeben, da er ja von der Größe des Zahlzeichens 3 abhängig ist. Die Existenz einer oberen Schranke ist auch für den folgenden Endlichkeitsbeweis an und für sich nicht erforderlich. Wir kommen aber in § 8 darauf zurück.

Jedenfalls läßt sich also jeder Gesamtersetzung unserer Folge in eindeutiger Weise ein geordnetes Zahlenpaar  $(a, b)$  zuordnen, wobei  $a$  den Reduktionsgrad bezüglich der Beweisfigur und  $b$  den zweiten Reduktionsgrad darstellt. Ferner ist  $a < 2^e$ , wenn  $e$  die Anzahl der  $\varepsilon$ -Terme der Beweisfigur ist.

Weiter führen wir die *Progressivität von Gesamtersetzungen* ein. Von zwei Gesamtersetzungen  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  heißt  $\mathfrak{G}_1$  gegenüber  $\mathfrak{G}_2$  progressiv, wenn jede Spezialisierung  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \beta_1, \dots, \beta_n)$  eines Grundtyps  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; a_1, \dots, a_n)$ , der bei  $\mathfrak{G}_1$  eine von 0 verschiedene Ersetzung 3 zukommt, auch bei  $\mathfrak{G}_2$  die gleiche Ersetzung 3 hat. (Selbstverständlich wird  $\mathfrak{G}_1$  im allgemeinen noch weitere Beispielersetzungen enthalten.) Es gilt nun der folgende

**Satz II.** *Die Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}_1$  sei gegenüber  $\mathfrak{G}_2$  progressiv. Wir mögen ferner eine Menge von Formeln ohne freie Variable haben, die sich mit Hilfe der Gesamtersetzungen vollständig reduzieren lassen. Wir behaupten dann, daß entweder der Reduktionsgrad von  $\mathfrak{G}_1$  bezüglich dieser Formelmenge kleiner ist als der von  $\mathfrak{G}_2$ , oder aber daß sich alle Terme der Formelmenge bei beiden Gesamtersetzungen in genau der gleichen Weise reduzieren.*

Es seien  $a_0, a_1, \dots, a_t$  die  $\varepsilon$ -Terme, die bei dieser Formelmenge auftreten, und zwar in der Reihenfolge aufgeschrieben, wie wir sie für die Bestimmung des Reduktionsgrades brauchen. Reduzieren sich alle diese Terme bei beiden Gesamtersetzungen in der gleichen Weise, so ist es gut. Andernfalls sei  $a_1$  der erste Term, der bei  $\mathfrak{G}_1$  eine andere Ersetzung hat als bei  $\mathfrak{G}_2$ . Unter Berücksichtigung des zugehörigen Grundtyps schreibe sich  $a_1$  als  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; b_1, \dots, b_n)$ . Da die in  $b_1, b_2, \dots, b_n$  vorkommenden  $\varepsilon$ -Terme vor  $a_1$  in der Reihenfolge stehen, so reduzieren sie sich bei  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  in der gleichen Weise, etwa auf  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ .  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \beta_1, \dots, \beta_n)$  hat bei  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  verschiedene Ersetzungen. Wegen der Progressivität von  $\mathfrak{G}_1$  gegenüber  $\mathfrak{G}_2$  ist

das nur in der Weise möglich, daß  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  bei  $\mathfrak{G}_i$  durch 0 und bei  $\mathfrak{G}_j$  durch ein von 0 verschiedenes Zahlzeichen ersetzt ist. Die bei der Definition des Reduktionsgrades benutzte Funktion  $\varphi$  hat also für kleinere Argumente als  $j$  für beide Gesamtersetzungen den gleichen Wert, während  $\varphi(j)$  für  $\mathfrak{G}_i$  einen kleineren Wert hat als für  $\mathfrak{G}_j$ . Berücksichtigen wir, wie wir den Reduktionsgrad mit Hilfe der Funktion  $\varphi$  festlegten, so ergibt sich sofort die Behauptung.

**Satz III.** *Es sei wieder die Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}_i$  gegenüber  $\mathfrak{G}_1$  progressiv. Die für die beiden Gesamtersetzungen definierten geordneten Zahlenpaare seien  $(a, b)$  und  $(c, d)$ . Entweder ist nun  $a < c$  oder  $a = c$  und  $b < d$  oder aber die auf  $\mathfrak{G}_i$  folgende Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}_{i+1}$  ist wieder progressiv gegenüber  $\mathfrak{G}_{i+1}$ . Ferner ist im letzten Falle die bei  $\mathfrak{G}_{i+1}$  gegenüber  $\mathfrak{G}_1$  neu hinzukommende Beispielersetzung dieselbe wie die, die bei  $\mathfrak{G}_{i+1}$  gegenüber  $\mathfrak{G}_i$  neu hinzugekommen ist.*

Nach Satz II ist nämlich entweder  $a < c$  oder aber bei beiden Gesamtersetzungen ist die Reduktion der Beweisfigur die gleiche. Im zweiten Falle ist die Menge der Formeln, bezüglich deren der zweite Reduktionsgrad definiert ist, bei beiden Gesamtersetzungen die gleiche. Aus Satz II ergibt sich wieder, daß entweder  $b < d$  oder aber sich diese Formeln bei beiden Gesamtersetzungen in der gleichen Weise reduzieren. Im letzten Falle wird gemäß unserem Verfahren dieselbe Beispielersetzung für die Bildung der nächsten Gesamtersetzung verwandt, so daß die Progressivität von  $\mathfrak{G}_{i+1}$  gegenüber  $\mathfrak{G}_{i+1}$  sich ergibt.

## § 5.

### Der Endlichkeitsbeweis.

Wir führen jetzt den Begriff der *m-Reihe von Gesamtersetzungen* ein.

Unter einer 1-Reihe von Gesamtersetzungen verstehen wir eine einzelne Gesamtersetzung. Unter einer  $(m+1)$ -Reihe von Gesamtersetzungen verstehen wir eine Reihe von Gesamtersetzungen  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_{i+1}, \dots, \mathfrak{G}_{i+t}$  ( $t \geq 0$ ), die in unserer Gesamtreihe von Gesamtersetzungen unmittelbar aufeinander folgen und außerdem den folgenden Bedingungen genügen: Die zu  $\mathfrak{G}_{i+1}, \dots, \mathfrak{G}_{i+t}$  gehörigen charakteristischen Zahlen sind  $\leq m$ . (Falls  $t = 0$ , entfällt diese Bedingung.) Ferner sind die zu  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_{i+t+1}$  gehörigen charakteristischen Zahlen  $\geq m+1$ . (Ist  $\mathfrak{G}_{i+t}$  die letzte Gesamtersetzung überhaupt, so fällt die Bedingung für  $\mathfrak{G}_{i+t+1}$  fort.) Ist  $\mathfrak{G}_1$  die erste Gesamtersetzung überhaupt, so der ja keine charakteristische Zahl gehört, so wird für  $\mathfrak{G}_1$  weiter nichts verlangt.

Wir lassen dabei ausdrücklich zu, daß eine *m-Reihe* auch für  $m > 1$  nur aus einer einzigen Gesamtersetzung besteht. Ferner kann dieselbe Reihe von Gesamtersetzungen gleichzeitig eine *m-* und eine *t-Reihe* sein, bei ver-

schiedenem  $m$  und  $l$ . Ferner erkennt man, daß eine  $(m+1)$ -Reihe ( $m \geq 1$ ) mindestens eine  $m$ -Reihe enthält.

Bemerkung. Aus Satz I ergibt sich, daß bei den Gesamtersetzungen einer  $(m+1)$ -Reihe ( $m > 0$ ) die Ersetzungen für alle Grundtypen mit Ausnahme der  $m$  letzten die gleichen sind.

Definition des Index einer  $m$ -Reihe. Den  $m$ -Reihen werden gewisse Ordnungszahlen als Indizes zugeordnet. Unter dem Index einer 1-Reihe versteht man die Ordnungszahl  $\omega$   $a+b$ , wobei  $(a, b)$  das der betreffenden Gesamtersetzung zugeordnete geordnete Paar von natürlichen Zahlen ist. Der Index einer  $(m+1)$ -Reihe wird folgendermaßen definiert: Es seien  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  die Indizes der aufeinanderfolgenden  $m$ -Reihen, aus denen die  $(m+1)$ -Reihe besteht. Der Index der  $(m+1)$ -Reihe ist dann  $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_l}$ ).

Satz IV. Wir mögen zwei unmittelbar aufeinanderfolgende  $m$ -Reihen haben. Die Gesamtersetzungen der ersten  $m$ -Reihe seien  $G_1, G_2, \dots, G_l$ , die der zweiten  $H_1, H_2, \dots, H_l$ . Die charakteristische Zahl sei für  $H_1$  gleich  $m$ .  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  seien die Indizes der 1-Reihen, aus denen die  $m$ -Reihen bestehen. Wir behaupten dann folgendes:

a) Es läßt sich eine Zahl  $i$  ( $i \leq l; i \leq 1$ ) angeben, so daß für alle etwa möglichen  $j$ , die kleiner als  $i$  sind,  $\alpha_j = \beta_j$  gilt, während  $\alpha_i > \beta_i$ .  $G_i$  und  $H_i$  heißen übrigens die bei den beiden  $m$ -Reihen ausgezeichneten Gesamtersetzungen.

b) Allen  $G_j$  und  $H_j$  ( $1 < j \leq l$ ) kommen die gleichen charakteristischen Zahlen zu.

c)  $i$  habe dieselbe Bedeutung wie bei a);  $s$  sei eine beliebige Zahl, die der Bedingung  $1 \leq s \leq m$  genügt. Es mögen in der ersten  $m$ -Reihe  $r$  aufeinanderfolgende  $s$ -Reihen vorkommen, von denen keine die ausgezeichnete Gesamtersetzung  $G_i$  enthält. (Enthält schon die erste  $s$ -Reihe  $G_i$ , so wird weiter nichts behauptet.) Die Indizes dieser  $s$ -Reihen seien  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ . Es kommen dann in der zweiten  $m$ -Reihe ebenfalls  $r$  aufeinanderfolgende  $s$ -Reihen vor, die nicht die ausgezeichnete Gesamtersetzung  $H_i$  enthalten. Ferner sind die Indizes dieser  $s$ -Reihen ebenfalls  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ .

Wir beweisen zunächst a). Da die zu  $G_i$  gehörige charakteristische Zahl mindestens gleich  $m$  ist, so sind jedenfalls die letzten  $(m-1)$  Grundtypen bei  $G_i$  durch Funktionen ersetzt, die immer den Wert 0 haben. Aus der Bemerkung, die wir im Anschluß an die Definition der  $m$ -Reihe machten, ergibt sich ferner, daß bei  $G_i$  und  $H_i$  die Ersetzungen für die Grundtypen mit Ausnahme der  $(m-1)$  letzten die gleichen sind. Da ferner die zu  $H_i$  gehörige charakteristische Zahl gleich  $m$  ist, so ist  $H_i$  gegenüber  $G_i$  progressiv.

\*) Diese Definition kommt übrigens, wie aus dem Folgenden hervorgeht, nur unter der Bedingung  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_l$  zur Anwendung.

Dies gilt zunächst für  $f > 1$ . Falls  $f = 1$ , so folgt  $\mathfrak{H}_1$  unmittelbar auf  $\mathfrak{G}_1$ . Da die zu  $\mathfrak{H}_1$  gehörige charakteristische Zahl nicht größer ist als die von  $\mathfrak{G}_1$ , so ergibt sich auch in diesem Falle Progressivität von  $\mathfrak{H}_1$  gegenüber  $\mathfrak{G}_1$ . Wir unterscheiden weiter zwei Fälle:

1.  $f \leq 1$ .

Nach Satz III haben wir dann entweder unter den Zahlen  $1, 2, \dots, f$  ein  $i$  der verlangten Art gefunden, oder aber bei  $\mathfrak{G}_i$  und  $\mathfrak{H}_i$  müßte für dieselbe Spezialisierung  $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \beta_1, \dots, \beta_n)$  eines Grundtyps, für die bei  $\mathfrak{G}_i$  und  $\mathfrak{H}_i$  die Ersetzung 0 gebraucht wurde, ein von 0 verschiedenes Beispiel  $\beta$  gefunden werden und zur Bildung von  $\mathfrak{H}_1$  und der auf  $\mathfrak{H}_i$  folgenden Gesamtersetzung benutzt sein. Da  $\mathfrak{H}_1$  die charakteristische Zahl  $m$  hat, während  $\mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_i$  kleinere charakteristische Zahlen haben, so wäre auch bei  $\mathfrak{H}_i$   $\varepsilon_x \mathfrak{B}(x; \beta_1, \dots, \beta_n)$  durch  $\beta$  ersetzt. Das ist ein Widerspruch. Demnach bleibt nur die erste Möglichkeit bestehen.

2.  $f > 1$ .

Haben wir nicht unter den Zahlen  $1, 2, \dots, f$  ein  $i$  der verlangten Art gefunden, so wären gemäß Satz III die charakteristischen Zahlen für  $\mathfrak{G}_{i+1}$  und für die auf  $\mathfrak{H}_i$  folgende Gesamtersetzung die gleichen. Das steht aber im Widerspruch zur Definition der  $m$ -Reihe. Wäre  $\mathfrak{H}_i$  die letzte Gesamtersetzung überhaupt, so kann ihr Index nicht mit dem von  $\mathfrak{G}_1$  übereinstimmen.

Die Behauptung b) ergibt sich sofort daraus, daß, wie aus dem Beweis für a) hervorgeht, bei allen Gesamtersetzungen  $\mathfrak{G}_j$  und  $\mathfrak{H}_j$  ( $j < i$ ) die Reduktion der Beweisfigur die gleiche ist.

Die Behauptung c) ergibt sich aus a) und b) sukzessive für  $s = 1, 2, \dots, m$  unter Berücksichtigung der Definition des Indexes für die  $s$ -Reihen.

**Satz V.** *Wir mögen wie bei Satz IV zwei unmittelbar aufeinanderfolgende  $m$ -Reihen haben, so daß die charakteristische Zahl der ersten Gesamtersetzung der zweiten  $m$ -Reihe gleich  $m$  ist.  $p$  sei eine beliebige Zahl, die der Bedingung  $1 \leq p \leq m$  genügt.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  seien die Indizes der  $p$ -Reihen, aus denen die  $m$ -Reihen bestehen. Es gibt dann eine Zahl  $i$ , so daß  $\alpha_j$  und  $\beta_j$  die Indizes der  $p$ -Reihen sind, die die bei den beiden  $m$ -Reihen ausgezeichneten Gesamtersetzungen enthalten. Ferner ist  $\alpha_j > \beta_j$ , dagegen  $\alpha_j = \beta_j$  für alle  $j < i$ .*

Der Beweis geschieht durch Induktion nach  $p$ . Für  $p = 1$  und beliebige  $m$  ist Satz V richtig, da er dann in Satz IV enthalten ist. Er sei für ein bestimmtes  $p$  und solche  $m$ , die kleiner oder gleich dem verlangten sind, schon bewiesen. Wir haben die Richtigkeit für  $p + 1$  zu zeigen. Es seien also  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  die Indizes der  $(p + 1)$ -Reihen. Es mögen ferner  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  die beiden Gesamtersetzungen sein, die bei den beiden  $m$ -Reihen ausgezeichnet sind.  $\mathfrak{G}$  gehöre zu der  $(p + 1)$ -Reihe mit dem Index  $\alpha_i$ . Dann gehört  $\mathfrak{H}$  nach Satz IV, c zu der  $(p + 1)$ -Reihe mit dem Index  $\beta_i$ . Ferner

ist für  $1 \leq j < i$   $\alpha_j = \beta_j$ . Die beiden  $(p+1)$ -Reihen mit den Indizes  $\alpha$ , und  $\beta$ , bestehen wieder aus einer oder mehreren  $p$ -Reihen. Die Indizes dieser  $p$ -Reihen seien  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  bzw.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Der  $p$ -Reihe mit dem Index  $\alpha_1$  gehen in der ersten  $m$ -Reihe genau so viel  $p$ -Reihen voran wie in der zweiten  $m$ -Reihe der  $p$ -Reihe mit dem Index  $\lambda_1$ . Das ergibt sich aus Satz IV, b. Da nun der Satz für  $p$  richtig ist, so existiert eine Zahl  $t$ , so daß  $\alpha_1 > \lambda_1$ , während für kleinere Nummern die jeweiligen  $\alpha$  und  $\lambda$  übereinstimmen. Wir wenden nun den Satz für  $p$  noch einmal an. Zwei aufeinanderfolgende  $p$ -Reihen mit irgendwelchen Indizes  $\alpha_q$  und  $\alpha_{q+1}$  erfüllen nämlich gerade die Bedingungen unseres Satzes. ( $m$  wird dabei ebenfalls gleich  $p$  genommen; die beiden  $m$ -Reihen bestehen nur aus je einer  $p$ -Reihe.) Es ist daher  $\alpha_q > \alpha_{q+1}$ , also  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_q$ . Aus demselben Grunde haben wir  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ . Nun ist

$$\alpha_1 = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_{i-1}} + \omega^{\alpha_i} + \dots + \omega^{\alpha_q},$$

$$\beta_1 = \omega^{\lambda_1} + \omega^{\lambda_2} + \dots + \omega^{\lambda_{i-1}} + \omega^{\lambda_i} + \dots + \omega^{\lambda_p}$$

oder auch

$$\beta_1 = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_{i-1}} + \omega^{\lambda_i} + \dots + \omega^{\lambda_p}.$$

Da nun  $\alpha_i > \lambda_i$ , so ist auch  $\alpha_1 > \beta_1$ . Damit ist Satz V bewiesen.

Als Anwendung von Satz V ergibt sich folgendes: Sei  $g$  die Gesamtzahl der Grundtypen und  $1 \leq p \leq g$ . Von zwei aufeinanderfolgenden  $p$ -Reihen innerhalb einer  $(p+1)$ -Reihe hat immer die zweite einen kleineren Index als die erste. Demnach kommt die Aufeinanderfolge der  $g$ -Reihen nach endlich vielen Schritten zum Abschluß, ebenso innerhalb der letzten  $g$ -Reihe die Aufeinanderfolge der  $(g-1)$ -Reihen, ebenso in der letzten  $(g-1)$ -Reihe die Aufeinanderfolge der  $(g-2)$ -Reihen usw., schließlich in der letzten 2-Reihe die Aufeinanderfolge der Gesamtersetzungen. Dieses besagt aber im ganzen, daß die Aufeinanderfolge der Gesamtersetzungen überhaupt zum Abschluß kommt. Damit ist die Widerspruchsfreiheit unseres Formalismus gezeigt.

## § 6.

### Rekursive Funktionen höherer Stufe.

Im folgenden wollen wir eine gewisse Verschärfung an dem Endlichkeitsbeweis vornehmen, indem wir für die Anzahl der Gesamtersetzungen, die überhaupt gebildet werden können, eine obere Schranke angeben. Diese Schranke ist selbstverständlich von gewissen Konstanten der Beweisfigur abhängig. Gemäß den methodischen Anforderungen, die wir an einen Widerspruchsfreiheitsbeweis stellen, müssen wir verlangen, daß die Abhängigkeit sich durch rekursiv definierte Funktionen ausdrücken läßt. Andererseits können dies aber keine rekursiven Funktionen der Art sein, wie sie in dem als

widerspruchsfrei zu erweisenden Formalismus auftreten. Aus den vorhergehenden Überlegungen scheint sich zu ergeben, daß es sich um Funktionen von Ordnungszahlen handeln muß, die durch transfinite Rekursion definiert sind. Das ist auch richtig, wenn wir dabei auch nicht an Funktionen denken dürfen, die mit Hilfe des Limesbegriffs definiert sind. Derartige Funktionen würden nicht unseren Anforderungen entsprechen, da sich das Wort „alle“ in ihrer Definition nicht umgehen ließe. Unter einer „rekursiven“ Funktion im Gebiet eines bestimmten Abschnitts der zweiten Zahlenklasse können wir vielmehr nur eine Funktion verstehen, deren Berechnung für eine bestimmte Ordnungszahl sich auf die Berechnung der Funktion für eine endliche Anzahl von kleineren Ordnungszahlen zurückführen läßt.

Nun brauchen wir aber überhaupt bei diesen Funktionen den Bereich der natürlichen Zahlen nicht zu verlassen, da ja diese, wie aus der Mengenlehre bekannt ist, sich nach jedem Ordnungstyp der zweiten Zahlenklasse ordnen lassen und demnach die natürlichen Zahlen selbst bei einer derartigen Anordnung die benötigten transfiniten Ordnungszahlen repräsentieren. Für eine derartige Anordnung gibt es viele Möglichkeiten. Im folgenden soll eine solche genommen werden, die den gegenwärtigen Zwecken besonders angepaßt ist.

Unter  $<_0$  (gewöhnlich einfach  $<$  geschrieben) sei die gewöhnliche Ordnungsbeziehung verstanden, die also die natürlichen Zahlen nach dem Typus  $\omega$  ordnet. Wir führen weiter eine Ordnungsbeziehung  $<_1$  ein, die eine Ordnung der natürlichen Zahlen nach dem Typus  $\omega^2$  ergibt. Wir bemerken zunächst, daß sich jede nicht negative ganze Zahl  $a$  eindeutig in der Form  $2^x(2 \cdot \eta + 1) - 1$  darstellen läßt. Es sei  $2^x(2 \cdot \eta + 1) - 1 <_1 2^y(2 \cdot u + 1) - 1$  richtig, wenn entweder  $x < y$  oder aber  $x = y$  und  $\eta < u$  der Fall ist. Die Reihenfolge der Zahlen sieht dann so aus:

$$0, 2, 4, 6, \dots, 1, 5, 9, 13, 17, \dots, 3, 11, 19, \dots$$

Für die Einführung der Beziehung  $<_{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) benutzen wir die Tatsache, daß sich jede Zahl  $a$  in der Form  $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1$  mit lauter verschiedenen  $a_i$  darstellen läßt. Diese Darstellung ist, abgesehen von der Reihenfolge der  $a_i$ , eindeutig. Wir können völlige Eindeutigkeit erreichen, wenn wir verlangen, daß

$$a_1 >_n a_2 >_n \dots >_n a_t$$

ist. Es heißt nun

$$2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_t} - 1 <_{n+1} 2^{c_1} + 2^{c_2} + \dots + 2^{c_l} - 1$$

$$(b_1 >_n b_2 >_n \dots >_n b_t; \quad c_1 >_n c_2 >_n \dots >_n c_l),$$

wenn sich ein  $i$  ( $i \leq t$ ;  $i \leq 1$ ) angeben läßt, so daß  $b_1 = c_1$ ,  $b_2 = c_2$ , ...  $b_{i-1} = c_{i-1}$  und  $b_i \leq c_i$  der Fall ist oder wenn  $b_1 = c_1$ , ...,  $b_t = c_t$ , aber  $t < l$ . Daß die Beziehung  $\leq_n$  den bekannten Ordnungspostulaten genügt, ist leicht einzusehen.

Die Beziehung zu den Ordnungszahlen ist einleuchtend. Den Ordnungszahlen der Form  $\omega \cdot x + y$ , die wir Ordnungszahlen der ersten Art nennen wollen, entsprechen umkehrbar eindeutig die Zahlen  $2^x (2y + 1) - 1$ , und zwar so, daß der Kleinerbeziehung zwischen diesen Ordnungszahlen auf der einen Seite die Beziehung  $\leq_1$  auf der anderen Seite entspricht. Wir verstehen unter einer Ordnungszahl der  $(n + 1)$ -ten Art ( $n \geq 1$ ) eine solche der Form  $\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_t}$  ( $a_1 > a_2 > \dots > a_t$ ), wobei die  $a_i$  unter sich verschiedene Ordnungszahlen der  $n$ -ten Art sind. Einer Ordnungszahl der  $(n + 1)$ -ten Art  $\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_t}$  entspricht die natürliche Zahl  $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1$ , wenn  $a_1, a_2, \dots, a_t$  die den Ordnungszahlen der  $n$ -ten Art  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  zugeordneten natürlichen Zahlen sind. Ferner geht bei dieser Abbildung die Ordnungsbeziehung zwischen den Ordnungszahlen der  $(n + 1)$ -ten Art in die Beziehung  $\leq_{n+1}$  zwischen den natürlichen Zahlen über.

Dem Satz, daß man von einer bestimmten Ordnungszahl ausgehend, nur endlich oft zu kleineren Ordnungszahlen absteigen kann, entspricht hier der Satz, daß eine Folge von natürlichen Zahlen, von denen jede folgende zu der vorhergehenden in der Beziehung  $\leq_n$  steht, notwendig nach endlich vielen Schritten abbricht. Dieser Satz ist nun die Grundlage für die Definition der rekursiven Funktionen im erweiterten Sinne. Unter einer rekursiven zahlentheoretischen Funktion der  $n$ -ten Stufe verstehen wir eine Funktion, deren Berechnung für ein gegebenes Argument sich auf die Berechnung der Funktion für endlich viele Argumente zurückführen läßt, die zu dem gegebenen Argument in der Beziehung  $\leq_n$  stehen. Wir wollen an dieser Stelle keine allgemeine Untersuchung der Rekursionsschemata anstellen, die hier möglich sind. Es sei nur bemerkt, daß die Rekursionstypen, die für die gewöhnlichen Rekursionsfunktionen bekannt sind, (primitive Rekursion, verschränkte Rekursion, simultane Rekursion usw.) sich entsprechend verallgemeinern lassen. Z. B. würde man auf der  $n$ -ten Stufe als Schema der primitiven Rekursion für eine Funktion mit zwei Variablen das folgende ansehen:

$$\varphi(0, a) = \mu(a),$$

$$\varphi(m + 1, a) = \nu(a, m, \varphi(\chi(m + 1), a)).$$

Hierbei sind  $\mu$  und  $\nu$  bereits definierte Funktionen;  $\chi$  ist ebenfalls eine schon definierte Funktion, die die Eigenschaft  $\chi(m) \leq_n m$  für alle  $m$  besitzt.

Weitere Beispiele werden wir im folgenden kennenlernen. Es wird dabei auch der Fall auftreten, daß die Stufe einer Funktion von der Größe eines Arguments abhängt.

## § 7.

## Definition einiger Rekursionsfunktionen.

Für die folgenden Überlegungen brauchen wir einige Rekursionsfunktionen, deren Definitionen wir hier zusammenstellen wollen. Da es sich um Funktionen der Metamathematik handelt, denken wir dabei weniger an formale Definitionen, als an die Abgabe des rekursiven Berechnungsverfahrens, das uns nach endlich vielen Schritten den Wert der Funktion für gegebene Argumente liefert. Übrigens ist auch in allen Fällen die formale Definition ohne besondere Mühe aufzustellen.

Wir bemerken zunächst, daß sich jede natürliche Zahl  $a$  in der Form  $2^b(2c+1) - 1$  schreiben läßt. Um für eine gegebene Zahl  $a$  die zugehörigen Zahlen  $b$  und  $c$  zu finden, braucht man z. B. für  $a+1$  nur das bekannte Verfahren der Zerlegung in Primfaktoren anzuwenden, das uns dann sofort  $b$  und  $c$  liefert.  $b$  und  $c$  ergeben sich also als rekursive Funktionen  $\tau$  und  $\vartheta$  von  $a$ .

Ferner läßt sich für drei gegebene natürliche Zahlen  $a$ ,  $b$ , und  $p$  immer feststellen, ob  $a <_p b$  ist oder nicht. Falls  $p = 0$ , ist das selbstverständlich. Ist  $p = 1$ , so schreiben wir  $a$  und  $b$  als  $2^c(2b+1) - 1$  und  $2^e(2f+1) - 1$ . Ist nun  $c < e$  oder  $c = e$  und  $b < f$ , so ist  $a <_1 b$  richtig, sonst nicht. Ist  $p \geq 2$ , so setzen wir voraus, daß die Lösbarkeit der Aufgabe für kleinere Zahlen als  $p$  schon gezeigt sei. Wir schreiben nun  $a$  in der Form  $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_m} - 1$  und  $b$  ebenfalls als  $2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_n} - 1$ , was in bekannter Weise möglich ist. Die  $a_i$  sind dabei selbstverständlich unter sich ebenso wie die  $b_i$  alle verschieden. Wir können nun unter den  $a_i$  diejenige Zahl herausfinden, die  $>_{p-1}$  als alle anderen  $a_i$  ist und ebenso die entsprechende Zahl unter den  $b_i$ . Die erste Zahl sei  $a_u$ , die zweite  $b_v$ . Ist nun  $a_u \neq b_v$ , so ist die Frage, ob  $a <_p b$ , bereits gelöst. Es ist  $a <_p b$  oder  $a >_p b$ , je nachdem  $a_u <_{p-1} b_v$  oder  $a_u >_{p-1} b_v$ . Ist  $a_u = b_v$ , so ist auch  $a = b$ , falls keine weiteren  $a_i$  und  $b_i$  vorkommen. Kommt nur kein weiteres  $b_i$  vor, so ist  $a >_p b$ . In den übrigen Fällen suchen wir wieder unter dem Rest der  $a_i$  und der  $b_i$  die „größten“ Zahlen mit Bezug auf die Beziehung  $>_{p-1}$  und setzen das Verfahren bis zur Entscheidung fort.

Es ist also  $a <_p b$  ein rekursives Prädikat (rekursiv im gewöhnlichen Sinne, d. h. von der 0-ten Stufe). Ebenso ist die Funktion  $\eta$  rekursiv, die dadurch bestimmt ist, daß

$$\eta(2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_m} - 1; p) = a_1,$$

falls  $a_1 >_p a_2 >_p \dots >_p a_m$ .

Für  $\eta$  ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften:

Satz 1. Ist  $\eta(b, p) < a$ , so ist  $\eta(2^a + b) = a$ .

Satz 2. Ist  $\eta(a, p) <_p \eta(b, p)$ , so ist  $a <_{p+1} b$ , ( $p \geq 1$ ).

Die folgende Funktion  $\lambda$  definieren wir nur für den Fall, daß das zweite Argument mindestens 1 ist. Als rekursive Berechnungsvorschrift geben wir die folgende an: Es ist

$$\lambda(a, 1) = 1,$$

$$\lambda(2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_m} - 1, n + 1) = \lambda(a_1, n) + \lambda(a_2, n) + \dots + \lambda(a_m, n),$$

falls die  $a_1, \dots, a_m$  alle voneinander verschieden sind.

Es folgen weiter drei Funktionen  $\varphi$ ,  $\omega$  und  $\psi$ , für die die Rekursionen lauten

$$\varphi(0, a) = a; \quad \varphi(n + 1, a) = [\varphi(n, a)]^2 + 1,$$

$$\omega(m, 1) = \varphi(m, 0); \quad \omega(m, n + 1) = \varphi(m, \omega(m, n)),$$

$$\psi(m, n, e) = 2^{[\omega(m, n) + 1] \cdot e}$$

Satz 3. Aus den Definitionen ergibt sich sofort, daß

$$\varphi(m, n, e) \leq \psi(m, f, e),$$

falls

$$n < f.$$

Die folgenden Funktionen  $\varkappa$  und  $\tau$  werden durch simultane Rekursion definiert. Bei diesen Funktionen tritt zum ersten Male eine Rekursion auf, die nicht mehr von der 0ten Stufe ist. Beide Funktionen werden übrigens nur für den Fall definiert, daß das dritte Argument größer als 0 ist.

Definition von  $\varkappa$ .

$$\varkappa(m, e, p, n, 0) = 0.$$

Für von 0 verschiedene  $a$  gilt folgendes

a) Es sei  $p = 1$ ,  $\vartheta(a) \neq 0$ . Dann ist

$$\varkappa(m, e, p, n, a) = 2^{\vartheta(a)} (2 \cdot \vartheta(a) - 1) - 1.$$

b)  $p = 1$ ,  $\vartheta(a) = 0$ .

In diesem Falle ist  $\nu(a) > 0$ , da sonst  $a = 0$  wäre.

$$\varkappa(m, e, p, n, a) = 2^{\nu(a)-1} (2 \cdot \psi(m, n, e) + 1) - 1.$$

c) Es sei  $p > 1$  und  $a$  eine gerade Zahl.

$$\varkappa(m, e, p, n, a) = a - 1.$$

d) Es sei  $p > 1$ ,  $a$  eine ungerade Zahl und  $a = 2^{a_1} - 1$ .

$$\varkappa(m, e, p, n, a) = \tau[m; e; p - 1; n; \varkappa(m, e, p - 1, n, a_1)].$$

e) Es sei  $p > 1$ ,  $a$  eine ungerade Zahl und

$$a = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} - 1 \quad (a_1 > a_2 > \dots > a_l; l \neq 1).$$

In diesem Falle haben wir die Rekursion

$$\kappa(m, e, p, n, a) = 2^{a_1} + \kappa[m, e, p, n + \lambda(a_1, p - 1), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} - 1].$$

Definition von  $\tau$ .

$$\tau(m, e, p, n, 0) = 0.$$

Für von 0 verschiedene  $a$  ist

$$\tau(m, e, p, n, a) = 2^a + \tau[m; e; p; n + \lambda(a, p); \kappa(m, e, p, n + \lambda(a, p), a)].$$

Um zu zeigen, daß diese beiden Definitionen ordnungsgemäß sind, sind noch einige Bemerkungen erforderlich. Wie man erkennt, liegt eine eigentliche Rekursion von höherer Stufe nur bei der Definition von  $\tau$  vor.  $\kappa$  hat nur insofern eine Rekursion von höherer Stufe, als bei dieser  $\tau$  benutzt wird. Die Rekursion für  $\tau$  ist unter der Bedingung zulässig, daß der folgende Satz gilt:

Satz 4. Für von 0 verschiedene  $a$  ist allgemein

$$\kappa(m, e, p, n, a) <_p a.$$

Diese Bedingung ist jedenfalls für  $p = 1$  erfüllt. Es sei nun schon für ein bestimmtes  $p$  gezeigt, daß gemäß der Definition für beliebig vorgegebene  $m, e, n, a$  sich  $\kappa(m, e, p, n, a)$  berechnen läßt und daß

$$\kappa(m, e, p, n, a) <_p a$$

ist. Zunächst läßt sich dann  $\tau$  für dasselbe dritte Argument  $p$  bei beliebigen übrigen Argumenten berechnen. Weiter ist dann auch die Berechnung eines  $\kappa$ -Wertes durchführbar, falls das dritte Argument  $p + 1$  ist. Es bleibt zu zeigen, daß für beliebige  $m, e, n$ , und von 0 verschiedene  $a$

$$\kappa(m, e, p + 1, n, a) <_{p+1} a$$

der Fall ist.

Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz. Dieser lautet:

Satz 5.

$$\eta[\tau(m, e, p, n, a), p] = a.$$

Wir beweisen diesen Satz hier zunächst nur für das genannte  $p$  und beliebige  $m, e, n, a$ .

Beweis. Ist  $a = 0$ , so ist der Satz richtig. Er sei schon bewiesen, falls an Stelle von  $a$  ein  $a_1$  steht, das  $<_p a$  ist. Nach Voraussetzung ist

$$\kappa(m, e, p, n + \lambda(a, p), a) <_p a,$$

daher ist

$\eta[\tau(m; e; p; n + \lambda(a, p); \kappa(m, e, p, n + \lambda(a, p), a))p] = \kappa(m, e, p, n + \lambda(a, p), a)$ ,  
mithin  $\underset{p}{<} a$ . Nach Satz 1 ergibt sich dann die Behauptung.

Nun ergibt sich  $\kappa(m, e, p + 1, n, a) \underset{p+1}{<} a$  folgendermaßen. Die Behauptung ist evident, falls der Fall c) der Definition von  $\kappa$  vorliegt. Im Falle d) ist  $\eta(a, p) = a_1$ , dagegen

$$\eta\{\tau[m; e, p; n; \kappa(m, e, p, n, a_1)], p\}$$

nach (5) gleich  $\kappa(m, e, p, n, a_1)$ , mithin nach Voraussetzung  $\underset{p}{<} a_1$ . Nach Satz 2 folgt dann die Behauptung. Liegt endlich der Fall e) vor, so läßt sich dieser Fall auf einen solchen mit kleinerem  $l$ , bzw. auf d) zurückführen. Die Behauptung ist nämlich richtig, falls

$$\kappa[m, e, p + 1, n + \lambda(a_1, p), 2^{a_1} + \dots + 2^{a_l} - 1] \underset{p+1}{<} 2^{a_1} + \dots + 2^{a_l} - 1$$

ist. Damit ist also (4) und übrigens auch (5) allgemein bewiesen.

Es folgt noch ein weiterer Satz über  $\tau$ .

Satz 6. Ist  $a \underset{p}{<} b$ , so ist

$$\tau(m, e, p, n, a) \underset{p+1}{<} \tau(m, e, p, n, b).$$

Beweis. Ist  $a \underset{p}{<} b$ , so haben wir nach (5)

$$\eta[\tau(m, e, p, n, a), p] \underset{p}{<} \eta[\tau(m, e, p, n, b), p].$$

Die Behauptung ergibt sich dann nach Satz 2.

Als letzte in unserer Reihe von Definitionen führen wir noch die für ein rekursives Prädikat  $\mathfrak{I}$  mit fünf Argumenten ein.  $\mathfrak{I}$  wird nur definiert, falls das dritte Argument mindestens 1 ist. Die Definition lautet:

a) Ist  $p = 1$ , so ist  $\mathfrak{I}(m, e, p, n, a)$  mit  $\theta(a) \leq \psi(m, n, e)$  gleichbedeutend.

b) Ist  $a = 2^{a_1} - 1$  und  $p \geq 1$ , so ist  $\mathfrak{I}(m, e, p + 1, n, a)$  mit  $\mathfrak{I}(m, e, p, n, a_1)$  wahrheitsgleich.

c) Ist  $a = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} - 1$  ( $l \neq 1$ ;  $a_1 > a_2 > \dots > a_l$ ) und  $p \geq 1$ , so bedeutet  $\mathfrak{I}(m, e, p + 1, n, a)$ , daß  $\mathfrak{I}(m, e, p, n, a_1)$  und  $\mathfrak{I}(m, e, p + 1, n + \lambda(a_1, p), 2^{a_1} + \dots + 2^{a_l} - 1)$  richtig sind.

Satz 7. Mit  $\mathfrak{I}(m, e, p, n, a)$  ist auch, falls  $l > n$ ,  $\mathfrak{I}(m, e, p, l, a)$  zutreffend.

Beweis. Für  $p = 1$  ergibt sich das aus Satz 3, und in den Fällen b) und c) der Definition von  $\mathfrak{I}$  durch Induktion.

Satz 8. Ist  $p > 1$ ,  $a$  eine gerade Zahl,  $a \neq 0$  und  $\mathfrak{I}(m, e, p, n, a)$  richtig, so trifft auch  $\mathfrak{I}(m, e, p, n, a - 1)$  zu.

Beweis.  $a$  hat in diesem Falle die Form

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} + 2^0 - 1 \quad (a_1 > a_2 > \dots > a_l; l \geq 1).$$

Ist  $l = 1$ , also  $a = 2^{a_1} + 2^0 - 1$ , so ist gemäß der Definition von  $\mathfrak{Z}$  (Fall c) auch  $\mathfrak{Z}(m, e, p - 1, n, a_1)$  der Fall, daher auch (Fall b)  $\mathfrak{Z}(m, e, p, n, 2^{a_1} - 1)$ . Falls  $l > 1$ , ergibt sich die Behauptung durch Induktion nach  $l$ .

Satz 9. Mit  $\mathfrak{Z}(m, e, p, n, a)$  ist auch  $\mathfrak{Z}(m, e, p, n, \kappa(m, e, p, n, a))$  richtig.

Satz 10. Mit  $\mathfrak{Z}(m, e, p, n, a)$  ist auch  $\mathfrak{Z}(m, e, p + 1, n, \tau(m, e, p, n, a))$  richtig.

Diese beiden Sätze werden durch gemeinsame Induktion bewiesen. Zunächst ist Satz 9 richtig für  $p = 1$ . Das ist im Falle  $a = 0$  sofort ersichtlich. Sonst berücksichtigen wir, daß  $\mathfrak{Z}(m, e, 1, n, a)$  nichts anderes bedeutet als  $\theta(a) \leq \varphi(m, n, e)$  und  $\mathfrak{Z}(m, e, 1, n, \kappa(m, e, 1, n, a))$ , daß  $\theta[\kappa(m, e, 1, n, a)] \leq \varphi(m, n, e)$ . Daher ist die Behauptung auch richtig; falls der Fall a) oder b) der Definition von  $\kappa$  vorliegt.

Wir nehmen weiter an, daß für ein bestimmtes  $p$  ( $p \geq 1$ ) schon die Richtigkeit von Satz 9 gezeigt sei. Es läßt sich dann Satz 10 für dieses  $p$  beweisen.

Für  $a = 0$  ist alles in Ordnung, da  $\mathfrak{Z}(m, e, p + 1, n, 0)$  immer richtig ist. Ist  $a \neq 0$ , so sei für solche  $a_1$ , die  $\leq_p a$  sind, die Behauptung erwiesen. Nach Satz 7 folgt aus  $\mathfrak{Z}(m, e, p, n, a)$  die Richtigkeit von

$$\mathfrak{Z}(m, e, p, n + \lambda(a, p), a),$$

weiter nach Satz 9 die von

$$\mathfrak{Z}[m, e, p, n + \lambda(a, p), \kappa(m, e, p, n + \lambda(a, p), a)].$$

Da  $\kappa(m, e, p, n + \lambda(a, p), a) \leq_p a$  (Satz 4), so ergibt sich weiter nach der Voraussetzung

$$\mathfrak{Z}\{m, e, p + 1, n + \lambda(a, p), \tau[m, e, p, n + \lambda(a, p), \kappa(m, e, p, n + \lambda(a, p), a)]\}:$$

Aus der letzten Beziehung und  $\mathfrak{Z}(m, e, p, n, a)$  folgt dann die Behauptung gemäß Fall c) der Definition von  $\mathfrak{Z}$ , wenn wir noch (5) berücksichtigen.

Es seien weiter Satz 9 und Satz 10 schon für ein bestimmtes  $p$  ( $p \geq 1$ ) bewiesen. Wir zeigen, daß Satz 9 für  $p + 1$  richtig ist.

Für  $a = 0$  ist die Behauptung selbstverständlich. Der Fall a) und b) der Definition von  $\kappa$  kommt nicht in Betracht. Im Falle c) stimmt die Behauptung nach Satz 8. Es sei nun  $a = 2^{a_1} - 1$  ( $a_1 \neq 0$ ). Aus  $\mathfrak{Z}(m, e, p + 1, n, a)$  folgt nach Definition von  $\mathfrak{Z}$   $\mathfrak{Z}(m, e, p, n, a_1)$ . Da Satz 9 für  $p$  richtig ist, erhält man weiter

$$\mathfrak{Z}[m, e, p, n, \kappa(m, e, p, n, a_1)].$$

ferner nach Satz 10

$$\mathfrak{I} \{m, e, p+1, n, \tau [m, e, p, n, \kappa (m, e, p, n, a_1)]\}.$$

Das ist aber gemäß Definition von  $\kappa$  die Behauptung.

Es sei weiter

$$a = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} - 1 \quad (a_1 > a_2 > \dots > a_l; \quad l \neq 1)$$

und  $a$  eine ungerade Zahl. Aus  $\mathfrak{I} (m, e, p+1, n, a)$  ergibt sich nach Definition von  $\mathfrak{I}$   $\mathfrak{I} (m, e, p, n, a_1)$  und  $\mathfrak{I} (m, e, p+1, n + \lambda (a_1, p), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} - 1)$ . Nehmen wir nun den Satz 9 für  $p+1$  und kleineres  $l$  als bewiesen an, so ist  $\mathfrak{I} [m, e, p+1, n + \lambda (a_1, p), \kappa (m, e, p+1, n + \nu (a_1, p), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} - 1)]$  richtig. In Verbindung mit  $\mathfrak{I} (m, e, p, n, a_1)$  erhält man dann nach Definition von  $\mathfrak{I}$

$$\mathfrak{I} \{m, e, p+1, n, 2^{a_1} + \kappa [m, e, p, n + \lambda (a_1, p), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} - 1]\},$$

d. h.

$$\mathfrak{I} [m, e, p+1, n, \kappa (m, e, p+1, n, a)].$$

Damit sind Satz 9 und Satz 10 bewiesen.

Satz 11. *Es sei  $\mathfrak{I} (m, e, p, l, b)$  und  $b \leq_p a$  richtig. Dann ist*

$$b \leq_{\frac{p}{p}} \kappa (m, e, p, l, a).$$

Satz 12. *Es gelte  $\mathfrak{I} (m, e, p+1, n, a)$ . Dann ist*

$$a \leq_{\frac{p+1}{p}} \tau [m, e, p, n, \eta (a, p)].$$

Diese beiden Sätze werden wieder durch simultane Induktion bewiesen.

Wir beweisen zunächst Satz 11 für  $p = 1$ .  $\mathfrak{I} (m, e, 1, l, b)$  ist gleichbedeutend mit  $\theta (b) \leq \psi (m, l, e)$ . Ist nun  $\theta (a) \neq 0$ , so gibt es keine Zahl  $c$ , die die Eigenschaft

$$\kappa (m, e, p, l, a) <_1 c <_1 a$$

hätte. (Vgl. Fall a) der Definition von  $\kappa$ .) Ist  $\theta (a) = 0$ , so ist

$$\theta [\kappa (m, e, 1, l, a)] = \psi (m, l, e),$$

so daß sich aus  $b <_1 a$  und  $\theta (b) \leq \psi (m, l, e)$  die Behauptung ergibt.

Es sei die Richtigkeit von Satz 11 schon für ein bestimmtes  $p$  erwiesen. Es soll dann die Richtigkeit von Satz 12 für dasselbe  $p$  gezeigt werden. Für  $a = 0$  ist alles in Ordnung. Falls  $a \neq 0$ , so sei zunächst  $a = 2^{\nu(a, p)} - 1$ . Nach Satz 5 ist

$$\eta [\tau (m, e, p, n, \eta (a, p)), p] = \eta (a, p).$$

Daraus ergibt sich nach der Definition von  $<$  die Behauptung. Es sei weiter

$$a = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1 \quad (a_1 > a_2 > \dots > a_t; t \neq 1)$$

Wir nehmen den Satz für kleinere  $t$  als bewiesen an. Nun ergibt sich aus  $\mathfrak{Z}(m, e, p+1, n, a)$  nach Definition von  $\mathfrak{Z}$

$$\mathfrak{Z}(m, e, p+1, n + \lambda(a_1, p), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1),$$

nach Voraussetzung also

$$2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1 \leq \tau_{p+1}[m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_2].$$

Ferner ist nach Definition von  $\mathfrak{Z}$

$$\mathfrak{Z}(m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_2)$$

der Fall, weiter ist  $a_2 <_p a_1$ . Nach Satz 11, so weit er bewiesen ist, gilt daher

$$a_2 \leq_p \kappa(m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_1).$$

Nach Satz 6 erhält man

$$\tau[m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_2] \leq \tau_{p+1}\{m, e, p, n + \lambda(a_1, p), \kappa(m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_1)\},$$

also auch

$$2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1 \leq \tau_{p+1}[m, e, p, n + \lambda(a_1, p), \kappa(m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_1)].$$

Da

$$\eta\{\tau[m, e, p, n + \lambda(a_1, p), \kappa(m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_1)], p\} = \kappa(m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_1),$$

mithin  $<_p a_1$  ist, so ist

$$2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1 \leq_{p+1} 2^{a_1} + \tau_{p+1}[m, e, p, n + \lambda(a_1, p), \kappa(m, e, p, n + \lambda(a_1, p), a_1)]$$

weiter also, wenn wir die Definition von  $\tau$  berücksichtigen,

$$2^{a_1} + \dots + 2^{a_t} - 1 \leq_{p+1} \tau(m, e, p, n, a_1).$$

Das ist die Behauptung.

Nachdem wir Satz 12 für  $p$  bewiesen haben, ergibt sich weiter die Gültigkeit von Satz 11 für  $p+1$ . Ist  $a = 0$ , so ist alles klar. Ist  $a$  eine gerade Zahl und  $\neq 0$ , so ist  $\kappa(m, e, p+1, l, a) = a-1$ : Die Behauptung ergibt sich in diesem Falle daraus, daß es keine Zahl gibt, die  $<_{p+1} a$  und  $>_{p+1} a-1$  ist.

Es sei weiter  $a = 2^{a_1} - 1$ , ( $a_1 \neq 0$ ) und  $b = 2^{b_1} + \dots + 2^{b_t} - 1$  ( $b_1 >_p \dots >_p b_t$ ).

Aus  $\mathfrak{Z}(m, e, p+1, l, b)$  ergibt sich  $\mathfrak{Z}(m, e, p, l, b_1)$ , aus  $b <_{p+1} a$  ferner  $b_1 <_p a_1$ . Nach Satz 11 für  $p$  erhalten wir

$$b_1 \leq_p \kappa(m, e, p, l, a_1)$$

und nach Satz 12

$$b \leq_{p+1} \tau(m, e, p, l, b_1).$$

Weiter erhält man nach Satz 6

$$b \leq_{p+1} \tau[m, e, p, l, \kappa(m, e, p, l, a_1)],$$

d. h. nach Definition von  $\kappa$ , Teil d)

$$b \leq_{p+1} \kappa(m, e, p+1, l, a).$$

Endlich haben wir noch den Fall zu berücksichtigen, daß  $a$  ungerade und  $a = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_q} - 1$  ( $a_1 > a_2 > \dots > a_q$ ;  $q \neq 1$ ). Dieser Fall wird auf den für ein kleineres  $q$  zurückgeführt. Es sei

$$b = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_t} - 1.$$

Ist  $b_1 < a_1$ , so ist alles in Ordnung, da ja nach Satz 4 und Teil e) der Definition von  $\kappa$

$$\eta[\kappa(m, e, p+1, l, a), p] = a_1.$$

Wir können also  $b_1 = a_1$  annehmen. Ist  $t = 1$ , so ist die Behauptung ebenfalls selbstverständlich. Ist  $t > 1$ , so ergibt sich aus  $\mathfrak{I}(m, e, p+1, l, b)$

$$\mathfrak{I}(m, e, p+1, l + \lambda(a_1, p), 2^{b_2} + \dots + 2^{b_t} - 1).$$

Da ferner

$$2^{b_2} + \dots + 2^{b_t} - 1 <_{p+1} 2^{a_2} + \dots + 2^{a_q} - 1,$$

so ist nach Voraussetzung

$$2^{b_2} + \dots + 2^{b_t} - 1 \leq_{p+1} \kappa(m, e, p+1, l + \lambda(a_1, p), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_q} - 1),$$

also auch

$$2^{a_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_t} - 1 \leq_{p+1} 2^{a_1} + \kappa(m, e, p+1, l + \lambda(a, p), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_q} - 1),$$

mithin

$$b \leq_{p+1} \kappa(m, e, p+1, l, a).$$

Satz 13. Ist  $t \leq l$ , so ist

$$\kappa(m, e, p, t, a) \leq_p \kappa(m, e, p, l, a).$$

Satz 14. Ist  $t \leq l$ , so ist

$$\tau(m, e, p, t, a) \leq_{p+1} \tau(m, e, p, l, a).$$

Beide Sätze werden gemeinsam durch Induktion nach  $p$  bewiesen. Der Satz 13 ergibt sich für  $p = 1$  sofort aus Satz 3, wenn wir die Definition von  $\kappa$  berücksichtigen. Ist Satz 13 schon für ein bestimmtes  $p$  bewiesen, so folgt

daraus Satz 14 für dieses  $p$  durch Induktion nach  $a$ . Aus Satz 14 erhält man in ähnlicher Weise mit Benutzung von Satz 6 Satz 13 für  $p + 1$ .

Satz 15. Falls  $f \leq 1$  und  $\mathfrak{I}(m, e, p, f, a)$ , so ist

$$\lambda[\tau(m, e, p, f, a), p + 1] \leq \lambda[\tau(m, e, p, 1, a), p + 1].$$

Satz 16. Ist  $b \leq_p a$  und  $\mathfrak{I}(m, e, p, n, b)$  der Fall, so ist

$$\lambda[\tau(m, e, p, n, b), p + 1] \leq \lambda[\tau(m, e, p, n, a), p + 1].$$

Diese beiden Sätze werden durch gemeinsame Induktion nach  $a$  bewiesen. Ist  $a = 0$ , so ist Satz 15 richtig, da  $\tau(m, e, p, f, 0) = \tau(m, e, p, 1, 0) = 0$ . Für Satz 16 ergibt sich aus  $a = 0$  auch  $b = 0$ , so daß auch hier die Behauptung stimmt.

Ist  $a \neq 0$ , so seien beide Sätze schon bewiesen, falls an Stelle von  $a$  ein  $c$  mit der Eigenschaft  $c <_p a$  steht. Unter dieser Voraussetzung beweisen wir jetzt zunächst Satz 15. Nach Definition von  $\tau$  und  $\lambda$  ist

$$\lambda[\tau(m, e, p, f, a), p + 1]$$

$$= \lambda(a, p) + \lambda\{\tau[m, e, p, f + \lambda(a, p), \times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)], p + 1\}$$

und ebenso

$$\lambda[\tau(m, e, p, 1, a), p + 1]$$

$$= \lambda(a, p) + \lambda\{\tau[m, e, p, 1 + \lambda(a, p), \times(m, e, p, 1 + \lambda(a, p), a)], p + 1\}.$$

Es genügt also, unter der Voraussetzung  $f \leq 1$  und  $\mathfrak{I}(m, e, p, f, a)$  zu beweisen, daß

$$\lambda\{\tau[m, e, p, f + \lambda(a, p), \times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)], p + 1\}$$

$$\leq \lambda\{\tau[m, e, p, 1 + \lambda(a, p), \times(m, e, p, 1 + \lambda(a, p), a)], p + 1\}.$$

Nun folgt aus  $\mathfrak{I}(m, e, p, f, a)$  nach Satz 7  $\mathfrak{I}(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)$ . Aus  $\mathfrak{I}(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)$  ergibt sich nach Satz 9

$$\mathfrak{I}[m, e, p, f + \lambda(a, p), \times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)].$$

Da  $\times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a) <_p a$  (Satz 4), so erhält man nach Satz 15, soweit er bewiesen ist,

$$\lambda[\tau[m, e, p, f + \lambda(a, p), \times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)], p + 1]$$

$$\leq \lambda[\tau[m, e, p, 1 + \lambda(a, p), \times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)], p + 1].$$

Weiter ist nach Satz 13

$$\times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a) \leq_p \times(m, e, p, 1 + \lambda(a, p), a).$$

Aus  $\mathfrak{I}[m, e, p, f + \lambda(a, p), \times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)]$  folgt nach Satz 7

$$\mathfrak{I}[m, e, p, 1 + \lambda(a, p), \times(m, e, p, f + \lambda(a, p), a)].$$

Nach Satz 16, soweit er bewiesen ist, hat man daher

$$\begin{aligned} & \lambda \{ \tau (m, e, p, l + \lambda (a, p), \times (m, e, p, l + \lambda (a, p), a)), p + 1 \} \\ & \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, l + \lambda (a, p), \times (m, e, p, l + \lambda (a, p), a)), p + 1 \}. \end{aligned}$$

In Verbindung mit der vorvorletzten Ungleichung ergibt sich dann die Behauptung.

Jetzt beweisen wir Satz 16. Ist  $b = a$ , so ist die Behauptung selbstverständlich. Es sei also  $b < a$ . Aus  $\mathfrak{I} (m, e, p, n, b)$  ergibt sich nach Satz 7  $\mathfrak{I} (m, e, p, n + \lambda (a, p), b)$ . Nach Satz 11 ist

$$b \leq \times (m, e, p, n + \lambda (a, p), a).$$

Nach Voraussetzung haben wir

$$\begin{aligned} & \lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a, p), b), p + 1 \} \\ & \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a, p), \times (m, e, p, n + \lambda (a, p), a)), p + 1 \}. \end{aligned}$$

Ziehen wir nun die Rekursion für  $\tau$  heran, so ist erst recht

$$\lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a, p), b), p + 1 \} \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, n, a), p + 1 \}.$$

Nach Satz 15 haben wir, da ja  $\mathfrak{I} (m, e, p, n, b)$  richtig ist,

$$\lambda \{ \tau (m, e, p, n, b), p + 1 \} \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a, p), b), p + 1 \}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz 17. Aus  $\mathfrak{I} (m, e, p + 1, n, a)$  ergibt sich

$$\lambda (a, p + 1) \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, n, \eta (a, p)), p + 1 \}.$$

Beweis. Ist  $a = 0$ , so ist auch  $\eta (a, p)$  und  $\tau (m, e, p, n, \eta (a, p))$  gleich 0, die Behauptung also selbstverständlich. Ist  $a = 2^{a_1} - 1$ , so ist die Behauptung richtig, da  $\eta \{ \tau (m, e, p, a_1), p \} = a_1$ . Ist

$$a = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1 \quad (t \neq 1; a_1 > a_2 > \dots > a_t),$$

so soll die Behauptung für kleinere  $t$  schon bewiesen sein. Aus  $\mathfrak{I} (m, e, p + 1, n, a)$  ergibt sich  $\mathfrak{I} (m, e, p + 1, n + \lambda (a_1, p), 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1)$  und  $\mathfrak{I} (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), a_2)$ . Daher ist

$$\lambda (2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1, p + 1) \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), a_2), p + 1 \}.$$

Nun ist nach Satz 11  $a_2 \leq \times (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), a_1)$  und nach Satz 16

$$\begin{aligned} & \lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), a_2), p + 1 \} \\ & \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), \times (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), a_1)), p + 1 \}, \end{aligned}$$

daher also

$$\begin{aligned} & \lambda (2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1, p + 1) \\ & \leq \lambda \{ \tau (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), \times (m, e, p, n + \lambda (a_1, p), a_1)), p + 1 \} \end{aligned}$$

weiter nach Definition von  $\lambda$  und  $\tau$

$$\lambda(a, p+1) \leq \lambda[\tau(m, e, p, n, a_1), p+1].$$

Das ist die Behauptung.

### § 8.

#### Abschätzung der Gesamtzahl der Gesamtersetzungen.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der im vorigen Paragraphen definierten Funktionen eine Abschätzung der Gesamtzahl der Gesamtersetzungen vornehmen. Um diese zu erreichen, muß zunächst der Index einer  $p$ -Reihe von Gesamtersetzungen, der früher als Ordnungszahl definiert wurde, als natürliche Zahl eingeführt werden. Wir benutzen dabei die in § 6 gegebene Beziehung zwischen den in Frage kommenden Ordnungszahlen und den natürlichen Zahlen.

Unter dem Index einer 1-Reihe wird die natürliche Zahl  $2^a(2b+1) - 1$  verstanden, falls  $(a, b)$  das in § 4 definierte, der betreffenden Gesamtersetzung zugeordnete Paar von natürlichen Zahlen ist. Der Index einer  $(p+1)$ -Reihe ( $p > 0$ ) ist gleich  $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1$ , falls  $a_1, a_2, \dots, a_t$  die Indizes der aufeinanderfolgenden  $p$ -Reihen sind, aus denen die  $(p+1)$ -Reihe besteht. Die im vorigen Paragraphen definierte Funktion  $\lambda$  hat offenbar folgende Bedeutung: Ist  $a$  der Index einer  $p$ -Reihe, so ist  $\lambda(a, p)$  die Gesamtzahl der Gesamtersetzungen, aus denen die  $p$ -Reihe besteht.

Die Bildung einer Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}_{i+1}$  aus der vorhergehenden, wie sie in § 3 beschrieben wurde, geschah unter entscheidender Benutzung gewisser Zahlzeichen, die bei der Reduktion der Beweisfigur mit Hilfe von  $\mathfrak{G}_i$  auftraten. Es ist daher zunächst wichtig zu wissen, von welcher Größe Zahlzeichen bei den Reduktionen der Beweisfigur durch die einzelnen Gesamtersetzungen höchstens auftreten können.

Nun bauen sich alle Terme der Beweisfigur aus Termen der Form  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  und dem Term 0 auf, indem aus diesen Termen durch Addition, Multiplikation, Anhängen des Strichs oder Anwendung der Funktion  $\delta$  neue Terme gebildet werden. Wir wollen jedem Term eine gewisse Zahl als Grad zuordnen. Ein Term  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  habe den Grad 0, desgleichen das Zahlzeichen 0. Der Grad eines Terms  $a'$  ist um Eins größer als der Grad von  $a$ , ebenso der Grad von  $\delta(a)$ . Ist  $n$  das Maximum der Grade, die die Terme  $a$  und  $b$  haben, so haben  $a+b$  und  $a \cdot b$  den Grad  $n+1$ .

Liegt nun eine bestimmte Gesamtersetzung vor, so ist aus dieser sofort zu ersehen, welches das größte Zahlzeichen ist, auf das sich ein Term  $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$  reduzieren kann. Es sei dies  $a$  bei einer Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}$ . Wir können dann bei einem Term  $n$ -ten Grades eine obere Schranke  $\varphi(n, a)$  angeben.

so daß das Zahlzeichen, auf das sich der Term reduziert,  $\leq \varphi(n, a)$  ist. Hierbei ist  $\varphi$  die in § 7 definierte Funktion. Denn das Zahlzeichen, auf das sich ein Term 0ten Grades reduziert, ist nach Voraussetzung  $\leq a$ . Es sei schon gezeigt, daß für einen Term  $n$ -ten Grades  $\varphi(n, a)$  die angegebene Schranke darstellt. Ist nun  $a$  ein Term  $(n+1)$ -ten Grades, so hat dieser entweder die Form  $b'$ ,  $\delta(b)$ ,  $b+c$  oder  $b \cdot c$ . In den vier Fällen ist das Zahlzeichen, auf das sich  $a$  reduziert,  $\leq \varphi(n, a) + 1$ ,  $\leq \varphi(n, a)$ ,  $\leq 2 \varphi(n, a)$ ,  $\leq \varphi(n, a)^2$ , in allen Fällen also  $\leq \varphi(n, a)^2 + 1$ .

Es sei nun  $m$  der maximale Grad, der unter den Termen der Beweisfigur vorkommt. Dann ist bei der Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}$  das größte Zahlzeichen, auf das sich überhaupt ein Term reduzieren kann,  $\leq \varphi(m, a)$ .

Die Zahl  $a$ , auf die sich höchstens ein Term  $\varepsilon_n \mathfrak{A}(x)$  reduzieren kann, ist bei den einzelnen Gesamtersetzungen verschieden. Sie wird im allgemeinen wachsen mit der Nummer der Gesamtersetzung in der gesamten Reihenfolge der Gesamtersetzungen. Bei der Ausgangsgesamtersetzung wurden alle  $\varepsilon$ -Terme durch 0 ersetzt. Daher ist das größte Zahlzeichen, das bei der ersten Reduktion der Beweisfigur auftreten kann,  $\leq \varphi(m, 0)$ . Weiter kann man zeigen, daß die Zahlzeichen, auf die sich die Terme bei der  $n$ -ten Gesamtersetzung reduzieren, alle  $\leq \omega(m, n)$  sind.  $\omega$  ist hierbei die im vorigen Paragraphen eingeführte Funktion,  $m$  bedeutet wie vorher den größten Grad, der unter den Termen der Beweisfigur vorkommt.

Es sei nämlich schon gezeigt, daß die bei der Reduktion der Beweisfigur durch die  $n$ -te Gesamtersetzung auftretenden Zahlzeichen alle  $\leq \omega(m, n)$  sind. Nun sind die Zahlzeichen, auf die sich bei der nächsten Gesamtersetzung die  $\varepsilon_n \mathfrak{A}(x)$  reduzieren können, entweder dieselben wie vorher, oder aber solche, die bei der  $n$ -ten Gesamtersetzung als Werte von Termen auftraten. In jedem Falle sind sie  $\leq \omega(m, n)$ . Daher ist  $\omega(m, n+1) = \varphi(m, \omega(m, n))$  wegen der Monotonität von  $\varphi$  die Schranke für die Gesamtersetzung.

Wir wollen jetzt für die Indizes der 1-Reihen eine gewisse Abschätzung vornehmen. Der Index einer 1-Reihe wird, wie wir oben festlegten, durch eine Zahl  $2^a(2b+1)-1$  bestimmt. Hierbei stellt  $a$  den Reduktionsgrad der betreffenden Gesamtersetzung, die wir  $\mathfrak{G}$  nennen wollen, bezüglich der Beweisfigur dar und  $b$  den Reduktionsgrad von  $\mathfrak{G}$  bezüglich einer gewissen Formelmenge

$$\mathfrak{B}(0; 3_1, \dots, 3_n), \quad \mathfrak{B}(0'; 3_1, \dots, 3_n), \dots, \mathfrak{B}(3; 3_1, \dots, 3_n).$$

Die Zahl  $a$  ist, unabhängig von der Nummer der Gesamtersetzung  $< 2^e$ , wobei  $e$  die Anzahl der  $\varepsilon$ -Terme der Beweisfigur ist. Wir wollen nun auch für  $b$  eine obere Schranke angeben; diese hängt aber von der Nummer der betreffenden Gesamtersetzung ab. Es kommt dabei nur darauf an, für die Anzahl der  $\varepsilon$ -Terme der Formeln

$$\mathfrak{B}(0; 3_1, \dots, 3_n), \quad \mathfrak{B}(0'; 3_1, \dots, 3_n), \dots, \mathfrak{B}(3; 3_1, \dots, 3_n)$$

eine Schranke  $f$  anzugeben. Man findet dann, durch dieselben Überlegungen, die in § 4 zur Abschätzung für  $a$  führten, daß  $b < 2^f$  ist. Nun enthält jede Formel  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  aus vorstehender Reihe offenbar die gleiche Anzahl von  $\varepsilon$ -Termen wie  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$ .  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  war eine Formel der Beweisfigur, bzw. eine Formel, auf die sich eine Formel der Beweisfigur bei  $\mathfrak{G}$  reduzierte. Daher ist die Anzahl der in  $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$  auftretenden  $\varepsilon$ -Terme  $\leq e$ , wobei  $e$  wie vorher die Anzahl der  $\varepsilon$ -Terme der Beweisfigur ist. Die Gesamtzahl der  $\varepsilon$ -Terme der Formeln

$$\mathfrak{B}(0; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n), \mathfrak{B}(0'; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n), \dots, \mathfrak{B}(\mathfrak{z}; \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n)$$

ist demnach  $\leq (3 + 1)e$ . Nun ist aber  $3 \leq \omega(m, n)$ , wenn  $n$  die Nummer der Gesamtersetzung  $\mathfrak{G}$  ist. Demnach haben wir für  $b$  schließlich die Abschätzung  $b < 2^{(\omega(m, n) + 1)e}$ . Benutzen wir die in § 7 eingeführte Funktion  $\psi$ , so ist

$$b < \psi(m, n, e).$$

**Satz VI.** *Es sei  $a$  der Index einer 1-Reihe, deren Gesamtersetzung die Nummer  $n$  hat.  $m$  und  $e$  bedeuten wie vorher und übrigens auch in allen folgenden Überlegungen den maximalen Grad, der unter den Termen der Beweisfigur vorkommt, bzw. die Anzahl der  $\varepsilon$ -Terme der Beweisfigur. Dann gilt  $\mathfrak{I}(m, e, 1, n, a)$ , wenn  $\mathfrak{I}$  das in § 7 definierte Prädikat ist.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus der zuvor gegebenen Abschätzung und der Definition von  $\mathfrak{I}$ .

**Satz VII.** *Es sei eine Reihe von aufeinanderfolgenden  $p$ -Reihen gegeben, die alle derselben  $(p + 1)$ -Reihe angehören. Die Indizes dieser  $p$ -Reihen seien  $a_1, a_2, \dots, a_t$ . Die erste Gesamtersetzung der ersten  $p$ -Reihe habe die Nummer  $n$ . Dann ist*

$$\mathfrak{I}(m, e, p + 1, n, 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_t} - 1)$$

der Fall.

Eine Konsequenz dieses Satzes ist, daß für den Index  $a$  einer  $(p + 1)$ -Reihe, deren erste Gesamtersetzung die Nummer  $n$  hat,  $\mathfrak{I}(m, e, p + 1, n, a)$  gilt.

**Beweis.** Für kleinere  $p$  sei schon der Satz bzw. (für  $p = 1$ ) die Konsequenz erwiesen. Die Richtigkeit ergibt sich dann, wenn wir die Definition von  $\mathfrak{I}$  beachten, durch Induktion nach  $f$ .

(Man beachte, daß die erste Gesamtersetzung der  $p$ -Reihe mit dem Index  $a_2$  die Nummer  $n + \lambda(a_1, p)$  hat.)

Wir sind jetzt imstande, für die Anzahl der Gesamtersetzungen eine obere Schranke anzugeben. Die Gesamtzahl der Grundtypen sei  $g$ . Sind  $a_1, a_2, \dots, a_t$  die Indizes der ersten  $f$  aufeinanderfolgenden  $g$ -Reihen, so ist  $\lambda(2^{a_1} + \dots + 2^{a_t} - 1, g + 1)$  die Anzahl der Gesamtersetzungen, die

bei diesen  $g$ -Reihen vorkommen. Nach dem vorigen Satz und Satz 17 des vorigen Paragraphen ist

$$\lambda(2^{a_1} + \dots + 2^{a_t} - 1, g + 1) \leq \lambda\{\tau(m, e, g, 1, a_1), g + 1\}.$$

In dieser Abschätzung kommt die Anzahl  $t$  der  $g$ -Reihen überhaupt nicht mehr vor. Für  $a_1$  können wir ebenfalls eine Abschätzung angeben. Der Index einer 1-Reihe ist  $\leq 2^{g+1} - 1$ , der einer 2-Reihe  $\leq 2^{(2^{g+1}-1)} - 1$ , usw. Definieren wir also eine Funktion  $\varrho$  durch

$$\varrho(1, e) = 2^{e+1} - 1; \quad \varrho(n+1, e) = 2^{\varrho(n, e)} - 1,$$

so ist

$$a_1 \leq \varrho(g, e).$$

Nun ist  $\mathfrak{J}(m, e, g, 1, a_1)$  der Fall. Nach Satz 16 haben wir daher

$$\lambda\{\tau(m, e, g, 1, a_1), g + 1\} \leq \lambda\{\tau(m, e, g, 1, \varrho(g, e)), g + 1\}.$$

Demnach ist die Gesamtzahl der Gesamtersetzungen nicht größer als

$$\lambda\{\tau(m, e, g, 1, \varrho(g, e)), g + 1\}.$$

In dieser Abschätzung kommen als Konstanten vor die Gesamtzahl  $g$  der Grundtypen, der maximale Grad  $m$ , der unter den Termen der Beweisfigur vorkommt, und die Anzahl  $e$  der  $\varepsilon$ -Terme der Beweisfigur.

(Eingegangen am 15. 8. 1939.)

## Das schwache E.P.-Axiom und die Beweise der Anordnungsaxiome.

Von

Max Steck in München.

1. In seiner vorletzten Arbeit hat Herr Liebmann Beweise der Hilbertschen Anordnungsaxiome II. 1—II. 4<sup>1)</sup> unter Zugrundelegung des in seiner „Synthetischen Geometrie“<sup>2)</sup> mit mir erarbeiteten Axiomensystems gegeben<sup>3)</sup>. Diese Beweise stützen sich in der Hauptsache auf ein für den Ausbau der Kegelschnittlehre grundlegendes Axiom, das E. P.-Axiom<sup>4)</sup>, „das einmal die Existenz ‚innerer‘ (elliptischer) Punkte (e. P.) eines Kegelschnitts als Träger eines Büschels von lauter Treffgeraden fordert, außerdem aber, daß es außer hyperbolischen und parabolischen Punkten, d. h. Punkten ‚außerhalb‘ und auf dem Kegelschnitt, nur noch e. P. gibt“ (S. 64, wörtliche Anführung aus der Arbeit von Herrn Liebmann.)

2. In einer soeben erschienenen kleinen Arbeit, die analytische Beweisführungen für meine beiden rein synthetischen Unabhängigkeitsbeweise<sup>5)</sup> gibt, weist Herr O. Bottema<sup>6)</sup> darauf hin, daß man die Forderung des E. P.-Axioms dadurch abschwächen könnte, daß man axiomatisch lediglich die Existenz eines einzigen elliptischen Punktes postuliert. Die Folgerungen aus dieser Tatsache zieht indes Herr O. Bottema im Rahmen der genannten Arbeit nicht. Es sei uns daher erlaubt, eine wesentliche axiomatische Folgerung, die sich auf die genannten Liebmannschen Beweise der Anordnungsaxiome II. 1—II. 3 (also ohne das Paschsche Dreiecksaxiom II. 4,

<sup>1)</sup> D. Hilbert, *Grundl. d. Geom.* (7. Aufl.), Leipzig-Berlin 1930.

<sup>2)</sup> H. Liebmann, *Synthet. Geom.*, Leipzig-Berlin 1934.

<sup>3)</sup> H. Liebmann, *Beweise der Anordnungsaxiome im Rahmen der synthetischen Geometrie*, *Math. Ann.* 111 (1935), S. 64—67.

<sup>4)</sup> a. a. O. <sup>2)</sup>, S. 37.

<sup>5)</sup> M. Steck, *Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie II.: Die Unabhängigkeit des E. P.-Axioms und des S. K.-Axioms von den Verknüpfungsaxiomen*, *Monatsh. f. Math. u. Phys.* 46 (1937), S. 93—121.

<sup>6)</sup> O. Bottema, *Zur Axiomatik der projektiven Geometrie*, *Monatsh. f. Math. u. Phys.* 47 (1939), S. 234—239.

siehe hierzu Nr. 4) mit Hilfe des „schwachen E.P.-Axioms“ bezieht, zu ziehen<sup>7)</sup>. — Das schwache E.P.-Axiom formulieren wir so:

*Außer parabolischen und hyperbolischen Punkten gibt es in bezug auf jeden nicht zerfallenden Kegelschnitt  $K_2$  noch mindestens einen elliptischen Punkt. — Der Punkt heißt „elliptisch“, wenn alle durch ihn gehenden Geraden Treffgeraden des  $K_2$  sind, d. h. zwei (verschiedene) Punkte mit ihm gemein haben.*

3. Wir zeigen jetzt, daß die genannten Liebmannschen Beweise der Anordnungsaxiome II. 1—II. 3 auch unter Benutzung des schwachen E.P.-Axioms funktionieren. Dazu geben wir jeweils die sprachlichen Modifikationen im synthetischen Beweistext von H. Liebmann durch Kursivdruck an. Alle übrigen, diesen Beweisen vorstehenden Formulierungen der Arbeit, soweit sie sich nicht auf II. 4 beziehen, bleiben dann bestehen, wenn man nur „E.P.-Axiom“ jedesmal durch „schwaches E.P.-Axiom“ ersetzt und darunter das unter Nr. 2 formulierte Axiom versteht.

a) S. 65 der Liebmannschen Arbeit, Zeile 13 von oben, muß es bei Zugrundelegung des schwachen E.P.-Axioms heißen: „Auf  $K_2$  sind also  $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{U}$  gegeben; dann gibt es (nach dem schwachen E.P.-Axiom) auf  $(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$  einen inneren Punkt von  $K_2$ . Die Verbindungslinie von  $\mathfrak{U}$  mit diesem Punkte gibt mit  $K_2$  einen zweiten Schnittpunkt  $\mathfrak{B}$ , der durch Rückprojektion auf  $g$  einen Punkt  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liefert“.

b) S. 65, Zeile 10 von unten, muß es bei Zugrundelegung des schwachen E.P.-Axioms heißen: „Das Dreieck der Nebenecken dieses Vierecks ist Polardreieck von  $K_2$ , und sein elliptischer Eckpunkt, der etwa

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) \times (\mathfrak{B}\mathfrak{U})$$

sein möge, zeigt, daß in diesem Falle  $C$  zwischen  $A$  und  $U$  liegt“.

Dabei wird jetzt der oben (durch schwaches E.P.-Axiom) auf  $(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$  garantierte elliptische Punkt konstruktiv eindeutig festgelegt.

4. Dagegen reicht die Forderung des schwachen E.P.-Axioms zum Beweis des einschneidenden Paschschen Dreiecksaxioms II. 4 im Rahmen der Liebmannschen Axiomatik der synthetischen Geometrie nicht aus. Denn zur Entscheidung des elliptischen oder hyperbolischen Charakters der Eckinvolutionen des Dreiecks  $ABC$  bedarf es, um die in der Liebmannschen Arbeit aufgeführten Fälle (S. 66) erledigen zu können, der Forderung der Existenz mehrerer elliptischer Punkte „eines beliebig durch  $ABC$  gelegten Kegelschnitts“.

<sup>7)</sup> Aus dem schwachen E.P.-Axiom lassen sich noch weitere wichtige axiomatische Folgerungen ziehen. Wir werden dieselben demnächst zum Gegenstand besonderer Arbeiten machen.

# Stufen der absoluten Geometrie. Die Frage nach der Unabhängigkeit der Anordnung.

Von

Friedrich Bachmann in Marburg (Lahn).

## Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. . . . .	197
§ 1. Axiomatische Grundlagen . . . . .	200
1. 1. Absolute Geometrie und ebene Cayleysche Geometrie . . . . .	200
1. 2. Das Zusatzaxiom IV . . . . .	202
1. 3. Die Axiome III 11 und III 12. . . . .	204
§ 2. Stufen der euklidischen Geometrie . . . . .	205
2. 1. Die algebraische Bedeutung der Stufen. . . . .	205
2. 2. Die Anordnung in der euklidischen Geometrie . . . . .	207
§ 3. Eigentlichkeitsbereiche . . . . .	211
3. 1. Kriterium für Eigentlichkeitsbereiche. . . . .	211
3. 2. Die Eigentlichkeitsbereiche der Form $Q_0$ . . . . .	215
3. 3. Beispiele von Eigentlichkeitsbereichen für Formen, die die Null nicht darstellen . . . . .	218
§ 4. Stufen der ordinär absoluten Geometrie . . . . .	222
4. 1. Ordinär absolute Geometrie 1. Stufe . . . . .	222
4. 2. Die ordinär absolute Geometrie 2. Stufe . . . . .	226
4. 3. Die Existenz des rechtwinkligen Dreiecks und der nicht-euklidischen Parallelen . . . . .	232
§ 5. Das Mittelpunktsaxiom und die Hjelmslevsche Begründung der absoluten Geometrie. . . . .	233

## Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen schließen sich an eine Begründung der ebenen absoluten Geometrie <sup>1)</sup> an, bei der ein Axiomensystem zugrunde gelegt wurde, in dem keine Anordnungsbegriffe und -axiome auftraten. Es soll

<sup>1)</sup> F. Bachmann, Eine Begründung der absoluten Geometrie in der Ebene, *Math. Annalen* 113 (1936), S. 424—451, und F. Bachmann und K. Reidemeister, Die metrische Form in der absoluten und der elliptischen Geometrie, ebenda 113 (1937), S. 748—765. Im folgenden wird die erste Arbeit mit „A. G.“, die zweite mit „M. F.“ zitiert.

nun die Frage nach der algebraischen Bedeutung der Geometrien, die durch dieses Axiomensystem charakterisiert werden, behandelt und damit die Frage entschieden werden, ob eine solche Geometrie notwendig anordenbar ist oder ob es auch nicht anordenbare Geometrien dieser Art gibt und ob also die Anordnungsaxiome von den Axiomen der absoluten Geometrie unabhängig sind.

Es ist zwar nicht schwer zu zeigen, daß es nicht anordenbare euklidische (singulär absolute) Geometrien gibt, die das Axiomensystem erfüllen. Um jedoch die Frage zu entscheiden, ob es auch unter den nicht-euklidischen (ordinär absoluten) Geometrien, die das Axiomensystem erfüllen, nicht anordenbare Geometrien gibt, braucht man zunächst eine algebraische Kennzeichnung dieser Geometrien. Wir wissen, daß eine ordinär absolute Geometrie als ein Eigentlichkeitsbereich in einer ebenen Cayleyschen Geometrie enthalten ist, d. h. in einer projektiven Geometrie über einem Körper, in der durch eine ternäre quadratische Form eine Metrik vermittelt wird. Wie kann nun in einer solchen ebenen Cayleyschen Geometrie ein Eigentlichkeitsbereich abgegrenzt werden, in dem das Axiomensystem erfüllt ist? In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns auf die Betrachtung von maximalen Eigentlichkeitsbereichen, die die Eigenschaft haben, daß die Spiegelungen an den eigentlichen Geraden bereits die volle Bewegungsgruppe der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie erzeugen; diese Beschränkung läuft auf die Hinzunahme eines neuen Axioms (IV) zu unserem Axiomensystem hinaus. Die maximalen Eigentlichkeitsbereiche lassen sich durch ein algebraisches Kriterium charakterisieren. Eine ordinär absolute Geometrie ist nun dann und nur dann anordenbar, wenn es eine Anordnung der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie gibt, bei der der Eigentlichkeitsbereich, in dem die ordinär absolute Geometrie erklärt ist, eine konvexe Punktmenge ist; dabei muß der Körper der Geometrie, damit für die ebene Cayleysche Geometrie überhaupt eine Anordnung existiert, reell<sup>2)</sup> sein. Das Ergebnis ist nun folgendes: eine hyperbolische Geometrie, d. h. eine ordinär absolute Geometrie, in der es zu wenigstens einer Geraden durch einen Punkt die beiden nicht-euklidischen Parallelen gibt oder deren quadratische Form die Null darstellt, existiert genau in den reellen Körpern und ist stets eindeutig anordenbar; dagegen gibt es elliptisch absolute Geometrien, d. h. ordinär absolute Geometrien, in denen keine nicht-euklidischen Parallelen existieren und deren quadratische Form die Null nicht darstellt, sowohl in reellen als auch, wie am Beispiel von Geometrien über den  $p$ -adischen Körpern gezeigt wird, in

<sup>2)</sup> Siehe die Theorie der reellen Körper: E. Artin und O. Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Hamb. Abh. 5 (1926), S. 83–99; E. Artin, *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, ebenda 5 (1926), S. 100–115; B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, Bd. I., 2. Aufl., Berlin 1937, § 70–72.

nicht reellen Körpern, diese Geometrien sind also nicht immer anordenbar, und zwar gibt es nicht anordenbare elliptisch absolute Geometrien nicht nur über nicht reellen Körpern, sondern auch über reellen Körpern in Eigentlichkeitsbereichen, die bei keiner Anordnung konvex sind.

Das Axiomensystem der absoluten Geometrie, das diesen Überlegungen zugrunde liegt, enthält nur schwache Kongruenzaxiome. Fordert man nun durch zusätzliche Kongruenzaxiome für die Geometrie die übliche Beweglichkeit, wie sie z. B. durch das Hilbertsche Axiomensystem der absoluten Geometrie <sup>3)</sup> gewährleistet wird, so gibt es keine nicht anordenbaren Realisierungen der Geometrie mehr. Das Axiom der Streckenabtragbarkeit hat zur Folge, daß die Geometrien stets anordenbar sind, es gibt allerdings im euklidischen Falle noch wesentlich verschiedene Anordnungen. Wenn aber zudem das Axiom gilt, daß ein rechtwinkliges Dreieck existiert, von dem die Hypotenuse und eine Kathete vorgegeben sind, so ist die Geometrie stets eindeutig anordenbar.

Wir werden also dazu geführt, verschiedene Stufen der absoluten Geometrie zu unterscheiden. Als erste Stufe betrachten wir die Geometrien, wie sie durch unser Axiomensystem (mit Einschluß des angedeuteten Axioms IV) gegeben sind, und weitere Stufen denken wir uns durch zusätzliche Kongruenzaxiome definiert. Den Geometrien der höheren Stufen entsprechen bestimmte quadratische Formen und charakteristische reelle Körper, in denen jeweils gewisse Quadratwurzel-Operationen möglich sind.

Zum Schluß wird die Rolle des Axioms, daß jede Strecke einen Mittelpunkt hat, untersucht und damit gezeigt, wie sich die Geometrien, die das Axiomensystem erfüllen, von dem aus Hjelslev <sup>4)</sup> die Begründung der absoluten Geometrie vorgenommen hat, in unseren Aufbau einordnen.

Es sei schließlich erwähnt, daß entsprechende Tatsachen, wie sie hier für die absolute Geometrie nachgewiesen werden, auch in der vollen ebenen elliptischen Geometrie gültig sind, die Podehl und Reidemeister <sup>5)</sup> aus einem Axiomensystem begründet haben, das das hier zugrunde gelegte ergänzt.

<sup>3)</sup> Darunter soll das Axiomensystem verstanden werden, das aus den ebenen Axiomen der ersten drei Axiomgruppen des Hilbertschen Axiomensystems der euklidischen Geometrie, also aus den Axiomen I 1–3, II, III besteht (s. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930). Nimmt man zu unserem Axiomensystem das Axiom der Streckenabtragung hinzu, so kann das entstehende System als eine von Anordnungsbegriffen und -axiomen befreite Fassung des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie betrachtet werden.

<sup>4)</sup> J. Hjelslev, Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, Math.-fys. Meddelelser, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab 8 (1929), Nr. 11; 10 (1929), Nr. 1.

<sup>5)</sup> E. Podehl und K. Reidemeister, Eine Begründung der elliptischen Geometrie, Hamb. Abh. 10 (1934), S. 231–255.

Und zwar verhält sich die volle elliptische Geometrie in der Frage der Anordenbarkeit im wesentlichen wie die euklidische Geometrie.

Zu jeder der hier unterschiedenen Stufen der Geometrie gehört ein bestimmter Vorrat an geometrischen Konstruktionen, die in einer Geometrie der betreffenden Stufe ausführbar sind. Es soll später gezeigt werden, daß den verschiedenen Stufen charakteristische Konstruktionsmittel entsprechen und daß daher die Unterscheidung der Stufen Fragen nach der Tragweite von Konstruktionsmitteln zu entscheiden gestattet.

### § 1.

#### Axiomatische Grundlagen.

1. 1. Absolute Geometrie und ebene Cayleysche Geometrie. Unter einer ebenen Cayleyschen Geometrie <sup>6)</sup> verstehen wir die ebene projektive Geometrie über einem Körper <sup>7)</sup>  $K$ , in der entweder auf einer ausgezeichneten Geraden, der „unendlich fernen Geraden“  $x_3 = 0$ , eine binäre quadratische Form

$$(1) \quad x_1^2 + a x_2^2 \quad - a \neq c^2 \text{ in } K$$

oder in der eine ternäre quadratische Form

$$(2) \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 \quad a_1 a_2 \neq 0$$

gegeben ist und deren Bewegungen die projektiven Transformationen über  $K$  sind, die entsprechend entweder die unendlich ferne Gerade und auf ihr die binäre Form (1) in sich überführen oder die die ternäre Form (2) bis auf einen Faktor in sich überführen. Eine ebene Cayleysche Geometrie der ersten Art nennen wir eine singuläre, eine solche der zweiten Art eine ordinäre ebene Cayleysche Geometrie. In beiden Fällen wird in bekannter Weise durch die quadratische Form für die Geraden der Geometrie eine Orthogonalität definiert.

Wir legen im folgenden das in A. G. angegebene Axiomensystem der absoluten Geometrie zugrunde, das aus drei Axiomengruppen, den Inzidenzaxiomen I 1–2, den Orthogonalitätsaxiomen II 1–3 und den Kongruenzaxiomen III 1–10 <sup>8)</sup> besteht. Das Ergebnis unserer früheren Unter-

<sup>6)</sup> Siehe F. Bachmann, Die Bewegungsgruppe einer ebenen Cayleyschen Geometrie, erscheint im J. reine angew. Math. 181 (1939); im folgenden zitiert als „B. G.“. (Dort wird nur die ordinäre ebene Cayleysche Geometrie betrachtet.)

<sup>7)</sup> Stets Charakteristik  $\neq 2$  vorausgesetzt.

<sup>8)</sup> Es möge nur das Axiom III 9 durch das folgende Axiom ersetzt werden:

Axiom III 9\*. Sind  $AB$  und  $A'B'$  zwei kongruente Strecken, so besitzt die Strecke  $AA'$  einen Mittelpunkt.

Aus III 9\* folgt III 9. Diese Abänderung sollte schon in M. F. geschehen sein, denn III 9\* wurde benutzt, um zu zeigen, daß die Bewegungen einer absoluten Geometrie projektive Transformationen und nicht beliebige Kollineationen sind, die die Polarität erhalten.

suchungen<sup>9)</sup> läßt sich nun so aussprechen: *Zu jeder absoluten Geometrie, d. h. zu jeder Geometrie, die dieses Axiomensystem erfüllt, gibt es eine (kleinste) ebene Cayleysche Geometrie, in der sie als Teilgeometrie enthalten ist*; und zwar ist eine singulär absolute Geometrie, also eine absolute Geometrie, in der es ein Rechteck gibt und in der daher jedes Viereck mit drei rechten Winkeln ein Rechteck ist, Teilgeometrie einer singulären, und eine ordinär absolute Geometrie, d. h. eine absolute Geometrie, in der es kein Rechteck gibt, Teilgeometrie einer ordinären ebenen Cayleyschen Geometrie. Die Punkte und Geraden der absoluten Geometrie sind als eigentliche Punkte und Geraden unter den Punkten und Geraden der ebenen Cayleyschen Geometrie enthalten, die Orthogonalität der eigentlichen Geraden stimmt mit der durch die quadratische Form gegebenen überein und, wenn zwei eigentliche Strecken in der absoluten Geometrie kongruent sind, so lassen sie sich durch eine Bewegung der ebenen Cayleyschen Geometrie ineinander überführen, die Bewegungsgruppe der absoluten Geometrie ist zu einer Untergruppe der Bewegungsgruppe der ebenen Cayleyschen Geometrie isomorph.

Als einen *Eigentlichkeitsbereich* bezeichnen wir umgekehrt jede Gesamtheit von Punkten und Geraden einer ebenen Cayleyschen Geometrie, die unser Axiomensystem der absoluten Geometrie erfüllt, wenn man das Senkrech stehen und die Streckenkongruenz im Sinne der durch die quadratische Form gegebenen Metrik versteht. Einige einfache Eigenschaften von Eigentlichkeitsbereichen sind die folgenden:

1) Aus den Inzidenzaxiomen der absoluten Geometrie folgt, daß eine Gerade dann und nur dann zum Eigentlichkeitsbereich gehört, wenn sie wenigstens zwei Punkte des Eigentlichkeitsbereiches enthält. Die Eigentlichkeit einer Geraden kann aber bereits daraus gefolgert werden, daß sie einen eigentlichen Punkt enthält, denn nach A. G., Satz 27 ist auch die Verbindungsgerade eines eigentlichen mit einem uneigentlichen Punkt eigentl. *Es müssen also alle Geraden durch einen eigentlichen Punkt eigentl. sein* und daher mehrere eigentliche Punkte enthalten. Demnach wird es bei der Abgrenzung eines Eigentlichkeitsbereiches im wesentlichen auf eine Charakterisierung der eigentlichen Punkte ankommen.

2) Ein Eigentlichkeitsbereich ist stets ein echter Teilbereich einer ebenen Cayleyschen Geometrie. Ist nämlich zunächst im singulären Falle ein Punkt  $P$  der unendlich fernen Geraden und ein eigentlicher Punkt  $A$  gegeben, der nicht auf dieser Geraden liegt, so gibt es durch  $A$  eine Gerade  $p$ , deren Pol  $P$  ist, und  $p$  ist nach 1) eigentl.  $P$  muß nun uneigentlich sein, da sich sonst im Widerspruch zu Axiom II 2 von einem eigentlichen Punkt mehrere eigentliche Lote auf eine eigentliche Gerade fallen ließen; es sind also alle Punkte

<sup>9)</sup> Siehe Anm. 1).

der unendlich fernen Geraden und daher diese Gerade selbst uneigentlich. Ist in einer ordinären ebenen Cayleyschen Geometrie ein Punkt  $P$  zu einer Geraden  $p$  polar und inzidiert  $P$  nicht mit  $p$ , so können  $P$  und  $p$  wiederum nach Axiom II 2 nicht gleichzeitig eigentlich sein. Inzidiert  $P$  aber mit  $p$ , so ist  $p$  zu sich selbst orthogonal und daher nach Axiom II 1 nicht eigentlich; nach 1) ist dann auch  $P$  uneigentlich. *Von einem Paar Pol-Polare ist also höchstens ein Element eigentlich, und beide Elemente sind uneigentlich, wenn sie miteinander inzidieren.*

1. 2. **Das Zusatzaxiom IV.** Während allgemein die Bewegungsgruppe einer absoluten Geometrie zu einer Untergruppe der Bewegungsgruppe der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie isomorph ist, wollen wir im folgenden nur solche absoluten Geometrien betrachten, deren Bewegungsgruppen zu den vollen Bewegungsgruppen der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrien isomorph sind. Die Beschränkung auf diesen Fall wird axiomatisch durch die Hinzunahme eines neuen Axioms bewirkt.

Wir definieren zunächst, daß zwei Geraden  $g$  und  $h$  *nicht-euklidisch parallel* heißen sollen, wenn der Pol  $G$  von  $g$  von dem Pol  $H$  von  $h$  verschieden ist und der (uneigentliche) Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  mit  $G$  und  $H$  auf einer (uneigentlichen) Geraden liegt. Nun formulieren wir folgendes Axiom<sup>10)</sup>:

**Axiom IV.** *Wenn zwei Geraden keinen Schnittpunkt besitzen, so haben sie entweder ein gemeinsames Lot oder sie sind zueinander nicht-euklidisch parallel.*

In einer singularär absoluten Geometrie kann es offenbar keine zueinander nicht-euklidisch parallelen Geraden geben. Denn die Pole  $G$  und  $H$  zweier Geraden  $g$  und  $h$  liegen stets auf der unendlich fernen Geraden, und wenn der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  ebenfalls auf dieser Geraden liegt, so ist  $G$  mit  $H$  identisch. In diesem Falle ist daher das Axiom IV mit dem folgenden Spezialfall äquivalent:

**Axiom IV\*.** *Zwei Geraden, die keinen Schnittpunkt besitzen, haben ein gemeinsames Lot.*

<sup>10)</sup> Man kann an Stelle des Axioms IV auch das folgende Axiom wählen:

**Axiom IVa.** *Zu einer Geraden  $g$  gibt es durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt höchstens zwei Geraden, die mit  $g$  weder einen Punkt noch ein Lot gemein haben.*

Eine singularäre Geometrie, die IVa erfüllt, erfüllt wiederum den Spezialfall IV\*, und die elliptisch absolute Geometrie kann wieder als die ordinär absolute Geometrie definiert werden, die IV\* erfüllt. Die hyperbolische Geometrie ist die ordinär absolute Geometrie, in der IVa, aber nicht IV\* gilt. Sie enthält also zu wenigstens einer Geraden  $g$  zwei Ausnahmegeraden, die mit  $g$  weder einen Punkt noch ein Lot gemein haben. Bezeichnet man diese Geraden als zu  $g$  nicht-euklidisch parallel, so kann man zeigen, daß unter Voraussetzung des Axioms IVa diese Definition der nicht-euklidischen Parallelen mit der im Text verwendeten gleichwertig ist.

Eine singular absolute Geometrie, in der das Axiom IV\* gilt, ist also eine streng singuläre Geometrie<sup>11)</sup>. Wir werden eine solche Geometrie im folgenden auch als eine *euklidische Geometrie* bezeichnen; denn die Forderung, daß ein Rechteck existiert, und das Axiom IV\* sind zusammen äquivalent mit dem euklidischen Parallelenaxiom in der Gestalt: Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt höchstens eine (also genau eine) Nicht-Schneidende.

Es ist nun möglich, daß auch in einer ordinär absoluten Geometrie der Spezialfall IV\* des Axioms IV gültig ist. Eine solche ordinär absolute Geometrie, in der das Axiom IV\* gilt, nennen wir eine *elliptisch absolute Geometrie*. Dagegen bezeichnen wir eine ordinär absolute Geometrie, in der das Axiom IV, jedoch nicht der Spezialfall IV\* gilt und in der es also nicht-euklidische Parallelen gibt, als eine *hyperbolische Geometrie*. Ist in einer hyperbolischen Geometrie eine Gerade  $h$  zu einer Geraden  $g$  nicht-euklidisch parallel, so gibt es durch jeden Punkt  $P$ , der nicht auf  $g$  liegt, genau zwei Geraden, die zu  $g$  nicht-euklidisch parallel sind. Zunächst hat nämlich der (uneigentliche) Schnittpunkt  $S$  von  $g$  und  $h$  die Eigenschaft, daß er mit zwei Punkten seiner Polaren, nämlich mit  $G$  und mit  $H$ , in einer (uneigentlichen) Geraden liegt, er inzidiert also mit seiner Polaren, und der Pol jeder Geraden durch  $S$  liegt also auf der Geraden  $(SG)$ . Ist daher  $k$  die Verbindungsgerade von  $P$  mit  $S$ , so liegt auch der Pol von  $k$  auf  $(SG)$  und  $k$  ist also zu  $g$  nicht-euklidisch parallel. Und geht  $k$  durch die Spiegelung am Lot von  $P$  auf  $g$  in eine Gerade  $k'$  über, so ist  $k'$  von  $k$  verschieden und hat ebenfalls mit  $g$  weder einen eigentlichen Punkt noch ein eigentliches Lot gemein, also ist nach Axiom IV auch  $k'$  zu  $g$  nicht-euklidisch parallel. Es ist auch der uneigentliche Schnittpunkt  $S'$  von  $k'$  mit  $g$  ein Punkt, der mit seiner Polaren inzidiert. Und da auf der Geraden  $g$  nicht mehr als zwei zu sich selbst polare Punkte liegen können, gibt es durch  $P$  zu  $g$  nur die beiden nicht-euklidischen Parallelen  $k$  und  $k'$ .



Fig. 1.

Im ordinären Falle folgt aus Axiom IV, daß von einem Paar Pol-Polare, dessen Elemente nicht inzidieren, mindestens ein Element, und daher in Verbindung mit der Bedingung 2) aus 1. 1, daß genau ein Element eigentlich ist. Inzidiert nämlich ein Punkt  $P$  nicht mit seiner Polaren  $p$  und sind  $g$  und  $h$  zwei eigentliche Geraden durch  $P$ , so sind  $g$  und  $h$  nicht zueinander nicht-euklidisch parallel und  $p$  ist in der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie

<sup>11)</sup> M. F., § 1.

das gemeinsame Lot von  $g$  und  $h$ ; wären nun  $P$  und  $p$  gleichzeitig uneigentlich, so hätten  $g$  und  $h$  im Widerspruch zu Axiom IV weder einen eigentlichen Schnittpunkt noch ein eigentliches gemeinsames Lot. Da ferner im singulären Fall alle Punkte, die nicht auf der unendlich fernen Geraden liegen, und alle von dieser verschiedenen Geraden eigentlich sind, so ergibt sich, daß die Eigentlichkeitsbereiche, in denen eine Geometrie gilt, die das Axiom IV erfüllt, stets maximale Eigentlichkeitsbereiche sind. Denn nach der Bedingung 2) aus 1. 1 ist es unmöglich, daß ein Bereich von Punkten und Geraden der betreffenden ebenen Cayleyschen Geometrie, der einen solchen Eigentlichkeitsbereich umfaßt, wiederum ein Eigentlichkeitsbereich ist. Es gilt nun

**Satz 1.** *Die Bewegungsgruppe einer absoluten Geometrie, die das Axiom IV erfüllt, ist zu der vollen Bewegungsgruppe der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie isomorph.*

Im singulären Falle ist der Satz klar. Um ihn auch im ordinären Falle nachzuweisen, benutzen wir die Tatsache, daß die Bewegungsgruppe der ebenen Cayleyschen Geometrie durch die Spiegelungen an den Geraden, die nicht Tangenten an den definierenden Kegelschnitt sind, erzeugt wird<sup>12)</sup>. Die Spiegelungen an den eigentlichen Geraden sind gewiß Bewegungen der absoluten Geometrie, dies gilt aber auch für die Spiegelungen an den uneigentlichen Geraden; ist nämlich  $P$  der Pol einer uneigentlichen Geraden  $p$ , so ist  $P$  wegen der Gültigkeit des Axioms IV eigentlich, und die Spiegelung an  $p$ , die gleich dem Produkt der Spiegelungen an zwei orthogonalen sich in  $P$  schneidenden Geraden ist, ist also gleich dem Produkt von zwei Spiegelungen an eigentlichen Geraden.

Umgekehrt erkennt man leicht, daß die Bewegungsgruppe einer absoluten Geometrie nur dann zu der der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie isomorph ist, wenn die absolute Geometrie das Axiom IV erfüllt.

Die quadratische Form der ebenen Cayleyschen Geometrie, die zu einer elliptisch absoluten Geometrie gehört, stellt die Null nicht dar; denn ein Punkt, in dem die Form verschwindet, inzidiert mit seiner Polaren, ist also notwendig uneigentlich, und zwei eigentliche Geraden durch ihn hätten weder einen eigentlichen Schnittpunkt noch ein eigentliches gemeinsames Lot. Dagegen stellt die quadratische Form der ebenen Cayleyschen Geometrie, die zu einer hyperbolischen Geometrie gehört, die Null dar, da es ja Punkte geben muß, die mit ihrer Polaren inzidieren.

**1. 3. Die Axiome III 11 und III 12.** Eine absolute Geometrie, die das Axiom IV erfüllt, bezeichnen wir auch als eine *absolute Geometrie 1. Stufe*. Im folgenden werden wir durch Hinzunahme weiterer Kongruenzaxiome

<sup>12)</sup> B. G., 6.

höhere Stufen der absoluten Geometrie definieren. Hierzu verwenden wir das Axiom der Streckenabtragung

Axiom III 11. Ist eine Strecke  $AB$  und auf einer Geraden  $g$  ein Punkt  $C$  gegeben, so gibt es einen Punkt  $D$  auf  $g$  so, daß  $AB \cong CD$  ist.  
und das Axiom vom rechtwinkligen Dreieck

Axiom III 12. Wenn zwei Strecken nicht kongruent sind, so gibt es immer ein rechtwinkliges Dreieck, von dem die Hypotenuse einer der beiden Strecken und eine Kathete der anderen Strecke kongruent ist.

Über das Verhältnis dieser Axiome zu verwandten Aussagen sei hier nur gesagt, daß im Rahmen unseres Axiomensystems aus dem Axiom III 11 der Satz folgt, daß jeder Winkel halbirbar ist, genauer der Satz: Schneiden sich zwei Geraden  $h$  und  $k$  in einem Punkt  $P$ , so gibt es eine Gerade  $g$  durch  $P$  so, daß die Spiegelung an  $g$  die Geraden  $h$  und  $k$  vertauscht. Ist nämlich  $H$  ein Punkt auf  $h$  und  $K$  ein Punkt auf  $k$  mit der Eigenschaft, daß  $PH \cong PK$  ist, so ist nach dem Axiom III 8 das Lot von  $P$  auf  $(HK)$  eine Gerade mit der gesuchten Eigenschaft. Unten werden wir sehen, daß unter Voraussetzung des Axioms IV umgekehrt aus der Winkelhalbierbarkeit das Axiom III 11 folgt.

## § 2.

### Stufen der euklidischen Geometrie.

2.1. Die algebraische Bedeutung der Stufen. Eine euklidische Geometrie, wie wir sie in 1.2 definiert haben, bezeichnen wir genauer als eine euklidische Geometrie 1. Stufe. Aus M. F., § 2 wissen wir

Satz 2. Das algebraische Äquivalent einer euklidischen Geometrie 1. Stufe ist die ebene affine Geometrie über einem Körper  $K$ , in der durch eine Form

$$(1) \quad \xi_1^2 + a \xi_2^2 \quad - a \neq c^2 \text{ in } K$$

eine Metrik gegeben ist.

D. h. jede euklidische Geometrie 1. Stufe läßt sich algebraisch so darstellen, und umgekehrt ist die affine Geometrie über einem beliebigen Körper  $K$ , in der durch eine Form (1) eine Metrik vermittelt wird, eine euklidische Geometrie 1. Stufe. Zwei Geraden sind zueinander senkrecht, wenn sie entweder zu den beiden Koordinaten-Achsen parallel oder von der Gestalt  $b\xi_1 + \xi_2 + c = 0$ ,  $b'\xi_1 + \xi_2 + c' = 0$  mit  $abb' = -1$  sind, und die Bewegungen sind die affinen Transformationen  $\xi'_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ), wo  $((a_{ik}))$  ( $i, k = 1, 2$ ) die Form (1) in sich überführt.

Gilt in einer euklidischen Geometrie auch das Axiom III 11 von der Streckenabtragung, so nennen wir sie eine euklidische Geometrie 2. Stufe. Es gilt

Satz 3. *Das algebraische Äquivalent einer euklidischen Geometrie 2. Stufe ist die ebene affine Geometrie über einem Hilbertschen Körper, in der durch die Form*

$$(2) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2$$

*eine Metrik gegeben ist.*

Unter einem Hilbertschen Körper verstehen wir dabei einen Körper, in dem  $-1$  nicht Quadratzahl ist und in dem die Quadratwurzel aus jedem Ausdruck  $1 + c^2$  gezogen werden kann, wo  $c$  ein beliebiges Element des Körpers ist<sup>13)</sup>. Ein Beispiel für einen Hilbertschen Körper ist der von Hilbert verwendete Bereich  $\Omega$  der total-reellen algebraischen Zahlen, die durch sukzessives Quadratwurzelziehen entstehen<sup>14)</sup>.

Zum Beweis von Satz 3 sei zunächst bemerkt, daß in einer euklidischen Geometrie das Axiom III 11 mit dem Satz äquivalent ist, daß jeder Winkel halbirbar ist. Nach 1.3 folgt aus III 11 die Winkelhalbierbarkeit. Umgekehrt folgt aus der Winkelhalbierbarkeit, daß es zu einer Strecke  $AB$  auf jeder Geraden durch  $A$  eine kongruente Strecke gibt, und die Strecke läßt sich dann durch Ziehen von Parallelen auf jeder Geraden  $g$  von einem beliebigen Punkt  $C$  aus abtragen. Eine euklidische Geometrie 2. Stufe kann daher auch als eine euklidische Geometrie definiert werden, in der jeder Winkel halbirbar ist.

Nun ist offenbar dafür, daß in einer euklidischen Geometrie, also in einer affinen Geometrie mit der Form (1), alle Winkel halbirbar sind, notwendig und hinreichend, daß die  $\xi_1$ -Achse durch Spiegelung an einer Geraden durch den Nullpunkt in jede andere Gerade durch den Nullpunkt übergeführt werden kann. Die Formel für die Spiegelung an der Geraden  $\xi_2 = b\xi_1$  lautet nach M. F., § 2

$$\xi_1' = \frac{1 - ab^2}{1 + ab^2} \xi_1 + \frac{2ab}{1 + ab^2} \xi_2,$$

$$\xi_2' = \frac{2b}{1 + ab^2} \xi_1 - \frac{1 - ab^2}{1 + ab^2} \xi_2.$$

Sie führt also einen Punkt  $(\xi_1, 0)$  der  $\xi_1$ -Achse mit  $\xi_1 \neq 0$  in den Punkt

$$\xi_1' = \frac{1 - ab^2}{1 + ab^2} \xi_1, \quad \xi_2' = \frac{2b}{1 + ab^2} \xi_1$$

über. Da nun zunächst die  $\xi_1$ -Achse in die  $\xi_2$ -Achse gespiegelt werden kann, muß es ein  $b$  geben, so daß für den Bildpunkt des Punktes  $(\xi_1, 0)$  die Koordinate  $\xi_1' = 0$  ist; es muß also  $a$  in dem Körper der Geometrie eine Quadratzahl sein. Ist  $\xi_1' \neq 0$ , so ergibt sich als Gleichung der Bildgeraden der  $\xi_1$ -Achse bei der Spiegelung an  $\xi_2 = b\xi_1$ :

$$\xi_2 = \frac{2b}{1 - ab^2} \xi_1.$$

<sup>13)</sup> Diese Körper haben Herr Reidemeister und ich früher gelegentlich als euklidische Körper bezeichnet.

<sup>14)</sup> Hilbert, a. a. O., § 9 und § 37.

Es soll nun zu jeder Geraden  $\xi_2 = c\xi_1$  ein  $b$  geben, so daß

$$c = \frac{2b}{1 - ab^2}$$

gilt; dies ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$\sqrt{1 + ac^2}$$

für jedes  $c$  existiert. Es muß also, da  $a$  eine Quadratzahl ist, aus jeder Summe von zwei Quadraten die Wurzel gezogen werden können. Aus demselben Grunde läßt sich die Form in der Gestalt (2) schreiben und kann  $-1$  nicht Quadratzahl sein.

Eine euklidische Geometrie, in der außer dem Axiom III 11 auch das Axiom III 12 vom rechtwinkligen Dreieck gilt, bezeichnen wir schließlich als eine *euklidische Geometrie 3. Stufe*. Es gilt

**Satz 4.** *Das algebraische Äquivalent einer euklidischen Geometrie 3. Stufe ist die ebene affine Geometrie über einem reellen quadratisch abgeschlossenen Körper, in der durch die Form (2) eine Metrik gegeben ist.*

Ein reeller quadratisch abgeschlossener Körper ist dabei als ein reeller Körper definiert, in dem, wenn  $c$  ein beliebiges von Null verschiedenes Element ist, entweder aus  $c$  oder aus  $-c$  die Wurzel gezogen werden kann.

Zum Beweis des Satzes 4 denken wir uns eine euklidische Geometrie 2. Stufe gegeben, in der auch das Axiom III 12 gültig ist. In einer euklidischen Geometrie 2. Stufe besitzen kongruente Strecken als Invariante die Länge, die nur bis auf das Vorzeichen bestimmt und daher ein Zahlenpaar  $(a, -a)$  ist. Sind nun zwei nicht kongruente Strecken gegeben und sind  $(a, -a)$  und  $(b, -b)$  ihre Längen, so muß es nach dem Axiom III 12 auch eine Strecke der Länge  $(\sqrt{a^2 - b^2}, -\sqrt{a^2 - b^2})$  oder eine Strecke der Länge  $(\sqrt{b^2 - a^2}, -\sqrt{b^2 - a^2})$  geben. Es muß also die Quadratwurzel aus dem Ausdruck  $a^2 - b^2$  oder aus dem Ausdruck  $-(a^2 - b^2)$  in dem Körper der Geometrie existieren. Gewiß existiert nicht die Wurzel aus beiden Ausdrücken, da dann  $-1$  Quadrat wäre. Da nun, wenn  $(a, -a)$  und  $(b, -b)$  alle in der Geometrie auftretenden Längen durchlaufen, der Ausdruck  $a^2 - b^2$  alle Zahlen des Körpers der Geometrie darstellt, muß sich in der Tat, wenn  $c$  eine beliebige von Null verschiedene Zahl ist, entweder aus  $c$  oder aus  $-c$  die Wurzel ziehen lassen. Umgekehrt erkennt man, daß in einer euklidischen Geometrie 2. Stufe über einem Körper, in dem dies der Fall ist, das Axiom III 12 gültig ist.

**2. 2. Die Anordnung in der euklidischen Geometrie.** Wir nennen eine euklidische Geometrie *angeordnet*, wenn in ihr ein Begriff „Zwischen“ erklärt ist, für den die Hilbertschen Anordnungsaxiome<sup>15)</sup> gelten. Aus bekannten Tatsachen der affinen Geometrie folgt

<sup>15)</sup> Hilbert, a. a. O., § 3.

**Satz 5.** *Eine euklidische Geometrie ist dann und nur dann anordenbar, wenn der Körper der Geometrie anordenbar, also reell ist.*

Die verschiedenen Anordnungen, deren eine euklidische Geometrie über einem reellen Körper fähig ist, und die verschiedenen Anordnungen des Körpers  $K$  entsprechen sich eineindeutig. Sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei verschiedene Anordnungen von  $K$  und geht  $\alpha_2$  aus  $\alpha_1$  durch einen Automorphismus von  $K$  hervor, der die in der quadratischen Form auftretende (nur bis auf einen quadratischen Faktor bestimmte) Zahl  $a$  in sich überführt, so gibt es eine Abbildung der Geometrie auf sich, bei der die durch  $\alpha_1$  induzierte Anordnung in die durch  $\alpha_2$  induzierte übergeht. Zwei solche Anordnungen nennen wir isomorph und bezeichnen zwei Anordnungen als wesentlich verschieden, wenn sie nicht in dieser Weise zusammenhängen. Es gilt nun

**Satz 6.** *Es gibt sowohl anordenbare als nicht anordenbare euklidische Geometrien 1. Stufe, die anordenbaren sind dabei im allgemeinen auf wesentlich verschiedene Weise anordenbar. Eine euklidische Geometrie 2. Stufe ist stets anordenbar, sie läßt im allgemeinen auch noch wesentlich verschiedene Anordnungen zu. Eine euklidische Geometrie 3. Stufe ist stets eindeutig anordenbar.*

Durch Satz 5 ist die Frage, ob die euklidischen Geometrien der verschiedenen Stufen anordenbar sind, auf die Frage nach der Anordenbarkeit der in den Sätzen 2 bis 4 charakterisierten Körper zurückgeführt. Satz 2 zeigt, daß eine euklidische Geometrie 1. Stufe über den verschiedensten nicht anordenbaren Körpern, u. a. auch über endlichen Körpern existiert, und weiter, daß es eine solche Geometrie über allen reellen Körpern gibt. Dabei kann die Geometrie eindeutig anordenbar sein, wie es z. B. die Geometrie über dem Körper  $R$  der rationalen Zahlen ist, sie kann jedoch wie z. B. die Geometrie über dem durch Adjunktion einer Unbestimmten  $t$  entstehenden Körper  $R(t)$  unendlich viele wesentlich verschiedene Anordnungen, und zwar sowohl archimedische als nicht-archimedische, zulassen. Eine euklidische Geometrie 2. Stufe ist stets anordenbar, da ein Hilbertscher Körper reell ist.

Unter den Hilbertschen Körpern gibt es solche, deren sämtliche Anordnungen durch Automorphismen auseinander hervorgehen, aber auch solche, die unendlich viele nicht isomorphe Anordnungen zulassen. Ein Beispiel für den ersten Fall ist der Körper  $\Omega$ ; er besitzt zwar außer der natürlichen Anordnung, die ihn als einem Unterkörper des Körpers  $A$  der reellen algebraischen Zahlen zukommt, noch andere Anordnungen; ist jedoch  $\alpha$  eine solche, so existiert zu dem durch  $\alpha$  geordneten Körper  $\Omega$  ein reell-abgeschlossener Körper, der zu  $A$  isomorph ist<sup>16)</sup>. Der Isomorphismus führt den durch  $\alpha$  geordneten Körper  $\Omega$  in einen natürlich geordneten Teilkörper von  $A$  über; dieser Teilkörper ist  $\Omega$  selbst, da  $A$  außer  $\Omega$  keinen zu  $\Omega$  isomorphen Körper

<sup>16)</sup> Siehe die in Anm. 2) zitierten Arbeiten.

enthält, und der Isomorphismus ist also ein Automorphismus von  $\Omega$ , bei dem die Anordnung  $\alpha$  in die natürliche Anordnung von  $\Omega$  übergeht. Ein Beispiel für den zweiten Fall ist der von Hilbert<sup>17)</sup> verwendete Körper  $\Omega$ , derjenigen Elemente, die aus denen des Körpers  $R(t)$  durch die rationalen Operationen und die Operation  $|\sqrt{1 + \omega^2}|$  hervorgehen, wo  $\omega$  ein bereits auf diese Weise entstandenes Element bedeutet. Dieser Körper ist, wie Hilbert gezeigt hat, nicht-archimedisch anordenbar; er besitzt außerdem ebenso wie der Körper  $R(t)$  unendlich viele archimedische Anordnungen, die nicht durch Automorphismen auseinander hervorgehen. Eine euklidische Geometrie 3. Stufe ist schließlich stets eindeutig anordenbar, da ein reeller quadratisch abgeschlossener Körper stets eindeutig anordenbar ist.

In einer euklidischen Geometrie 2. Stufe gibt es bestimmte Zwischenbeziehungen, die bei jeder Anordnung, deren die Geometrie fähig ist, statt haben, so liegt z. B. der Mittelpunkt einer Strecke stets zwischen den Endpunkten. Wir fragen uns nun, wie sich diese *invarianten Zwischenbeziehungen* kennzeichnen lassen.

Durch jede Anordnung der Geometrie wird für die Längen eine Kleiner-Relation festgelegt: bezüglich dieser Relation bilden die Längen eine geordnete Menge, die zu der geordneten Menge derjenigen Elemente des Körpers  $K$  ähnlich ist, die bei der entsprechenden Anordnung von  $K$  positiv sind. Sind nun  $(a, -a)$  und  $(b, -b)$  zwei Längen, für die

$$(1) \quad b^2 - a^2 \text{ eine Quadratzahl aus } K$$

ist, so ist offenbar die Länge  $(a, -a)$  bei jeder Anordnung der Geometrie kleiner als die Länge  $(b, -b)$ . Und ist  $b^2 - a^2$  das Entgegengesetzte einer Quadratzahl, so ist  $(b, -b)$  bei jeder Anordnung kleiner als  $(a, -a)$ . Ist dagegen  $b^2 - a^2 = u$ , wo  $u$  weder eine Quadratzahl in  $K$  noch das Entgegengesetzte einer Quadratzahl ist, so ist  $u$  also weder eine totalpositive noch eine totalnegative Zahl aus  $K$ , und es gibt wenigstens eine Anordnung  $\alpha_1$  von  $K$ , bei der  $u$  positiv, und wenigstens eine Anordnung  $\alpha_2$  von  $K$ , bei der  $u$  negativ ist. Die Länge  $(a, -a)$  ist bei der durch  $\alpha_1$  induzierten Anordnung der Längen kleiner und bei der durch die Anordnung  $\alpha_2$  induzierten Anordnung größer als die Länge  $(b, -b)$ . Hieraus folgt, daß die durch die Bedingung (1) charakterisierten Kleiner-Beziehungen zwischen Längen gerade diejenigen sind, die bei jeder Anordnung der Geometrie gelten. Betrachtet man nur diese invarianten Beziehungen, so bilden die Längen eine „*teilweise geordnete Menge*“<sup>18)</sup>; denn die durch (1) definierte invariante Kleiner-Relation ist asymmetrisch und transitiv; sie ist aber nicht zusammen-

<sup>17)</sup> Hilbert, a. a. O., § 12.

<sup>18)</sup> F. Hausdorff, Mengenlehre, 1. Aufl., Leipzig 1914, S. 139.

hängend, d. h. es trifft nicht zu, daß von zwei verschiedenen Längen immer eine invariant kleiner ist als die andere.

Geometrisch gesprochen besagt die Bedingung (1), daß eine Länge  $l_1$  dann und nur dann invariant kleiner ist als eine Länge  $l_2$ , wenn es ein rechtwinkliges Dreieck gibt, von dem eine Kathete die Länge  $l_1$  und die Hypotenuse die Länge  $l_2$  besitzt.

Durch eine Kleiner-Relation für die Längen wird stets eine Zwischen-Relation für die Punkte der Ebene gegeben; man definiere nämlich:  $C$  liegt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf der Geraden  $(AB)$  liegt und wenn, falls  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$  ist, die Länge von  $MC$  kleiner ist als die Länge von  $MA$ . So wird also auch durch die invariante teilweise Anordnung der Längen für jedes Punktepaar  $A, B$  von gewissen Punkten  $C$  gesagt, daß sie zwischen  $A$  und  $B$  liegen. Diese Zwischenbeziehungen gelten wiederum bei jeder Anordnung der Geometrie, und sie liefern alle Punkte, die invariant zwischen  $A$  und  $B$  liegen. Läßt man daher  $A$  und  $B$  alle Punktepaare durchlaufen, so erhält man alle invarianten Zwischen-Beziehungen.

Die geometrische Eigenschaft, mit der wir die invarianten Kleiner-Beziehungen der Längen und die invarianten Zwischen-Lagen charakterisiert haben, ist mit einer Reihe von anderen anschaulichen Eigenschaften äquivalent. Solche gleichwertigen Definitionen des invarianten Zwischen-Liegens sind die folgenden: Ein Punkt  $C$  der Geraden  $(AB)$  liegt zwischen  $A$  und  $B$ , 1) wenn jede Gerade durch  $C$  den Kreis um  $M$  mit dem Radius  $MA$  schneidet, 2) wenn die auf  $(AB)$  in  $C$  errichtete Senkrechte den Kreis um  $M$  mit dem Radius  $MA$  schneidet, 3) wenn sich, falls  $M_1$  der Mittelpunkt von  $AC$  und  $M_2$  der Mittelpunkt von  $CB$  ist, von  $A$  aus zwei Tangenten an den Kreis um  $M_2$  mit dem Radius  $M_2B$  und von  $B$  aus zwei Tangenten an den Kreis um  $M_1$  mit dem Radius  $M_1A$  ziehen lassen<sup>19)</sup>.

Das Axiom III 12 fügt den Axiomen der euklidischen Geometrie 2. Stufe die Aussage hinzu, daß die durch die Bedingung (1) erklärte Kleiner-Relation für Längen zusammenhängend ist, und daher bilden die Längen in der euklidischen Geometrie 3. Stufe bezüglich dieser invarianten Relation eine geordnete Menge. Aus dieser erhält man die eindeutig bestimmte Zwischen-Relation, die in einer solchen Geometrie existiert. Diese läßt sich also geometrisch aus den Grundbegriffen unseres Axiomensystems z. B. so definieren, daß ein Punkt  $C$  der Geraden  $(AB)$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt, wenn  $C = M$  ist oder wenn es ein rechtwinkliges Dreieck gibt, von dem eine Kathete zu  $MC$  und von dem die Hypotenuse zu  $MA$  kongruent ist.

Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie 2. Stufe kann, wie Satz 3 zeigt, als eine von Anordnungsbegriffen und -axiomen befreite Fassung

<sup>19)</sup> Siehe auch unten 3. 2; zu der unvollständigen Zwischenrelation vgl. O. Bottema, *De elementaire Meetkunde van het platte vlak*, Groningen 1938, Hoofdstuk IX.

des Hilbertschen Axiomensystems der ebenen euklidischen Geometrie<sup>20)</sup>, das aus den Hilbertschen Axiomen I 1–3, II, III, IV besteht, aufgefaßt werden. Es ergibt sich also, daß eine euklidische Geometrie, die mit der Hilbertschen in den von Anordnungsbegriffen freien Sätzen übereinstimmt, notwendig anordenbar ist und daß gewisse Zwischenbeziehungen bei jeder der verschiedenen Anordnungen, die möglich sein können, statthaben. Man kann die 2. Stufe als die Hilbertsche und die 3. Stufe als die eigentlich Euklidische Stufe der euklidischen Geometrie bezeichnen. Die Geometrien der Euklidischen Stufe, in denen auch die volle Lehre vom Kreis gilt, sind also eindeutig anordenbar.

### § 3.

#### Eigentlichkeitsbereiche.

3. 1. **Kriterium für Eigentlichkeitsbereiche.** Da im Falle der euklidischen Geometrie alle Punkte der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie eigentlich sind, die nicht auf der unendlich fernen Geraden liegen, bildete die Abgrenzung eines Eigentlichkeitsbereiches in einer singulären ebenen Cayleyschen Geometrie kein Problem. Jetzt wenden wir uns der Aufgabe zu, in einer ordinären ebenen Cayleyschen Geometrie einen Eigentlichkeitsbereich abzugrenzen, in dem eine ordinär absolute Geometrie gilt, die zudem das Axiom IV erfüllt. Wir wollen nun im folgenden als einen *Eigentlichkeitsbereich* — indem wir dieses Wort in einem der allgemeinen Definition aus 1. 1 gegenüber spezialisierten Sinne verwenden — eine Menge  $\mathfrak{E}$  von Punkten einer ordinären ebenen Cayleyschen Geometrie bezeichnen, wenn die Punkte aus  $\mathfrak{E}$  und die mit wenigstens einem Punkte aus  $\mathfrak{E}$  inzidierenden Geraden die Axiome einer ordinär absoluten Geometrie 1. Stufe erfüllen, wenn die Orthogonalität und die Streckenkongruenz im Sinne der in der ebenen Cayleyschen Geometrie geltenden Metrik verstanden werden. Diese Eigentlichkeitsbereiche, die von der früheren Definition aus 1. 1 her als die maximalen Eigentlichkeitsbereiche der ordinären ebenen Cayleyschen Geometrien gekennzeichnet werden können, lassen sich nun durch folgendes Kriterium charakterisieren:

**Satz 7.** *Dafür, daß eine Menge  $\mathfrak{E}$  von Punkten einer ordinären ebenen Cayleyschen Geometrie ein Eigentlichkeitsbereich ist, ist notwendig und hinreichend, daß in  $\mathfrak{E}$  enthalten ist 1) kein Punkt, der zu sich selbst polar ist, 2) von jedem Polardreieck genau ein Eckpunkt, 3) mit einem Punkt alle in ihn beweglichen, 4) mit drei Punkten  $C_1, C_2, C_3$  einer Geraden der Punkt  $C_4$ , der die Eigenschaft hat, daß das Produkt der drei Spiegelungen an  $C_1, C_2, C_3$  gleich der Spiegelung an  $C_4$  ist.*

<sup>20)</sup> Vgl. Anm. 2).

**Beweis.** Notwendig. Daß die erste Bedingung notwendig ist, haben wir in 1. 1, 2) gesehen. Ferner kann nach 1. 1, 2) von einem Polardreieck höchstens ein Eckpunkt eigentlich sein. Da das Axiom IV gilt, muß aber auch von jedem Polardreieck mindestens ein Eckpunkt eigentlich sein. Sind nämlich zwei Eckpunkte eines Polardreiecks uneigentlich, so sind, wie wir in 1. 2 gesehen haben, ihre Polaren, also die durch den dritten Eckpunkt gehenden Seiten des Polardreiecks, eigentliche Geraden; der dritte Eckpunkt ist also nach Axiom II 3 als Schnittpunkt zweier eigentlichen orthogonalen Geraden eigentlich. Ist schließlich der Punkt  $A$  ein eigentlicher Punkt und der Punkt  $A'$  in  $A$  beweglich, so ist nach 1. 1, 2) der Pol  $P$  der Geraden  $(AA')$  uneigentlich.  $A$  und  $A'$  haben nach B. G., Satz 4 zwei Mittelpunkte  $M$  und  $M'$ , die mit  $P$  ein Polardreieck bilden und von denen also genau einer eigentlich sein muß. Nach dem Axiom III 3 ist daher  $A'$  eigentlich. Schließlich folgt aus dem Axiom III 10, daß die vierte Bedingung gelten muß<sup>21)</sup>.

Hinreichend. Durch Überlegungen der gleichen Art erkennt man, daß die in dem Kriterium genannten Eigenschaften hinreichen, um die Eigentlichkeit der Elemente zu sichern, deren Existenz in den Existenzaxiomen des Axiomensystems der ordinär absoluten Geometrie 1. Stufe gefordert wird. Die Gültigkeit des Axioms III 10 folgt wiederum aus der vierten Bedingung. Daß auch die übrigen Axiome des Axiomensystems in einem Eigentlichkeitsbereich, der dem Kriterium genügt, erfüllt sind, folgt aus Tatsachen, die in einer ebenen Cayleyschen Geometrie für beliebige Punkte und Geraden gelten. unter denen keine zueinander polaren Elemente vorkommen.

Eine ordinäre ebene Cayleysche Geometrie über dem Körper  $K$  mit der quadratischen Form  $Q(x, x)$  bezeichnen wir durch  $CG(K, Q)$ . In jedem Punkte einer  $CG(K, Q)$  nimmt die Form  $Q(x, x)$  einen Wert an, der nur bis auf eine beliebige Quadratzahl aus  $K$  bestimmt ist, und, wie wir aus B. G., Satz 4 wissen, nimmt die Form  $Q(x, x)$  in zwei Punkten dann und nur dann denselben Wert an, wenn die beiden Punkte ineinander beweglich sind. Da nach der dritten Bedingung aus Satz 7 in einer  $CG(K, Q)$ , in der ein Eigentlichkeitsbereich gegeben ist, mit einem Punkt die Gesamtheit der in ihn beweglichen eigentlich bzw. uneigentlich ist, so können wir von *eigent-*

<sup>21)</sup> Das Axiom III 10 ist im Rahmen der übrigen Axiome äquivalent mit der Aussage: Das Produkt der Spiegelungen an drei Geraden  $c_1, c_2, c_3$ , die auf einer Geraden  $g$  senkrecht stehen, ist identisch mit der Spiegelung an einer Geraden  $c_4$ , die auf  $g$  senkrecht steht. Denn in A. G., Satz 20 ist gezeigt, daß diese Aussage aus III 10 folgt, und es ist leicht zu sehen, daß auch die Umkehrung gilt. Die angeführte Aussage ist wiederum äquivalent mit der folgenden: Das Produkt der Spiegelungen an drei Punkten  $C_1, C_2, C_3$ , die auf einer Geraden  $g$  liegen, ist identisch mit der Spiegelung<sup>22)</sup> an einem Punkt  $C_4$  der Geraden  $g$ . Denn die Spiegelungsgleichung  $c_1 c_2 c_3 = c_4$  hat  $c_1 g \cdot g c_2 \cdot c_3 g = c_4 g$  und daher die Spiegelungsgleichung  $C_1 C_2 C_3 = C_4$  zur Folge, und umgekehrt.

lichen und uneigentlichen Formwerten sprechen. Die Abgrenzung eines Eigentlichkeitsbereiches in einer  $CG(K, Q)$  muß daher darauf hinauslaufen, unter den durch die Form  $Q(x, x)$  darstellbaren Werten eine Teilmenge von eigentlichen Formwerten auszuzeichnen. Wir behaupten:

**Satz 8.** *Die Bestimmung eines Eigentlichkeitsbereiches in einer  $CG(K, Q)$  ist mit der Aufgabe gleichwertig, unter den durch die Form  $Q(x, x)$  darstellbaren von Null verschiedenen Werten eine Teilmenge von eigentlichen Formwerten auszusondern, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

**E 1.** *Von den Koeffizienten jeder der zu  $Q(x, x)$  äquivalenten Diagonalformen ist genau einer eigentllich.*

**E 2.** *Das Produkt von drei eigentlichen Formwerten  $c_1, c_2, c_3$  ist wiederum ein eigentlicher Formwert, falls es eine binäre Form*

$$(1) \quad b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2$$

*gibt, die die Werte  $c_1, c_2, c_3$  darstellt und die die Eigenschaft hat, daß die zugehörige ternäre Form*

$$(2) \quad b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_1 b_2 y_3^2$$

*zu  $Q(x, x)$  äquivalent ist.*

Zum Beweis haben wir zu zeigen, daß die Bedingung 2) aus Satz 7 mit E 1. und daß die Bedingung 4) aus Satz 7 mit E 2 äquivalent ist. Das erste beruht darauf, daß die Gesamtheit der Wertetripel, die die Form  $Q(x, x)$  in den Eckpunkten von Polardreiecken annimmt, nichts anderes ist als die Gesamtheit der Koeffiziententripel der zu  $Q(x, x)$  äquivalenten Diagonalformen. Sind nämlich

$$(3) \quad (b_{11}, b_{21}, b_{31}), (b_{12}, b_{22}, b_{32}), (b_{13}, b_{23}, b_{33})$$

die Eckpunkte eines Polardreiecks und sind  $b_1, b_2, b_3$  die Werte, die die Form  $Q(x, x)$  in diesen Punkten annimmt, so transformiert die Matrix  $((b_{ik}))$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) die Form  $Q(x, x)$  in die Form

$$(4) \quad b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 \quad \text{mit } b_1 b_2 b_3 = c^2 \text{ in } K.$$

Und ist umgekehrt  $((b_{ik}))$  eine nicht singuläre Matrix, die die Form  $Q(x, x)$  in eine Diagonalform (4) überführt, so bilden die Punkte (3) ein Polardreieck der Form  $Q(x, x)$ , in dessen Eckpunkten  $Q(x, x)$  die Werte  $b_1, b_2, b_3$  annimmt.

Um die Äquivalenz der Bedingung 4) aus Satz 7 mit E 2 zu beweisen, machen wir zunächst zwei Vorbemerkungen:

a) Die Werte, die die Form  $Q(x, x)$  auf den Geraden der  $CG(K, Q)$ , die nicht Tangenten an den Kegelschnitt  $Q(x, x) = 0$  sind, annimmt, sind diejenigen, die durch die binären Formen (1) dargestellt werden, die die Eigenschaft haben, daß die zugehörige ternäre Form (2) zu  $Q(x, x)$  äquivalent ist.

b) Gilt für vier Punkte  $C_1, C_2, C_3, C_4$  die Spiegelungsgleichung

$$(5) \quad C_1 C_2 C_3 = C_4,$$

so gilt für die in diesen Punkten angenommenen Formwerte  $c_1, c_2, c_3, c_4$  die Gleichung

$$(6) \quad c_1 c_2 c_3 = c_4.$$

Sind nämlich  $(c_{11}, c_{12}, c_{13})$  die Koordinaten des Punktes  $C_l$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ), so ergibt sich für die Quaternionen aus dem der  $CG(K, Q)$  zugeordneten Quaternionensystem  $(-a_1, -a_2)$  über  $K$  die Gleichung<sup>22)</sup>

$$(c_{11} i_1 + c_{12} i_2 + c_{13} i_1 i_2)(c_{21} i_1 + c_{22} i_2 + c_{23} i_1 i_2)(c_{31} i_1 + c_{32} i_2 + c_{33} i_1 i_2) \\ = (c_{41} i_1 + c_{42} i_2 + c_{43} i_1 i_2),$$

und hieraus folgt auf Grund der Normenregel die Gleichung (6), da die Norm eines Quaternionen  $d_1 i_1 + d_2 i_2 + d_3 i_1 i_2$  gleich dem Wert ist, den die Form  $Q(x, x)$  in dem Punkt  $(d_1, d_2, d_3)$  annimmt.

Nun zeigen wir, daß E 2 aus der Bedingung 4) aus Satz 7 folgt. Es seien  $c_1, c_2, c_3$  drei eigentliche Formwerte und es sei (1) eine binäre Form, die die drei Werte darstellt und die die Eigenschaft hat, daß die zugehörige ternäre Form (2) zu  $Q(x, x)$  äquivalent ist. Dann gibt es nach a) eine Gerade  $g$  der  $CG(K, Q)$ , auf der  $Q(x, x)$  gerade die durch (1) dargestellten Werte annimmt. Also gibt es auf  $g$  drei eigentliche Punkte  $C_1, C_2, C_3$  mit den Formwerten  $c_1, c_2, c_3$  und nach der Bedingung 4) einen eigentlichen Punkt  $C_4$ , für den die Spiegelungsgleichung (5) gilt. Der Formwert im Punkte  $C_4$  ist nach b) gleich  $c_1 c_2 c_3$ , und daher ist  $c_1 c_2 c_3$  ein eigentlicher Formwert.

Andererseits folgt die Bedingung 4) aus E 2. Ist nämlich E 2 erfüllt und sind  $C_1, C_2, C_3$  eigentliche Punkte einer Geraden  $g$  und sind  $c_1, c_2, c_3$  ihre Formwerte, so gibt es nach a) eine binäre Form (1), die die auf  $g$  angenommenen Formwerte, insbesondere also  $c_1, c_2$  und  $c_3$  darstellt und die die Eigenschaft hat, daß die zugehörige ternäre Form (2) zu  $Q(x, x)$  äquivalent ist. Nach B. G., Satz 7 gibt es auf  $g$  einen Punkt  $C_4$ , für den die Spiegelungsgleichung (5) gilt.  $C_4$  hat nach b) den Formwert  $c_1 c_2 c_3$ , der nach E 2 eigentlich ist. Also ist  $C_4$  ein eigentlicher Punkt.

Die Bedingung E 2 ist jedenfalls dann erfüllt, wenn die folgende einfachere Bedingung erfüllt ist:

E 2\*. Ist ein Formwert das Produkt von eigentlichen Formwerten, so ist er selbst ein eigentlicher Formwert.

E 1 und E 2\* bilden also zusammen ein System von hinreichenden Bedingungen. In 3. 2 werden wir sehen, daß die Bedingung E 2\* in dem Falle, daß die Form  $Q(x, x)$  die Null darstellt, auch notwendig ist; wir werden aber

<sup>22)</sup> Siehe B. G., 5.

auch für Formen, die die Null nicht darstellen, nur solche Eigentlichkeitsbereiche betrachten, für die E 2\* gilt.

Zwei einfache Anwendungen des Kriteriums aus Satz 8 geben die beiden folgenden Sätze:

**Satz 9.** *In einer CG  $(K, Q)$ , deren Form  $Q(x, x)$  in  $K$  die 1 darstellt, gehören die Punkte mit dem Formwert 1 zu jedem Eigentlichkeitsbereich.*

Die gegebene Form  $Q(x, x)$  hat nämlich in einem Polardreieck, in dem ein Eckpunkt  $P$  den Formwert 1 besitzt, die Gestalt

$$(7) \quad x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2,$$

daher muß nach E 1 der Formwert  $a$  uneigentlich und der Formwert 1 eigentlich sein. Die beiden von  $P$  verschiedenen Ecken des Polardreiecks sind ineinander beweglich und daher können auch die beiden durch  $P$  gehenden Seiten des Polardreiecks durch Spiegelung an einer durch  $P$  gehenden Geraden ineinander übergeführt werden. Daß der Formwert in einem Punkte gleich 1 ist, bedeutet also geometrisch, daß in diesem Punkte die rechten Winkel halbierbar sind.

**Satz 10.** *Ist  $Q(x, x)$  eine Form über einem reellen Körper  $K$ , die bei einer Anordnung von  $K$  indefinit ist, so definieren die Formwerte, die bei dieser Anordnung positiv sind, einen Eigentlichkeitsbereich der CG  $(K, Q)$ .*

Ist nämlich  $Q'(x, x)$  eine zu  $Q(x, x)$  äquivalente Diagonalf orm, so müssen von den Koeffizienten von  $Q'(x, x)$  bei der betrachteten Anordnung zwei negativ und einer positiv sein. Denn die einzige Verteilung von positiv und negativ, die durch die Voraussetzung, daß die Diskriminante von  $Q(x, x)$  gleich 1, also positiv ist, zugelassen wird, ist die, daß alle Koeffizienten positiv sind; diese Möglichkeit ist jedoch durch die Voraussetzung ausgeschlossen, daß  $Q(x, x)$  und daher auch  $Q'(x, x)$  bei der betreffenden Anordnung indefinit sind. Also ist E 1 erfüllt; ferner ist trivialerweise E 2\* erfüllt.

### 3.2. Die Eigentlichkeitsbereiche der Form $Q_0$ . Die Form

$$(1) \quad Q_0(x, x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

stellt in jedem Körper  $K$  alle Zahlen aus  $K$  dar; wenn daher  $K$  ein reeller Körper ist, so ist die Form  $Q_0(x, x)$  bei jeder Anordnung von  $K$  indefinit, und daher definiert nach Satz 10 jede Menge von Formwerten, die die bei einer bestimmten Anordnung von  $K$  positiven Werte umfaßt, einen Eigentlichkeitsbereich der CG  $(K, Q_0)$ . Wir werden nun zeigen, daß hiermit bereits alle Eigentlichkeitsbereiche angegeben sind, die es überhaupt in ebenen Cayleyschen Geometrien mit der Form  $Q_0(x, x)$  gibt. Dazu beweisen wir:

Ist in einer CG  $(K, Q_0)$  ein Eigentlichkeitsbereich gegeben, so ist von zwei von Null verschiedenen Werten  $a, -a$  aus  $K$  genau einer eigentlich und mit zwei Werten  $a, b$  sind auch die Werte  $a + b$  und  $ab$  eigentlich.

Aus der Gestalt der Form  $Q_0(x, x)$  erkennt man zunächst unmittelbar, daß der Wert 1 eigentlich und der Wert  $-1$  uneigentlich ist. Da ferner die Form  $Q_0(x, x)$  nach B. G., 1 (Hilfssatz) für eine beliebige von Null verschiedene Zahl  $a$  aus  $K$  zu der Form

$$(2) \quad ax_1^2 - ax_2^2 - x_3^2$$

äquivalent ist, so muß nach E 1, da der Wert  $-1$  uneigentlich ist, von den beiden Werten  $a, -a$  genau einer eigentlich sein. Ist etwa der Wert  $a$  eigentlich, so folgt weiter aus E 1, daß alle Werte, die auf der Polaren eines Punktes mit dem Formwert  $a$  angenommen werden, d. h. alle durch die binäre Form  $-ax_2^2 - x_3^2$  darstellbaren Werte uneigentlich sind; daher müssen die durch die Form  $ax_1^2 + x_3^2$  darstellbaren Werte eigentlich sein. Ferner ergibt sich aus E 2, da die gegebene Form die Form  $Q_0(x, x)$  ist, daß das Produkt von zwei eigentlichen Formwerten stets ein eigentlicher Formwert ist und daß daher die Bedingung E 2\* erfüllt ist. Sind nämlich  $a, b$  zwei eigentliche Formwerte, so ist  $x_1^2 - x_2^2$  eine binäre Form, die die drei Formwerte 1,  $a, b$  darstellt und die die Eigenschaft hat, daß die zugehörige ternäre Form mit  $Q_0(x, x)$  identisch (also erst recht zu  $Q_0(x, x)$  äquivalent) ist; also ist nach E 2 in der Tat der Formwert  $ab$  eigentlich. Aus den beiden Regeln, daß mit einem Wert  $a$  alle Werte  $ax_1^2 + x_3^2$  eigentlich sind und daß mit zwei Werten  $a, b$  der Wert  $ab$  eigentlich ist, ergibt sich auf Grund der Identität

$$a + b = \frac{1}{a}(ab + a^2),$$

daß mit zwei Werten  $a, b$  auch der Wert  $a + b$  eigentlich ist; man beachte nur, daß  $a$  und  $\frac{1}{a}$  denselben Wert repräsentieren.

Damit haben wir gezeigt: wenn in einer  $CG(K, Q_0)$  ein Eigentlichkeitsbereich existiert, so gelten für die Eigenschaft, ein eigentlicher Formwert zu sein, die Gesetze des Positivseins. Daraus folgt, daß die Abgrenzung eines Eigentlichkeitsbereiches nur möglich ist, wenn der Körper  $K$  anordenbar, also reell ist, und daß eine Menge von Formwerten, die einen Eigentlichkeitsbereich definiert, aus der Gesamtheit der bei einer Anordnung von  $K$  positiven Werte besteht. Wir erhalten also folgendes Ergebnis:

**Satz 11.** *In einer  $CG(K, Q_0)$  gibt es nur dann einen Eigentlichkeitsbereich, wenn der Körper  $K$  reell ist. Ist  $K$  reell, so definieren die Mengen von Formwerten, die je die bei einer Anordnung von  $K$  positiven Werte umfassen, die Eigentlichkeitsbereiche der  $CG(K, Q_0)$ .*

In der  $CG(K, Q_0)$  über einem festen Körper  $K$  gibt es also so viele verschiedene Eigentlichkeitsbereiche, als verschiedene Anordnungen von  $K$  existieren. Die Punkte mit total-positiven Formwerten gehören jedem, die Punkte mit total-negativen Formwerten keinem dieser Eigentlichkeits-

bereiche an. Wir können daher diese Punkte entsprechend als *total-eigentliche* bzw. *total-uneigentliche Punkte* bezeichnen. Jeder weder total-eigentliche noch total-uneigentliche Punkt gehört wenigstens einem Eigentlichkeitsbereich an und wenigstens einem nicht an. Einen eindeutig bestimmten Eigentlichkeitsbereich gibt es nur in den eindeutig anordenbaren Körpern, d. h. in den Körpern, in denen jedes von Null verschiedene Element entweder total-positiv oder total-negativ ist. In diesen Körpern besitzt der Kegelschnitt  $Q_0(x, x) = 0$  ein eindeutig bestimmtes Inneres, das den Eigentlichkeitsbereich bildet.

Zu den total-eigentlichen Formwerten gehört insbesondere der Formwert 1, zu den total-uneigentlichen der Formwert  $-1$ . Die Punkte mit diesen beiden Formwerten lassen sich durch einfache geometrische Eigenschaften charakterisieren: die Punkte mit dem Formwert  $-1$  sind diejenigen, von denen aus zwei Tangenten an den Kegelschnitt  $Q_0(x, x) = 0$  gezogen werden können, die Punkte mit dem Formwert 1 die Schnittpunkte eines Paares orthogonaler Treffgeraden des Kegelschnittes. Es hat nämlich der Pol einer Treffgeraden den Formwert  $-1$ . Denn die binäre Form, die durch  $Q_0(x, x)$  auf jeder Geraden der Ebene, die nicht Tangente an den Kegelschnitt ist, gegeben wird, muß auf einer Treffgeraden  $y_1^2 - y_2^2$  sein, und daher hat ihr Pol den Formwert  $-1$ . Von einem Punkt aus kann man nun dann und nur dann zwei Tangenten an den Kegelschnitt ziehen, wenn die Polare dieses Punktes Treffgerade ist; also ist der Formwert eines solchen Punktes in der Tat  $-1$ . Und ist ein Schnittpunkt zweier orthogonaler Treffgeraden gegeben, so haben die Pole dieser Treffgeraden beide den Formwert  $-1$ , also der fragliche Schnittpunkt als dritter Eckpunkt in dem durch die Pole bestimmten Polardreieck den Formwert 1, da das Produkt der drei Formwerte gleich 1 sein muß. In den Geometrien über Hilbertschen Körpern kennzeichnen die Formwerte 1 und  $-1$  genau die total-eigentlichen und die total-uneigentlichen Punkte. In diesen Geometrien haben zudem die Schnittpunkte zweier orthogonaler Treffgeraden die Eigenschaft, daß jede Gerade durch sie Treffgerade ist. Denn dafür, daß alle Geraden durch einen Punkt Treffgeraden sind, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß alle Punkte seiner Polaren den Formwert  $-1$  haben. Ist nun ein Schnittpunkt orthogonaler Treffgeraden, also ein Punkt mit dem Formwert 1 gegeben, so ist die binäre Form auf seiner Polaren  $-(y_1^2 + y_2^2)$ ; die Punkte der Polaren haben also gerade dann sämtlich den Formwert  $-1$ , wenn aus jeder Summe von zwei Quadraten die Wurzel gezogen werden kann.

Von besonderem Interesse sind unter den Geometrien mit der Form  $Q_0(x, x)$  die über den reellen quadratisch abgeschlossenen Körpern. In diesen eindeutig anordenbaren Körpern gibt es an von Null verschiedenen Formwerten nur die beiden Werte 1 und  $-1$ . Daher ist in den Geometrien über

diesen Körpern die Einteilung der Punkte der Ebene in Punkte des Kegelschnitts, in Schnittpunkte zweier orthogonaler Treffgeraden und in Punkte, von denen aus zwei Tangenten an den Kegelschnitt gezogen werden können, eine vollständige Disjunktion. Daher können in diesen Geometrien die eigentlichen Punkte als die Schnittpunkte zweier orthogonaler Treffgeraden, als die Punkte, durch die keine Tangenten des Kegelschnitts gehen, oder nach dem oben Gesagten auch als die Punkte mit der Eigenschaft, daß jede Gerade durch sie Treffgerade ist, definiert werden. Die letztgenannte Eigenschaft hat Liebmann<sup>23)</sup> zur Definition des Inneren eines Kegelschnitts verwendet. Die angeführten Definitionen, die Anordnungsbegriffe vermeiden, sind jedoch nur in den Geometrien über den reellen quadratisch abgeschlossenen Körpern, also nur in den Geometrien über speziellen eindeutig anordenbaren Körpern möglich.

3.3. Beispiele von Eigentlichkeitsbereichen für Formen, die die Null nicht darstellen. Nach B. G., 1 (Hilfssatz) gibt es zwar über jedem Körper genau eine Klasse von ternären Formen mit der Diskriminante 1, die die Null darstellen, dagegen läßt sich über die Zahl der Klassen nicht-äquivalenter quadratischer Formen, die die Null nicht darstellen, keine allgemeine Aussage machen. Notwendig und hinreichend dafür, daß es über einem Körper  $K$  überhaupt eine ternäre quadratische Form gibt, die die Null nicht darstellt, ist, daß wenigstens eine binäre quadratische Form in  $K$  die Zahl  $-1$  nicht darstellt.

Durch die Frage nach einem Eigentlichkeitsbereich wird der Kreis der Körper noch weiter eingeschränkt; denn z. B. in den reellen quadratisch abgeschlossenen Körpern gibt es ternäre Formen, die die Null nicht darstellen, aber diese Formen sind (soweit ihre Diskriminante 1 ist) alle zu der Form

$$(1) \quad Q_1(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

äquivalent, zu der es in keinem Körper einen Eigentlichkeitsbereich geben kann.

Nun existiert in reellen Körpern nach Satz 10 zu Formen, die die Null nicht darstellen und die bei wenigstens einer Anordnung des Körpers indefinit sind, ein Eigentlichkeitsbereich. Daß es in reellen Körpern auch zu Formen, die stets definit sind, Eigentlichkeitsbereiche geben kann, läßt sich an Formen über dem Körper der rationalen Zahlen leicht nachweisen. Die verschiedenen

<sup>23)</sup> H. Liebmann, Synthetische Geometrie, Leipzig-Berlin 1934, S. 37. (Aus unseren Überlegungen folgt, daß die Formulierungen des E. P.-Axioms auf S. 23 und S. 37 des Liebmannschen Buches nicht äquivalent sind.) — Zusatz bei der Korrektur: Zur algebraischen Bedeutung der Liebmannschen Axiome und Definitionen vgl. auch die Arbeit von O. Bottema, Zur Axiomatik der projektiven Geometrie, Monatsh. Math. Phys. 47, S. 234—239, 1939, die mir erst jetzt bekannt geworden ist.

Quadratklassen<sup>24)</sup> dieses Körpers lassen sich normiert durch 1, -1 und die Produkte verschiedener Primzahlen mit positivem oder negativem Vorzeichen repräsentieren. Wir denken uns die Formen im rationalen Zahlkörper so normiert, daß auch die Koeffizienten ganz und quadratfrei sind. Es gilt nun

**Satz 12.** *Über dem Körper der rationalen Zahlen definieren die Formwerte, die die Primzahl  $p$  nicht als Faktor enthalten, einen Eigentlichkeitsbereich der ebenen Cayleyschen Geometrie mit der Form*

$$(2) \quad Q_p(x, x) = x_1^2 + px_2^2 + px_3^2,$$

falls  $p \equiv 3 \pmod{4}$  ist.

Die Eigenschaft, ein nicht durch  $p$  teilbarer Formwert zu sein, erfüllt offenbar die Bedingung E 2\* aus 3. 1. Wir haben daher zum Beweis nur zu zeigen, daß von den Koeffizienten jeder der zu  $Q_p(x, x)$  äquivalenten normierten Diagonalformen genau einer nicht durch  $p$  teilbar ist, daß also stets genau zwei durch  $p$  teilbar sind. Durch die Forderung, daß die Diskriminante 1 ist, wird ausgeschlossen, daß nur einer oder alle drei Koeffizienten durch  $p$  teilbar sind. Es bliebe also nur die Möglichkeit, daß alle drei Koeffizienten nicht durch  $p$  teilbar wären, daß also  $Q_p(x, x)$  zu einer Form der Gestalt

$$(3) \quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_1a_2x_3^2$$

äquivalent wäre, in der  $a_1$  und  $a_2$  ganze quadratfreie Zahlen wären, in denen  $p$  nicht aufginge. Daß dies nicht der Fall ist, läßt sich etwa mit Hilfe der Minkowskischen Einheiten<sup>25)</sup> leicht zeigen. Die Einheit  $C_p$  ist nämlich für eine solche Form gleich 1, da allgemein  $C_p(Q) = 1$  ist, falls  $p$  im Produkt der Koeffizienten von  $Q(x, x)$  nicht aufgeht; dagegen ist  $C_p$  für die Form  $Q_p(x, x)$  gleich dem Legendreschen Symbol  $\left(\frac{-1}{p}\right)$ , also gleich -1.

Offenbar ist in Satz 12 die Voraussetzung, daß  $p \equiv 3 \pmod{4}$  ist, notwendig, denn für  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ist die Form  $Q_p(x, x)$  zu  $Q_1(x, x)$  äquivalent.

In Verallgemeinerung von Satz 12 lassen sich leicht weitere Aussagen über Eigentlichkeitsbereiche über dem Körper der rationalen Zahlen machen; so gilt: Über dem Körper der rationalen Zahlen sei eine Form der Gestalt (3) gegeben, wo  $a_1$  und  $a_2$  ganze quadratfreie Zahlen seien, und es sei  $p$  eine ungerade Primzahl, die Teiler von  $a_2$ , aber nicht von  $a_1$  ist; dann definieren die

<sup>24)</sup> In einem Körper  $K$  soll unter einer *Quadratkasse* eine Menge verstanden werden, die alle von Null verschiedenen Elemente aus  $K$  umfaßt, die sich nur um einen Faktor unterscheiden, der in  $K$  Quadratzahl ist.

<sup>25)</sup> H. Minkowski, Über die Bedingungen, unter denen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. Ges. Abh., Bd. I, S. 219, Leipzig 1911. Vgl. K. Reidemeister, Knotentheorie, Erg. d. Math. f. 1, S. 29, Berlin 1932.

nicht durch  $p$  teilbaren Formwerte einen Eigentlichkeitsbereich der ebenen Cayleyschen Geometrie mit dieser Form, falls  $\left(\frac{-a_1}{p}\right) = -1$  ist.

Die Überlegungen lassen sich aber auch auf  $p$ -adische und damit auf nicht reelle Körper übertragen: Über den  $p$ -adischen Körpern  $K_p$  ( $p$  eine ungerade Primzahl) gibt es zu jeder Form  $Q(x, x)$ , die die Null nicht darstellt, einen Eigentlichkeitsbereich der  $CG(K_p, Q)$ . Wir benutzen zum Beweis die folgenden Tatsachen über  $p$ -adische Körper und ternäre quadratische Formen in ihnen:

1. Es gibt in  $K_p$  genau vier verschiedene Quadratklassen, die durch die vier Zahlen

$$(4) \quad 1, w, p, pw$$

repräsentiert werden, wo  $w$  eine primitive  $(p-1)$ -te Einheitswurzel ist<sup>26)</sup>.

2. Zwei ternäre quadratische Formen in  $K_p$

$Q(x, x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$  und  $Q'(x, x) = a'_1 x_1^2 + a'_2 x_2^2 + a'_3 x_3^2$  sind dann und nur dann in  $K_p$  äquivalent, wenn die Hilbertschen Symbole

$$c_p(Q) = \left(\frac{-a_1, -a_2}{p}\right) \quad \text{und} \quad c_p(Q') = \left(\frac{-a'_1, -a'_2}{p}\right)$$

denselben Wert haben.  $c_p(Q) = 1$  bedeutet, daß  $Q(x, x)$  in  $K_p$  die Null darstellt<sup>27)</sup>.

3. Der Wert des Hilbertschen Symbols ist

$$\left(\frac{a, b}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} a_1 a_2 + a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1},$$

wenn  $a = p^{a_1} w^{\beta_1} a_0^2$  und  $b = p^{a_2} w^{\beta_2} b_0^2$  mit  $a_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) gleich Null oder Eins angibt, welcher von den vier Quadratklassen  $a$  und  $b$  angehören<sup>28)</sup>.

Wir fragen nun, welche ternären Diagonalformen der Diskriminante 1 in einem  $p$ -adischen Körper die Null nicht darstellen. Offenbar sind nach 2. in einem  $K_p$  alle Formen mit dieser Eigenschaft zueinander äquivalent. Wir denken uns — analog wie im Falle des rationalen Zahlkörpers — die quadratischen Formen in  $K_p$  so normiert, daß nur die vier Zahlen (4) als Koeffizienten auftreten. Von diesen normierten Formen gibt es nur die mit den folgenden fünf Koeffiziententripeln:

$$(5) \quad (1, 1, 1) \quad (1, w, w) \quad (1, p, p) \quad (1, pw, pw) \quad (w, p, pw).$$

<sup>26)</sup> K. Hensel, Zahlentheorie, Berlin-Leipzig 1913, S. 298.

<sup>27)</sup> H. Haasc, Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen, Journ. reine angew. Math. 152 (1923), S. 129. Satz 4: und: Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, ebenda S. 205, Satz 2.

<sup>28)</sup> Hensel, a. a. O., S. 328.

Im Falle  $p \equiv 1 \pmod{4}$  stellt von diesen Formen, wie man durch Berechnung des Hilbertschen Symbols bestätigt, nur die fünfte

$$(6) \quad Q_{w,p}(x, x) = wx_1^2 + px_2^2 + pw x_3^2$$

die Null nicht dar. In diesem Falle ist  $w$  eine  $4m$ -te Einheitswurzel und daher nebenbei  $-1$  in  $K_p$  Quadrat. Im Falle  $p \equiv 3 \pmod{4}$  ist  $-1$  eine ungerade Potenz der in  $K_p$  enthaltenen Einheitswurzel, und wir können daher die durch  $w$  und  $pw$  dargestellten Quadratklassen aus  $K_p$  auch durch  $-1$  und  $-p$  repräsentieren. Mit Hilfe des Hilbertschen Symbols stellt man nun fest, daß von den Formen (5) die dritte, d. h.  $Q_p(x, x)$ , und die vierte

$$(7) \quad Q_{-p}(x, x) = x_1^2 - px_2^2 - px_3^2$$

die beiden einzigen sind, die die Null nicht darstellen. Da in diesem Falle die erste von den Formen (5), d. h.  $Q_1(x, x)$ , die Null darstellt, so ist  $-1$  in  $K_p$  Summe von zwei Quadraten; die  $p$ -adischen Körper sind also in der Tat nicht reell.

Es gibt, wie wir sehen, in jedem  $K_p$  eine Klasse ternärer quadratischer Formen, die die Null nicht darstellen, und daher genau eine ebene Cayleysche Geometrie, deren definierende Form die Null nicht darstellt. Im Falle  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ist  $Q_{w,p}(x, x)$  die definierende Form, die nur zu sich selbst äquivalent ist. In jeder zu  $Q_{w,p}(x, x)$  äquivalenten Diagonalform ist also ein Koeffizient gleich  $w$ , ein zweiter gleich  $p$  und der dritte gleich  $pw$ , und daher bilden, da ferner die Bedingung E 2\* aus 3. 1 erfüllt ist, sowohl die Punkte mit dem Formwert  $w$  als die Punkte mit dem Formwert  $p$  als auch die Punkte mit dem Formwert  $pw$  je einen Eigentlichkeitsbereich der ebenen Cayleyschen Geometrie  $CG(K_p, Q_{w,p})$ . Es gibt also in dieser Geometrie genau drei punktfremde Eigentlichkeitsbereiche. Ist  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , so kann  $Q_p(x, x)$  als definierende Form gewählt werden. Sie ist nur zu sich und zu  $Q_{-p}(x, x)$  äquivalent, und es ist also genau ein Koeffizient jeder der zu  $Q_p(x, x)$  äquivalenten Diagonalformen gleich 1. Die Punkte mit dem Formwert 1 bilden also, da zudem die Bedingung E 2\* erfüllt ist, einen Eigentlichkeitsbereich der ebenen Cayleyschen Geometrie  $CG(K_p, Q_p)$ . Dieser Eigentlichkeitsbereich ist der einzige, da ja aus der Gestalt von  $Q_p(x, x)$  und  $Q_{-p}(x, x)$  unmittelbar folgt, daß die beiden anderen Werte  $p$  und  $-p$ , die die definierenden Formen annehmen, uneigentlich sind (vgl. auch Satz 9). Wir haben damit bewiesen

**Satz 13.** *Über jedem  $p$ -adischen Körper ( $p$  eine ungerade Primzahl) gibt es genau eine ebene Cayleysche Geometrie mit einer Form, die die Null nicht darstellt. In dieser Geometrie gibt es im Falle  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , in dem (6) die definierende Form ist, drei punktfremde Eigentlichkeitsbereiche und im Falle  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , in dem (2) als die definierende Form gewählt werden kann, einen eindeutig bestimmten Eigentlichkeitsbereich.*

## § 4.

## Stufen der ordinär absoluten Geometrie.

4.1. **Ordinär absolute Geometrie 1. Stufe.** Aus der Definition des Eigentlichkeitsbereiches in 3.1 folgt unmittelbar

**Satz 14.** *Das algebraische Äquivalent einer ordinär absoluten Geometrie 1. Stufe ist die Geometrie in einem Eigentlichkeitsbereich einer  $CG(K, Q)$ .*

Für die hyperbolische Geometrie können wir auf Grund von Satz 11 genauer sagen:

**Satz 14a.** *Das algebraische Äquivalent einer hyperbolischen Geometrie 1. Stufe ist die Geometrie in einem Bereich solcher Punkte einer  $CG(K, Q_0)$  über einem reellen Körper  $K$ , deren Formwerte bei einer Anordnung von  $K$  sämtlich positiv sind.*

Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß es keine endliche hyperbolische Geometrie gibt; da jede ternäre Form über einem endlichen Körper die Null darstellt<sup>29)</sup>, gilt allgemeiner: es gibt (unter Voraussetzung des Axioms IV) keine ordinär absolute Geometrie aus endlich vielen Punkten und Geraden.

Wie steht es nun mit der Anordenbarkeit der ordinär absoluten Geometrien 1. Stufe? Wir werden eine ordinär absolute Geometrie wiederum *geordnet* nennen, wenn in ihr ein Begriff „Zwischen“ erklärt ist, für den die Hilbertschen Ordnungsaxiome gelten. Wir definieren nun noch: eine ebene Cayleysche Geometrie  $CG(K, Q)$  heißt *geordnet*, wenn in ihr eine Relation „Trennen“ für je zwei Punktpaare erklärt ist und wenn für diese Relation die in der projektiven Geometrie geforderten Ordnungsaxiome<sup>30)</sup> gültig sind. Es ist klar, daß jede Anordnung des Körpers  $K$  eine solche Anordnung der  $CG(K, Q)$  induziert und daß umgekehrt jede Anordnung der  $CG(K, Q)$  eine Anordnung des Körpers zur Folge hat. In einer geordneten ebenen Cayleyschen Geometrie bezeichnen wir eine Punktmenge  $\mathfrak{M}$  als *konvex*, wenn ein Paar  $A, B$  von Punkten aus  $\mathfrak{M}$  niemals durch ein Paar  $U, V$  von Punkten, die nicht zu  $\mathfrak{M}$  gehören, getrennt wird. Wir wollen nun zeigen

**Satz 15.** *Eine ordinär absolute Geometrie ist dann und nur dann anordenbar, wenn die zugehörige ebene Cayleysche Geometrie sich so anordnen läßt, daß der Eigentlichkeitsbereich, in dem die Geometrie erklärt ist, bei dieser Anordnung konvex ist.*

**Beweis.** Es sei zunächst in einer ebenen Cayleyschen Geometrie ein Eigentlichkeitsbereich  $\mathfrak{E}$  gegeben, in dem die Zwischenaxiome gelten. Wählt man die Polare eines eigentlichen Punktes als unendlich ferne Gerade, so

<sup>29)</sup> Das einer ternären Form nach B. G., Satz 2 zugeordnete Quaternionensystem zerfällt, da es keine endlichen Schiefkörper gibt.

<sup>30)</sup> O. Veblen and J. W. Young, *Projective Geometry*, Boston 1918, Vol. II, Ch. 2.

läßt sich der in  $\mathfrak{E}$  gegebene Zwischenbegriff derart erweitern, daß die Zwischenaxiome in der so erklärten affinen Ebene gültig sind. Für die ebene Cayleysche Geometrie kann man dann in bekannter Weise eine Relation „Trennen“ definieren, für die die projektiven Anordnungsaxiome gelten. Die ebene Cayleysche Geometrie ist also geordnet. Daß  $\mathfrak{E}$  bei dieser Anordnung konvex ist, folgt daraus, daß in  $\mathfrak{E}$  das Axiom von Pasch (das Hilbertsche Axiom II 4) gilt. Sind nämlich  $A$  und  $B$  zwei Punkte aus  $\mathfrak{E}$  und ist  $U$  ein beliebiger Punkt der affinen Ebene, der zwischen  $A$  und  $B$  liegt, so muß  $U$  zu  $\mathfrak{E}$  gehören. Denn sind  $C$  und  $D$  zwei Punkte aus  $\mathfrak{E}$ , die nicht der Geraden  $(AB)$  angehören, und liegt  $D$  zwischen  $B$  und  $C$ , so gehört  $U$  als Schnittpunkt der Geraden  $g = (DU)$  mit der Geraden  $(AB)$  auf Grund des Axioms von Pasch zu  $\mathfrak{E}$ , da der Schnittpunkt der Geraden  $g$  mit der Geraden  $(AC)$ , wie aus der Gültigkeit des Axioms von Pasch in der affinen Ebene hervorgeht, nicht zwischen  $A$  und  $C$  liegt. Wird nun das eigentliche Punktepaar  $A, B$  durch ein Punktepaar  $U, V$  getrennt, so liegt einer von den Punkten  $U$  und  $V$  zwischen  $A$  und  $B$  und gehört also zu  $\mathfrak{E}$ . Es gibt also kein Paar von nicht zu  $\mathfrak{E}$  gehörigen Punkten, das das Paar  $A, B$  trennt.

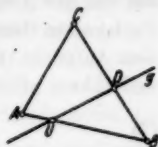


Fig. 2.

Umgekehrt sei nun in einer geordneten ebenen Cayleyschen Geometrie ein konvexer Eigenschaftsbereich  $\mathfrak{E}$  gegeben. Man wähle dann eine feste Gerade  $p$ , die Polare eines eigentlichen Punktes ist, und definiere, daß  $U$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt, wenn  $U$  und der Schnittpunkt  $V$  von  $p$  mit der Geraden  $(AB)$  das Punktepaar  $A, B$  trennen. Für die so definierte Zwischen-Relation gelten in der affinen Ebene mit  $p$  als unendlich ferner Geraden die Zwischenaxiome. Es ist zu zeigen, daß die Zwischenaxiome auch für die Punkte aus  $\mathfrak{E}$  allein gelten. Dies ist klar für die Hilbertschen Axiome II 1 und II 3, die nur formale Eigenschaften der Zwischen-Relation ausdrücken. Die Hilbertschen Axiome II 2 und II 4, die Existenzaussagen enthalten, ergeben sich unter Benutzung der Konvexität von  $\mathfrak{E}$ . Sind zunächst  $A$  und  $B$  zwei Punkte aus  $\mathfrak{E}$ , so gehört der durch Spiegelung von  $A$  an  $B$  entstehende Punkt  $A'$  zu  $\mathfrak{E}$  und es liegt  $B$  zwischen  $A$  und  $A'$ ; denn  $B$  ist Mittelpunkt von  $A$  und  $A'$ , und wenn  $B$  nicht zwischen  $A$  und  $A'$  läge, so würde, da harmonische Punktepaare sich trennen, der zu  $B$  polare Punkt  $B'$ , der nicht zu  $\mathfrak{E}$  gehört, zwischen  $A$  und  $A'$  liegen und  $\mathfrak{E}$  wäre nicht konvex. Also gilt das Hilbertsche Axiom II 2. Um schließlich die Gültigkeit des Hilbertschen Axioms II 4 nachzuweisen, betrachten wir ein Dreieck  $ABC$ , dessen Eckpunkte zu  $\mathfrak{E}$  gehören, und eine Gerade  $g$ , die nicht durch  $A$  geht und die die Gerade  $(BC)$  in einem Punkte  $D$  aus  $\mathfrak{E}$  trifft, der zwischen  $B$  und  $C$  liegt. Da die Zwischenaxiome in der affinen Ebene gelten, schneidet  $g$  entweder die Strecke  $AB$  oder die Strecke  $AC$  in einem inneren Punkt; es sei etwa das erste der Fall und  $U$

der Schnittpunkt, der also zwischen  $A$  und  $B$  liegt. Wegen der Konvexität gehört  $U$  zu  $\mathfrak{E}$ .

Satz 16. In einem reellen Körper  $K$  sei eine Form

$$(1) \quad Q(x, x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2$$

gegeben, die bei einer Anordnung  $\alpha$  von  $K$  indefinit sei. Der Eigentlichkeitsbereich der Punkte, deren Formwerte bei der Anordnung  $\alpha$  positiv sind, ist bei der durch  $\alpha$  induzierten Anordnung der  $CG(K, Q)$  konvex.

Beweis. Es sei  $a_1$  derjenige der drei Koeffizienten der Form  $Q(x, x)$ , der bei der Anordnung  $\alpha$  positiv ist. In der gemäß  $\alpha$  geordneten ebenen Cayleyschen Geometrie betrachten wir die euklidische Pseudogeometrie<sup>21)</sup> mit dem Aufpunkt  $(1, 0, 0)$  und der Geraden  $x_1 = 0$  als unendlich ferner Geraden und führen affine Koordinaten ein:

$$(2) \quad \xi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \xi_2 = \frac{x_3}{x_1}.$$

Die Form  $Q(x, x)$  geht dann über in die Form

$$a_1 - B(\xi, \xi),$$

wo

$$(3) \quad B(\xi, \xi) = -(a_2 \xi_1^2 + a_1 a_2 \xi_2^2)$$

eine binäre positiv-definite Form ist. Ein Punkt  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  gehört dem Eigentlichkeitsbereich an, wenn bei der Anordnung  $\alpha$

$$B(\xi, \xi) < a_1$$

ist. Es seien nun  $\xi$  und  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  zwei eigentliche Punkte, es sei also auch

$$B(\eta, \eta) < a_1$$

und es sei

(4)  $\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta = (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \eta_1, \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \eta_2)$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$  ein Punkt, der zwischen  $\xi$  und  $\eta$  liegt. Wenn man nun benutzt, daß wegen der Definitheit der Form (3) die Ungleichung

$$2 B(\xi, \eta) \leq B(\xi, \xi) + B(\eta, \eta)$$

gilt, so erhält man

$$(5) \quad B(\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta, \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta) \leq \lambda_1 B(\xi, \xi) + \lambda_2 B(\eta, \eta) < a_1.$$

Also ist auch der Zwischenpunkt (4) eigentlich. Hieraus folgt, daß der Eigentlichkeitsbereich bei der betrachteten Anordnung konvex ist.

Wir erhalten nun folgende Resultate über die Anordenbarkeit der ordinär absoluten Geometrien 1. Stufe:

Satz 17. Eine hyperbolische Geometrie 1. Stufe ist stets eindeutig anordenbar.

<sup>21)</sup> Siehe M. F., § 1.

Beweis. Die hyperbolische Geometrie sei als die Geometrie in einem Eigentlichkeitsbereich  $\mathfrak{E}$  der zugehörigen  $CG(K, Q_0)$  gegeben. Aus Satz 14a folgt, daß der Körper  $K$  der Geometrie reell ist und daß es eine Anordnung  $\alpha$  von  $K$  gibt, bei der alle Punkte von  $\mathfrak{E}$  und nur sie positiven Formwert haben. Nach Satz 16 ist  $\mathfrak{E}$  bei der durch  $\alpha$  induzierten Anordnung der  $CG(K, Q_0)$  konvex, und daher gelten nach Satz 15 in  $\mathfrak{E}$  die Zwischenaxiome. Damit ist für die hyperbolische Geometrie eine Anordnung gegeben.

Ist andererseits  $\alpha^*$  eine von  $\alpha$  verschiedene Anordnung des Körpers  $K$ , so ist  $\mathfrak{E}$  bei der durch  $\alpha^*$  induzierten Anordnung der  $CG(K, Q_0)$  nicht konvex. Ist nämlich nach Einführung der homogenen Koordinaten (2)  $(\xi_1, 0)$  ein Punkt aus  $\mathfrak{E}$ , dessen Formwert bei der Anordnung  $\alpha^*$  negativ ist,

$$(6) \quad 1 - \xi_1^2 < 0,$$

so liegt der zu  $(\xi_1, 0)$  polare Punkt  $(\frac{1}{\xi_1}, 0)$  bei der durch  $\alpha^*$  induzierten Anordnung zwischen den Punkten  $(0, 0)$  und  $(\xi_1, 0)$ ; es liegt also ein Punkt, der nicht zu  $\mathfrak{E}$  gehört, zwischen zwei Punkten aus  $\mathfrak{E}$ ;  $\mathfrak{E}$  ist also bei dieser Anordnung nicht konvex. Hieraus folgt, daß  $\mathfrak{E}$  nur auf eine Weise angeordnet werden kann.

Ist schließlich  $\mathfrak{E}'$  ein von  $\mathfrak{E}$  verschiedener Eigentlichkeitsbereich der  $CG(K, Q_0)$ , in dem dieselbe hyperbolische Geometrie gilt, so gibt es einen Automorphismus von  $K$ , der  $\mathfrak{E}$  in  $\mathfrak{E}'$  überführt, und dieser Automorphismus führt auch die Anordnung, bei der  $\mathfrak{E}$  konvex ist, in die Anordnung über, bei der  $\mathfrak{E}'$  konvex ist.

**Satz 18.** *Es gibt sowohl anordenbare als nicht anordenbare elliptisch absolute Geometrien 1. Stufe; und zwar gibt es nicht anordenbare elliptisch absolute Geometrien sowohl über anordenbaren als über nicht anordenbaren Körpern.*

Ist  $Q(x, x)$  eine indefinite Form über einem geordneten Körper  $K$ , die die Null nicht darstellt, so bilden die positiven Formwerte nach Satz 10 einen Eigentlichkeitsbereich, der nach Satz 16 bei der durch die Anordnung des Körpers induzierten Anordnung der  $CG(K, Q)$  konvex ist. Daher ist nach Satz 15 die in diesem Eigentlichkeitsbereich gültige elliptisch absolute Geometrie anordenbar. — Beispiele von nicht anordenbaren elliptisch absoluten Geometrien sind die in den Eigentlichkeitsbereichen der  $CG(K_p, Q)$  über den  $p$ -adischen Körpern  $K_p$  (Satz 13); die Nicht-Anordenbarkeit dieser Geometrien folgt daraus, daß die Körper  $K_p$  nicht reell sind. Es gibt aber auch nicht anordenbare elliptisch absolute Geometrien über anordenbaren Körpern. Dies zeigen die Geometrien in den Eigentlichkeitsbereichen der  $CG(R, Q_p)$  über dem Körper  $R$  der rationalen Zahlen (Satz 12); diese Eigentlichkeitsbereiche sind nämlich (bei der eindeutigen Anordnung, die durch die Anordnung des Körpers  $R$  induziert wird) nicht konvex, da z. B. die eigent-

lichen Punkte  $(1, 0, 0)$  und  $(1, 1, 0)$  mit den Formwerten 1 und  $1 + p$  durch die uneigentlichen Punkte  $(p, 1, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  mit den Formwerten  $p$  ( $p + 1$ ) und  $p$  getrennt werden.

4. 2. Die ordinär absolute Geometrie 2. Stufe. Die ordinär absolute Geometrie 2. Stufe sei durch Hinzunahme des Axioms der Streckenabtragung III 11 zu den Axiomen der ordinär absoluten Geometrie 1. Stufe definiert. Wie wir in 1. 3 gesehen haben, sind dann alle (eigentlichen) Winkel halbirbar.

Wir stellen nun die folgende Frage: Welche ebenen Cayleyschen Geometrien haben die Eigenschaft, daß in ihnen ein Eigentlichkeitsbereich so abgegrenzt werden kann, daß in den eigentlichen Punkten alle Winkel halbirbar sind?

Aus der Tatsache, daß die Winkel in jedem eigentlichen Punkt halbirbar sein sollen, folgt, daß in einer ebenen Cayleyschen Geometrie der verlangten Art alle eigentlichen Geraden ineinander beweglich sind. Daher sind alle uneigentlichen Punkte (mit Ausnahme der Punkte auf dem Kegelschnitt, falls solche existieren) ineinander beweglich und haben daher sämtlich den gleichen Formwert, etwa  $-a$ . Die Form muß daher in jedem Polardreieck von der Gestalt

$$(1) \quad x_1^2 - ax_2^2 - ax_3^2$$

sein, alle eigentlichen Punkte haben also den Formwert 1 (dies folgt auch unmittelbar aus der Bemerkung zu Satz 9). Da alle eigentlichen Punkte gleichen Formwert haben, sind zudem alle eigentlichen Strecken halbirbar; und da sich aus Winkel- und Streckenhalbirbarkeit zusammen in bekannter Weise die Streckenabtragbarkeit ergibt, folgt aus der Winkelhalbirbarkeit das Axiom III 11.

Es ist daher dafür, daß in einer ebenen Cayleyschen Geometrie ein Eigentlichkeitsbereich existiert, in dessen Punkten alle Winkel halbirbar sind oder, was wir jetzt damit als gleichwertig erkannt haben, in dem das Axiom III 11 gilt, notwendig und auch hinreichend, daß die Form der Geometrie außer dem Wert Null, falls sie diesen darstellt, genau die zwei verschiedenen Werte 1 und  $-a$  darstellt und daß in jedem Polardreieck in einem Eckpunkt der Formwert 1 und in den beiden anderen der Formwert  $-a$  angenommen wird. In welchen Körpern kann nun eine Form mit diesen Eigenschaften existieren?

Zunächst muß der Körper ein Hilbertscher Körper sein. Denn die binäre Form auf der Polaren eines eigentlichen Punktes lautet ja  $-a(x_2^2 + x_3^2)$  und, da alle ihre Werte bis auf einen quadratischen Faktor gleich  $-a$  sein müssen, muß sich aus jeder Summe von zwei Quadraten die Wurzel ziehen lassen. Und  $-1$  darf nicht Quadrat sein; denn sonst würde die Form  $x_2^2 + x_3^2$  die Null und also die Zahl  $-a$  darstellen; es ließe sich also aus  $-a$  die Wurzel

ziehen und die Quadratklasse  $-a$  wäre nicht von der Quadratklasse 1 verschieden.

Da der gesuchte Körper ein Hilbertscher ist, lassen sich die Zahlen, die die Form (1) darstellt und die (mit Ausnahme der Null) als Koeffizienten der zu ihr äquivalenten Diagonalformen auftreten, durch die Form  $x^2 - ay^2$  darstellen, und es gibt, da die Zahl  $a$  nicht zur Quadratklasse  $-1$  gehört, eine Anordnung des Körpers, bei der  $a$  positiv ist. Bei dieser Anordnung ist die Form (1) indefinit und von den Koeffizienten der äquivalenten Diagonalformen muß stets der positive zur Quadratklasse 1 und die beiden negativen zur Quadratklasse  $-a$  gehören. Es müssen daher bei dieser Anordnung alle Ausdrücke

$$(2) \quad x^2 - ay^2 \quad \text{mit } x^2 - ay^2 > 0$$

zur Quadratklasse 1 und alle Ausdrücke

$$x^2 - ay^2 \quad \text{mit } x^2 - ay^2 < 0$$

zur Quadratklasse  $-a$  gehören. Die zweite Forderung folgt aus der ersten, denn nach der ersten gehören ja die Ausdrücke

$$y^2 - a\left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad \text{mit } y^2 - a\left(\frac{x}{a}\right)^2 > 0, \quad \text{also mit } x^2 - ay^2 < 0$$

zur Quadratklasse 1. Notwendig und hinreichend dafür, daß in einem Körper eine Form der gesuchten Art existiert, ist also, daß der Körper Hilbertsch ist und daß bei einer Anordnung, bei der  $a$  positiv ist, die Quadratwurzeln aus allen Ausdrücken (2) existieren.

Es gibt zunächst Körper der gekennzeichneten Art, in denen  $a$  eine Quadratzahl ist. Dann und nur dann stellt die Form die Null dar und ist daher äquivalent zu  $Q_0(x, x)$ , und die Existenz der Quadratwurzeln aus den Ausdrücken (2) bedeutet, daß der Körper reell quadratisch abgeschlossen ist. In diesen Körpern gibt es nur die beiden Quadratklassen 1 und  $-1$ , und daß in den ebenen Cayleyschen Geometrien über ihnen die Punkte, in denen  $Q_0(x, x)$  den Formwert 1 annimmt, einen Eigentlichkeitsbereich bilden, haben wir bereits in 3.2 gesehen. Wir erhalten daher

**Satz 19.** *Das algebraische Äquivalent einer hyperbolischen Geometrie 2. Stufe ist die Geometrie in dem Bereich der Punkte mit dem Formwert 1 in der CG  $(K, Q_0)$  über einem reellen quadratisch abgeschlossenen Körper  $K$ .*

Wir wenden uns nun dem Falle zu, daß  $a$  nicht eine Quadratzahl des betrachteten Körpers ist, und fragen also, ob es Hilbertsche Körper gibt, die eine Zahl  $a$  mit der Eigenschaft enthalten, daß weder  $a$  noch  $-a$  Quadratzahl ist und daß bei einer Anordnung, bei der  $a$  positiv ist, die Quadratwurzeln (2) existieren. Die Form (1) stellt dann die Null nicht dar, und unsere Frage ist also, ob es elliptisch absolute Geometrien 2. Stufe gibt. Die Antwort gibt der folgende Satz:

Satz 20. Ist  $K$  ein abzählbarer geordneter Körper und  $a$  ein positives Element aus  $K$ , das in  $K$  nicht als Summe von Quadraten darstellbar ist, so gibt es zu  $K$  einen geordneten Erweiterungskörper, dessen Anordnung eine Fortsetzung der Anordnung von  $K$  ist und in dem die Operationen

$$(3) \quad \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 - ay^2} \text{ für } x^2 - ay^2 > 0$$

stets ausführbar sind, in dem aber  $a$  nicht Quadratzahl ist.

Es sei  $K^*$  der geordnete reell abgeschlossene Erweiterungskörper von  $K$ . Man betrachte nun den Teilkörper von  $K^*$ , der sich aus  $K$  durch endlich häufige Anwendung der rationalen Operationen und der beiden Operationen

$$|\sqrt{1 + \omega^2}|, \quad |\sqrt{1 - a\omega^2}| \text{ mit } 1 - a\omega^2 > 0$$

ergibt, wo  $\omega$  ein bereits auf diese Weise entstandenes Element ist. Dieser Körper läßt sich als Vereinigungsmenge einer abzählbaren Folge von Körpern darstellen, die mit dem Körper  $K$  beginnt und in der jeder spätere Körper  $L'$  aus dem vorangehenden Körper  $L$  durch Adjunktion eines Ausdrucks  $\sqrt{1 + \omega^2}$  oder eines Ausdrucks  $\sqrt{1 - a\omega^2}$  mit  $1 - a\omega^2 > 0$  hervorgeht. Die Anordnung von  $L'$  ist dabei dadurch festgelegt, daß die Anordnung von  $L$  erhalten bleibt und daß das adjungierte Element positiv gerechnet wird. Wir zeigen nun, daß jeder Körper der Folge die Eigenschaft hat, daß  $a$  in ihm nicht als Summe von endlich vielen Quadraten darstellbar ist. Daraus folgt dann offenbar, daß  $a$  auch in der Vereinigungsmenge nicht Summe von Quadraten und also gewiß nicht Quadrat ist.

Nach Voraussetzung ist  $a$  in  $K$  nicht Quadratsumme.

Es sei nun  $L$  irgendein Körper der Folge und  $a$  in  $L$  nicht als Quadratsumme darstellbar.

$L'$  sei aus  $L$  durch eine Erweiterung erster Art entstanden. Angenommen nun,  $a$  wäre in  $L'$  durch eine Summe von Quadraten darstellbar:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i \sqrt{1 + \omega^2})^2 \\ &= \sum x_i^2 + \sum y_i^2 + \sum y_i^2 \omega^2 + 2 \sum x_i y_i \sqrt{1 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Da  $\sqrt{1 + \omega^2}$  nicht in  $L$  liegt, muß  $\sum x_i y_i = 0$  sein. Also wäre  $a$ , entgegen der Induktionsannahme, bereits in  $L$  Summe von Quadraten gewesen.

$L'$  sei nun durch eine Erweiterung zweiter Art entstanden. Wir nehmen wiederum an,  $a$  sei in  $L'$  als eine Summe von Quadraten darstellbar:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i \sqrt{1 - a\omega^2})^2 \\ &= \sum x_i^2 + \sum y_i^2 - a \sum y_i^2 \omega^2 + 2 \sum x_i y_i \sqrt{1 - a\omega^2}. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt wieder  $\sum x_i y_i = 0$ . Daher ergibt sich

$$a = \frac{\sum x_i^2 + \sum y_i^2}{1 + \sum y_i^2 \omega^2};$$

da ein Quotient von Quadratsummen in einem Körper selbst Quadratsumme ist, müßte wiederum  $a$  bereits in  $L$  Summe von Quadraten gewesen sein, im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Die Hilbertschen Körper, in denen es eine Zahl  $a$  mit der Eigenschaft gibt, daß weder  $a$  noch  $-a$  Quadratzahl ist und die Quadratwurzeln aus den mit  $a$  gleichzeitig positiven Ausdrücken  $x^2 - ay^2$  existieren, können auch als die Hilbertschen Körper gekennzeichnet werden, in denen es außer dem Paar  $1, -1$  von Quadratklassen, das in jedem reellen Körper existiert, noch genau ein anderes Paar  $a, -a$  von Quadratklassen gibt, d. h. also als die Hilbertschen Körper, in denen es genau die vier verschiedenen Quadratklassen

$$(4) \quad 1, -1, a, -a$$

gibt. Ist nämlich  $K$  ein Körper der zuerst genannten Art, so gibt es in  $K$  diese vier verschiedenen Quadratklassen; es gibt jedoch auch keine weiteren. Denn offenbar geht  $K$  durch Adjunktion von  $\sqrt{a}$  in einen reellen quadratisch abgeschlossenen Körper über. Von zwei von Null verschiedenen Zahlen  $c, -c$  aus  $K$  ist also in  $K(\sqrt{a})$  genau eine Quadrat; es sei etwa  $c$  diese Zahl und demnach

$$c = (c_1 + c_2 \sqrt{a})^2 = c_1^2 + ac_2^2 + 2c_1c_2\sqrt{a} \quad \text{mit } c_1, c_2 \text{ in } K.$$

Aus dieser Gleichung folgt  $c_1c_2 = 0$  und daher, daß  $c$  in  $K$  entweder zur Quadratklasse  $1$  oder zur Quadratklasse  $a$  gehört. Entsprechend gehört dann  $-c$  entweder zur Quadratklasse  $-1$  oder zur Quadratklasse  $-a$ . Gibt es andererseits in einem Hilbertschen Körper genau die vier verschiedenen Quadratklassen (4) und betrachten wir die Anordnung, bei der  $a$  positiv ist, so muß ein positiver Ausdruck  $x^2 - ay^2$  stets zur Quadratklasse  $1$  gehören; gehörte nämlich ein Ausdruck dieser Art zur Quadratklasse  $a$ , so wäre  $a$  Summe von zwei Quadraten, also Quadratzahl.

Aus den Überlegungen zu Anfang dieses Abschnittes ergibt sich, daß die Form (1) in einem Körper der betrachteten Art nur die beiden Werte  $1$  und  $-a$  darstellt und daß in der zugehörigen ebenen Cayleyschen Geometrie die Punkte mit dem Formwert  $1$  einen Eigentlichkeitsbereich bilden, in dem das Axiom III 11 gilt. Entsprechend überzeugt man sich davon, daß es in demselben Körper auch in der ebenen Cayleyschen Geometrie mit der Form

$$(5) \quad x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2$$

einen Eigentlichkeitsbereich der gesuchten Art gibt; die Formen (1) und (5) sind jedoch bis auf Äquivalenz die einzigen, für die das der Fall ist<sup>33)</sup>.

Wir können unser Ergebnis so zusammenfassen:

**Satz 21.** *Das algebraische Äquivalent einer elliptisch absoluten Geometrie 2. Stufe ist die Geometrie in dem Bereich der Punkte mit dem Formwert 1 in einer ebenen Cayleyschen Geometrie mit der Form*

$$x_1^2 - ax_2^2 - ax_3^2$$

*über einem Hilbertschen Körper, in dem es genau die vier verschiedenen Quadratklassen*

$$1, -1, a, -a$$

*gibt.*

Die Frage nach der Anordenbarkeit der ordinär absoluten Geometrien 2. Stufe ist nun leicht zu beantworten. Im hyperbolischen Fall ist die zugehörige ebene Cayleysche Geometrie eindeutig anordenbar, der Bereich der eigentlichen Punkte ist nach Satz 16 konvex, und die hyperbolische Geometrie 2. Stufe ist also eindeutig anordenbar; dies folgt natürlich auch unmittelbar aus Satz 17. Im elliptisch absoluten Falle besitzt der Körper der Geometrie zwei verschiedene Anordnungen. Ist (1) die definierende Form und  $a$  positiv, so ist der Bereich der eigentlichen Punkte bei der dadurch induzierten Anordnung der ebenen Cayleyschen Geometrie konvex; ist  $a$  negativ, so ist das, wie wir jetzt zeigen wollen, nicht der Fall.

Wir führen wie im Beweis von Satz 16 inhomogene Koordinaten ein und betrachten die eigentliche Gerade  $\xi_2 = 0$ . Zu einem konvexen Eigentlichkeitsbereich müßten genau die Punkte  $(\xi_1, 0)$  aus dem Intervall

$$J: \xi_1^2 < -\frac{1}{a}$$

gehören. Denn wenn ein Punkt aus  $J$  uneigentlich wäre, so wäre der zu ihm polare, nicht in  $J$  liegende Punkt  $(\frac{1}{a\xi_1}, 0)$  eigentlich, daher auch der aus diesem durch Spiegelung am Nullpunkt hervorgehende Punkt  $(-\frac{1}{a\xi_1}, 0)$ , der uneigentliche Punkt  $(\xi_1, 0)$  läge also zwischen zwei eigentlichen Punkten. Und ein außerhalb  $J$  liegender Punkt kann nicht eigentlich sein, da  $J$  von jedem Paar zueinander polarer Punkte genau einen enthält.

Nun kann aber andererseits  $J$  nicht der Bereich der eigentlichen Punkte der betrachteten Geraden sein, da  $J$  nicht gegen Bewegungen abgeschlossen

<sup>33)</sup> Ebenso wie in einem  $p$ -adischen Körper gibt es in einem Körper der betrachteten Art fünf normierte ternäre Formen mit der Diskriminante 1:  $Q_1(x, z)$ ,  $Q_2(x, z)$ , die Form (1), die Form (5) und die Form  $-x^2 + ax^2 - az^2$ . Von den vier ersten sind keine zwei zueinander äquivalent, und die fünfte ist zu  $Q_2(x, z)$  äquivalent.

ist. Wir zeigen hierzu, daß durch Spiegelungen an Punkten der Geraden der Nullpunkt in Punkte bewegt werden kann, die nicht zu  $J$  gehören. Nach B. G., 5 lassen sich den homogen geschriebenen Punkten und den Spiegelungen an ihnen Quaternionen aus dem Quaternionensystem  $(-1, a)$  über dem betrachteten Körper zuordnen. Dem Punkt, der aus  $(1, 0, 0)$  durch die Spiegelung am Punkte  $(1, \xi_1, 0)$  hervorgeht, entspricht das Quaternion

$$(\dot{i}_1 + \xi_1 \dot{i}_2) \dot{i}_1 (-\dot{i}_1 - \xi_1 \dot{i}_2) = (1 + a \xi_1^2) \dot{i}_1 + 2 \xi_1 \dot{i}_2.$$

Inhomogen geschrieben ist also das Bild des Nullpunktes  $(0, 0)$  bei der Spiegelung am Punkt  $(\xi_1, 0)$

$$\left( \frac{2 \xi_1}{1 + a \xi_1^2}, 0 \right)$$

und damit dieser Punkt zu  $J$  gehört, muß also

$$a^2 \xi_1^4 + 6 a \xi_1^2 + 1 > 0$$

sein. Das Polynom auf der linken Seite ist zwar in der Umgebung des Nullpunktes positiv, aber nicht positiv definit. Es hat die Nullstellen

$$\pm \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{-a}}, \pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{-a}}$$

und ist daher für die Punkte  $(\xi_1, 0)$  aus den beiden Intervallen

$$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{-a} < \xi_1^2 < \frac{3 + 2\sqrt{2}}{-a}$$

negativ; die Spiegelungen an diesen Punkten führen den Nullpunkt in Punkte über, die nicht in  $J$  liegen.

Wir erhalten daher

**Satz 22.** *Eine ordinär absolute Geometrie 2. Stufe ist stets eindeutig anordenbar.*

In einer geordneten ordinär absoluten Geometrie 2. Stufe kann der Begriff der Winkelsumme im Dreieck definiert und die Frage gestellt werden, ob der Defekt positiv oder negativ ist. Unter Benutzung eines Satzes von Schur<sup>23)</sup> ergibt sich aus unseren Überlegungen das Resultat, daß in einer ordinär absoluten Geometrie (2. Stufe) die Winkelsumme stets kleiner als zwei Rechte ist. Eine solche Geometrie kann also nicht auf verschiedene Weise so geordnet werden, daß der Defekt verschiedenes Vorzeichen erhält, die elliptisch absolute Geometrie 2. Stufe läßt sich zwar sowohl in eine geordnete hyperbolische als in eine geordnete elliptische Ebene (2. Stufe) einbetten, aber nur bei der ersten Einbettung gelten in ihr sämtliche Zwischenaxiome.

<sup>23)</sup> F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig-Berlin 1909, S. 99.

4. 3. Die Existenz des rechtwinkligen Dreiecks und der nicht-euklidischen Parallelen. Wir fragen uns nun, welche Rolle das Axiom III 12 vom rechtwinkligen Dreieck in der ordinär absoluten Geometrie spielt.

Betrachten wir zunächst den hyperbolischen Fall. Aus Satz 19 folgt, daß die euklidische Pseudogeometrie<sup>31)</sup>, die sich in einer hyperbolischen Geometrie 2. Stufe mit irgendeinem eigentlichen Punkt  $O$  als Aufpunkt einführen läßt, eine euklidische Geometrie 3. Stufe ist. In der Pseudogeometrie gilt daher das Axiom III 12. Daraus folgt unmittelbar, daß das Axiom auch in der hyperbolischen Geometrie 2. Stufe gilt. Sind nämlich zwei Strecken der hyperbolischen Geometrie gegeben, so trage man sie beide von  $O$  aus ab; die entstehenden Strecken seien  $OA$  und  $OB$ . Es gibt dann in der Pseudogeometrie ein rechtwinkliges Dreieck; dessen eine Spitze in  $O$  liegt, dessen Hypotenuse zu der einen von den beiden Strecken und dessen von  $O$  ausgehende Kathete zu der anderen im euklidischen Sinne kongruent sind. Dies Dreieck ist auch im hyperbolischen Sinne rechtwinklig, und die von  $O$  ausgehenden Seiten sind auch im hyperbolischen Sinne zu  $OA$  und  $OB$  kongruent.

Durch eine ähnliche Überlegung erkennt man, daß andererseits die Gültigkeit des Axioms III 12 in einer ordinär absoluten Geometrie zur Folge hat, daß dieses Axiom in der zugehörigen euklidischen Pseudogeometrie gültig ist, daß also der Körper der Geometrie ein reeller quadratisch abgeschlossener Körper ist. Über einem solchen Körper gibt es nun aber keine elliptisch absolute Geometrie, in der das Axiom IV gilt (3. 3. 4. 2), und daher gibt es keine elliptisch absolute Geometrie 2. Stufe, in der das Axiom III 12 gilt. Wir erhalten daher

*Satz 23. Das Axiom III 12 gilt in der hyperbolischen Geometrie 2. Stufe, dagegen nicht in einer elliptisch absoluten Geometrie 2. Stufe.*

Dieser Satz zeigt, daß das Axiom III 12 von den Axiomen der ordinär absoluten Geometrie 2. Stufe unabhängig ist. Da es in der hyperbolischen Geometrie 2. Stufe gilt, läßt sich die eindeutig bestimmte Anordnungsrelation dieser Geometrie wie in der euklidischen Geometrie 3. Stufe geometrisch definieren. In der hyperbolischen Geometrie 2. Stufe gibt es zu jeder Geraden durch jeden nicht auf ihr liegenden Punkt zwei nicht-euklidische Parallelen. Die Lobatschefskysche Parallelenkonstruktion<sup>34)</sup> zeigt, daß die Konstruktion der nicht-euklidischen Parallelen, von der Konstruktion von Loten und dem Verbinden von Punkten abgesehen, gerade durch die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit vorgegebener Hypotenuse gelingt. In der hyperbolischen Geometrie 2. Stufe existieren die Schnittpunkte zwischen Kreisen und Geraden, dagegen gilt die volle Kreislehre erst in einer hyper-

<sup>34)</sup> Siehe z. B. Schur, a. a. O., S. 100.

bolischen Geometrie höherer Stufe, deren Körper höhere Radikale enthält. Unser Axiomensystem der hyperbolischen Geometrie 2. Stufe ist mit dem Axiomensystem gleichwertig, das Hilbert zur Begründung der hyperbolischen Geometrie verwendet hat<sup>35)</sup>.

### § 5.

#### Das Mittelpunktsaxiom und die Hjelslevsche Begründung der absoluten Geometrie.

Das Axiomensystem, von dem aus Hjelslev die Begründung der absoluten Geometrie vorgenommen hat<sup>36)</sup>, entsteht aus unserem Axiomensystem der absoluten Geometrie, wenn man das Axiom hinzunimmt, daß jede Strecke mindestens einen Mittelpunkt besitzt. Dann sind nebenbei unsere speziellen Mittelpunktsaxiome III 9\* (bzw. III 9) und III 10 entbehrlich.

Wir denken uns nun zu dem Hjelslevschen Axiomensystem ebenfalls das Axiom IV hinzugenommen; eine durch dieses Axiomensystem definierte absolute Geometrie wollen wir eine *absolute Geometrie der Hjelslevschen Stufe* nennen und fragen uns, wie sich die Geometrien der Hjelslevschen Stufe zu den Geometrien der von uns definierten Stufen verhalten. Im euklidischen Falle ist die Geometrie der Hjelslevschen Stufe mit unserer Geometrie der 1. Stufe identisch; denn in der euklidischen Geometrie der 1. Stufe besitzt bereits jede Strecke einen Mittelpunkt. Im hyperbolischen Falle ist die Geometrie der Hjelslevschen Stufe mit unserer Geometrie 2. Stufe identisch. In einem Eigentlichkeitsbereich einer  $CG(K, Q_0)$ , in dem jede Strecke halbirbar ist, müssen nämlich alle Punkte denselben Formwert und, da der Formwert 1 angenommen wird und jedenfalls eigentlich ist, sämtlich den Formwert 1 haben. Dem Eigentlichkeitsbereich einer  $CG(K, Q_0)$  muß nun allgemein, wenn  $c$  ein von Null verschiedenes Element aus  $K$  ist, von den beiden Formwerten  $c, -c$  genau einer angehören (vgl. 3. 2). Läßt sich daher in einer  $CG(K, Q_0)$  ein Eigentlichkeitsbereich einer Hjelslevschen hyperbolischen Geometrie abgrenzen, so muß von den beiden Formwerten  $c, -c$  genau einer gleich dem Formwert 1 und daher  $K$  reell quadratisch abgeschlossen sein. Nur im elliptisch absoluten Falle stellt die Hjelslevsche Stufe wirklich eine Zwischenstufe zwischen unserer Geometrie der 1. und der 2. Stufe dar. Denn das Axiom von der Existenz eines Mittelpunktes ist zwar in den elliptisch absoluten Geometrien der 2. Stufe stets erfüllt, dagegen wie

<sup>35)</sup> Hilbert, a. a. O., Anhang III.

<sup>36)</sup> Siehe Anm. 4).

Beispiele von Geometrien über dem Körper der rationalen Zahlen aus 3.3 zeigen, im allgemeinen nicht in der elliptisch absoluten Geometrie 1. Stufe; die Geometrien über den  $p$ -adischen Körpern zeigen aber, daß es elliptisch absolute Geometrien gibt, in denen das Mittelpunktsaxiom erfüllt ist, ohne daß die Geometrien bereits solche 2. Stufe wären. Diese Geometrien und die Existenz von euklidischen Geometrien 1. Stufe über nicht anordenbaren Körpern liefern das Ergebnis: *Es gibt sowohl im singular als im ordinär absoluten Falle nicht anordenbare Geometrien, die das Hjelmalevsche Axiomensystem erfüllen* <sup>27)</sup>.

<sup>27)</sup> Hiermit ist die von Hjelmalev, a. a. O., § 9, „Über die Axiome der Anordnung“, aufgeworfene Frage beantwortet. (Dieser Paragraph enthält Fehler, die verschwinden, wenn man die Hjelmalevschen Überlegungen auf das Axiomensystem aus Hjelmalevs früherer Arbeit, Math. Annalen 64 (1907), S. 449–474, bezieht.)

(Eingegangen am 21. 7. 1939.)

# Über die Diophantische Gleichung $ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = ez^2$ .

Von

Hans Reichardt in Leipzig \*).

## Einleitung.

Im Laufe der Zeit ist eine ganze Reihe von speziellen Diophantischen Gleichungen der Form

$$(1) \quad ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = ez^2$$

vollständig gelöst worden. Bisher ist es jedoch weder gelungen, ein Verfahren anzugeben, das bei einer beliebig vorgegebenen Gleichung dieser Art die Entscheidung über Lösbarkeit oder Unlösbarkeit in endlich vielen Schritten ermöglicht, noch ein Verfahren anzugeben, das im Falle der Lösbarkeit die genaue Kenntnis der Struktur der Gesamtheit der Lösungen vermittelt, das also insbesondere darüber Auskunft gibt, ob die Gleichung endlich oder unendlich viele Lösungen besitzt. Einen gewissen Einblick erhält man dadurch, daß die Lösungen hinsichtlich einer Verknüpfung, die wir als Addition bezeichnen, eine Gruppe bilden. Zu dieser Addition kommt man, indem man entweder für die zur Gleichung

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = e\eta^2$$

gehörigen elliptischen Funktionen das Additionstheorem aufstellt oder indem man rein algebraisch der Multiplikation der Divisorenklassen des durch diese Gleichung definierten algebraischen Funktionenkörpers eine Additionsvorschrift für die Lösungen entnimmt<sup>1)</sup>. Von diesem Modul der Lösungen hat nun Mordell<sup>2)</sup> gezeigt, daß er eine endliche Basis besitzt, und A. Weil<sup>3)</sup> hat folgende Verallgemeinerung bewiesen: Die Gruppe der Divisorenklassen eines beliebigen algebraischen Funktionenkörpers über einem algebraischen Zahlkörper besitzt eine endliche Basis. Es handelt sich hierbei jedoch um reine Existenzsätze; den Beweisen kann man nicht entnehmen, wie eine solche Basis in endlich vielen Schritten konstruiert werden kann.

\*) Eingereicht zur Erlangung des Grades eines Dr. phil. habil. an der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig.

<sup>1)</sup> Für alle hier gebrauchten Begriffe und Sätze über Funktionenkörper s. H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 175 (1936), S. 65–62, 69–88, 193–208, vor allem I und II, sowie die dort angegebene Literatur.

<sup>2)</sup> On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees, Proc. Cambr. Phil. Soc. 21 (1922).

<sup>3)</sup> L'arithmétique sur les courbes algébriques, Acta math. 52 (1929).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den Zusammenhang zwischen den folgenden drei noch ungelösten Problemen aufzudecken:

1. Über die Lösbarkeit zu entscheiden und im Falle der Lösbarkeit eine Lösung anzugeben.

2. Eine Basis des Moduls der Lösungen einer lösbaren Gleichung anzugeben.

3. Alle Gleichungen der gegebenen Form zu bestimmen, die sich birational in die Gleichung

$$x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

transformieren lassen.

Wir werden sehen, daß diese drei Probleme in folgendem Sinne völlig gleichwertig sind:

1. Zur Aufstellung des Moduls und zur Entscheidung über die birationale Äquivalenz genügt es, von gewissen endlich vielen Gleichungen die Lösbarkeit zu entscheiden und für die lösbaren je eine Lösung anzugeben.

2. Um die Lösbarkeit von (1) zu entscheiden und eine Lösung anzugeben, genügt es, eine Basis aller Lösungen der lösbaren Gleichung

$$x^4 + bx^2y^2 + ac^2y^4 = z^2$$

aufzustellen. Mit Hilfe dieser Basis kann man weiter alle mit dieser Gleichung birational äquivalenten Gleichungen der gegebenen Form angeben.

3. Zur Entscheidung der Lösbarkeit und zur Angabe aller Lösungen mittels einer Basis genügt es, alle zu einer gewissen Gleichung

$$x^4 + bx^2y^2 - cy^4 = z^2$$

birational äquivalenten anzugeben.

Da die späteren Ausführungen stellenweise von längeren Rechnungen durchsetzt sind, gebe ich vorweg eine kurze Darstellung der einzelnen Ergebnisse.

In Abschnitt I finden sich vorbereitende Bemerkungen darüber, daß Gleichungen und Lösungen, die durch gewisse triviale Transformationen ineinander übergeführt werden können, nicht als wesentlich verschieden anzusehen sind (z. B. können wir im folgenden stets  $e = 1$  nehmen), sowie über den Zusammenhang der Lösungen der Gleichung mit den Primdivisoren ersten Grades des zugehörigen Funktionenkörpers. Mit Hilfe einer „*p*-adischen descente infinie“ wird ferner gezeigt, daß unter den Gleichungen

$$(2) \quad r(ax^4 + bx^2y^2 + cy^4) = z^2,$$

die später eine Rolle spielen werden, nur endlich viele wesentlich verschiedene lösbar vorkommen.

Abschnitt II gibt ein Verfahren an, nach dem jede Lösung der gegebenen Gleichung (1) zurückgeführt wird auf eine Lösung einer der Gleichungen

$$(3) \quad s(x'^4 - 2bsx'^2y'^2 + s^2dy'^4) = z'^2 \quad (d = b^2 - 4ac),$$

vorausgesetzt, daß eine Lösung von (1) bekannt ist, und jede Lösung einer jeden lösbaren dieser Gleichungen liefert auch wirklich eine Lösung von (1). Wendet man das gleiche Verfahren auf alle diese Gleichungen (3) an, so kommt man auf die lösbaren unter den Gleichungen

$$(4) \quad s'(as'^2x''^4 + bs'x''^2y''^2 + cy''^4) = z''^2,$$

unter denen die Gleichung (1) als Spezialfall enthalten ist. Wendet man das gleiche Verfahren wieder auf diese Gleichungen (4) an, so kommt man nur auf die Gleichungen (3) und auf keine weiteren Gleichungen. Man kann nun zeigen, daß sich fast immer, d. h. bis auf endlich viele Ausnahmen, die sich wirklich angeben lassen, bei jedem Schritte dieses Verfahrens das Maximum der absoluten Beträge von  $x$  und  $y$  erniedrigt. Damit hat man eine Methode, alle Lösungen der Gleichungen (3) und (4) aus endlich vielen unter ihnen schrittweise herzuleiten und insbesondere zu entscheiden, ob die Zahl der Lösungen endlich oder unendlich ist. Voraussetzung für die Durchführbarkeit dieses Verfahrens ist, daß man von den Gleichungen (3) und (4), von denen nach I nur endlich viele lösbar sind, entschieden hat, welche wirklich lösbar sind, und je eine Lösung angegeben hat. Die zu dieser „descente infinie nach dem absoluten Betrag“ nötigen Abschätzungen führen wir jedoch hier nicht durch, weil sie durch eine spätere Abschätzung überflüssig gemacht werden.

In Abschnitt III werden wir zeigen, daß der Übergang von der Ausgangsgleichung (1) zu einer der Gleichungen (3) aufgefaßt werden kann als Einbettung des zu (1) gehörigen Funktionenkörpers in eine quadratische Erweiterung, die gerade der zu dieser Gleichung (3) gehörige Funktionenkörper ist. Bei dieser Gelegenheit ergibt sich verhältnismäßig einfach eine birationale Transformation von (1) in die zugehörige Weierstraßsche Normalform, aus der man dann ablesen kann, welche Gleichungen der gegebenen Form birational äquivalent mit

$$x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

sind (Satz 1), wieder vorausgesetzt, daß man die Lösbarkeit gewisser Gleichungen, deren Anzahl auf Grund von I endlich ist, entscheiden und je eine Lösung angeben kann. Speziell zeigt sich dabei, daß die lösbaren unter den Gleichungen (3) untereinander birational äquivalent sind. Umgekehrt sind natürlich birational äquivalente Gleichungen gleichzeitig lösbar oder unlösbar, so daß in der Tat die Probleme 1. und 2. gleichwertig sind.

Ebenso wie der zu (1) gehörige Funktionenkörper in einen quadratischen Erweiterungskörper, der zu einer lösbaren Gleichung (3) gehört, eingebettet worden ist, kann man diesen Erweiterungskörper seinerseits wieder in einen

quadratischen Erweiterungskörper einbetten, der zu einer lösbaren Gleichung (4) gehört. Nach Satz 1 sind nun diese Gleichungen (4) mit (1) birational äquivalent, daher folgt: *Der Übergang von der lösbaren Gleichung (1) über die Gleichungen (3) zu den Gleichungen (4) bedeutet eine Einbettung des zu (1) gehörigen Funktionenkörpers in einen Erweiterungskörper vom Grad 4, der isomorph zum eingebetteten Körper ist.* Wir haben also einen *Meromorphismus* der Norm 4 vor uns.

Eine weitere Folgerung aus der birationalen Äquivalenz der lösbaren Gleichungen (3) ist die, daß die Gruppen ihrer Lösungen isomorph sind; denn jede von ihnen ist isomorph mit der Gruppe der Divisorenklassen des Grades 0 des zugehörigen Funktionenkörpers, und wegen der birationalen Äquivalenz ihrer erzeugenden Gleichungen sind diese Funktionenkörper alle miteinander isomorph, also gilt das gleiche für ihre — birational invariant definierte — Divisorenklassengruppe. Es genügt daher, die Gruppe der Lösungen für eine spezielle dieser Gleichungen aufzustellen, und zwar nehmen wir dazu die Gleichung

$$x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2,$$

weil bei dieser die Additionsformeln noch verhältnismäßig einfach ausfallen. Das geschieht in Abschnitt IV, in dem auch noch eine geometrische Deutung dieser Addition gegeben wird.

In II wurde gemäß (3) jeder Lösung  $p$  der Ausgangsgleichung (1) eine Zahl  $s$  zugeordnet. Diese Zuordnung liefert, wie in Abschnitt V gezeigt wird, folgende *homomorphe Abbildung der Gruppe der Lösungen  $p$  auf eine endliche Gruppe von Quadratklassen*: Sind  $p_1, p_2, p_3$  drei Lösungen und gehören dazu die Zahlen  $s_1, s_2, s_3$ , so gilt, wenn  $p_1 + p_2 = p_3$  ist,  $s_1 s_2 \overline{(s)} s_3$ , d. h.  $s_1 s_2$  und  $s_3$  unterscheiden sich um einen von Null verschiedenen Faktor, der eine Quadratzahl ist (Satz 2). Daraus können wir eine wichtige Folgerung ziehen: *Die endlich vielen lösbaren Gleichungen (2) mit  $a = 1$  bilden in folgendem Sinne eine Gruppe: Ist (2) für  $r \overline{(s)} r_1$  und für  $r \overline{(s)} r_2$  lösbar, so auch für  $r \overline{(s)} r_1 r_2$  (Satz 3).*

Neben der Zahl  $s$  ist jeder Lösung  $p$  gemäß (4) noch eine Zahl  $s'$  zugeordnet, die hinsichtlich der Addition der Lösungen ein ähnliches Verhalten wie  $s$  aufweist (Satz 4). Andererseits kann man zeigen, daß durch Angabe der Quadratklassen der beiden Zahlen  $s$  und  $s'$  die Restklasse von  $p$  nach derjenigen Untergruppe aller Lösungen festgelegt ist, die aus den Elementen  $2q = q + q$  besteht, indem man die Sätze 3 und 4 sowie den Satz 5 anwendet, der aussagt, daß  $p$  dann und nur dann dieser Untergruppe angehört, wenn  $s$  und  $s'$  oder  $cs'$  Quadratzahlen sind. Daraus ergibt sich jetzt, daß die Faktorgruppe aller  $p$  nach der Untergruppe der  $2p$  eine endliche Ordnung hat und daß diese Ordnung bestimmt werden kann, wenn man weiß, wie viele der Gleichungen (3) und (4) lösbar sind (Satz 6).

Um den hier gegebenen Rahmen nicht zu verlassen, ziehen wir nicht die Sätze von Mordell und Weil heran, sondern beweisen mit Hilfe einer descente nach dem absoluten Betrag, daß die Gruppe der Lösungen eine endliche Basis besitzt (Satz 7). Bei diesem Beweis wird nur für die Konstruktion der Basis Gebrauch von der Voraussetzung gemacht, daß man je eine Lösung der lösbaren unter den Gleichungen (3) und (4) kennt, während man zum reinen Existenzbeweis für die Basis bereits mit der in I bewiesenen Tatsache auskommt, daß von diesen Gleichungen nur endlich viele lösbar sind. Da man ihre Anzahl leicht abschätzen kann (s. den Beweis in I), bekommt man auch sofort eine Abschätzung für die Länge dieser Basis. — Umgekehrt entnimmt man aber auch leicht dem Beweis des Satzes 7 und den vorangehenden Beweisen, daß man, wenn man eine Basis der Lösungen von

$$x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

bereits kennt, entscheiden kann, welche unter den Gleichungen

$$r(r^2x^4 + brx^2y^2 + cy^4) = z^2$$

lösbar sind. Da man nun durch eine einfache Transformation jede Gleichung (1) auf diese Form bringen kann, ergibt sich, daß die Entscheidung über die Lösbarkeit einer gewissen endlichen Anzahl vorgelegter Gleichungen völlig gleichbedeutend ist mit der Angabe einer Basis aller Lösungen von (5), womit nunmehr alle drei zu Anfang genannten Probleme als gleichwertig erkannt sind.

Kombination der Sätze 6 und 7 liefert die Anzahl  $\varrho$  der unabhängigen Erzeugenden unendlicher Ordnung der Gruppe der Lösungen: Nach Satz 3 sind die Anzahlen der lösbaren Gleichungen (3) und (4) Potenzen von 2; sie seien  $2^{\varrho_1}$  und  $2^{\varrho_2}$ . Dann ist  $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 - 2$  (Satz 8).

Zum Schluß von Abschnitt V wird noch gezeigt, wie man aus einer beliebigen Basis der Gruppe der Lösungen eine unabhängige Basis gewinnen kann.

Bisher war stillschweigend vorausgesetzt, daß die Koeffizienten der Gleichungen sowie die Lösungen aus rationalen Zahlen bestehen. Fast alle hier durchgeführten Betrachtungen übertragen sich aber wörtlich, wenn man an Stelle des Körpers der rationalen Zahlen einen beliebigen algebraischen Zahlkörper endlichen Grades zuläßt; lediglich im Beweis von Satz 7 und in der darauffolgenden Abschätzung hat man alle Archimedischen Bewertungen des Konstantenkörpers gleichzeitig heranzuziehen. Zu dieser Verallgemeinerung braucht man an Sätzen über algebraische Zahlkörper nur den Satz von der Endlichkeit der Gruppe der Idealklassen und den Satz, daß die Gruppe der Einheiten eine endliche Basis besitzt, sowie die Tatsache, daß es in einem algebraischen Zahlkörper nur endlich viele ganze Zahlen gibt, die zugleich mit ihren konjugierten unterhalb einer beliebig gegebenen Grenze liegen.

Wenn man sich nun einmal von der Beschränkung auf den rationalen Zahlkörper frei gemacht hat, so kann man jeden elliptischen Funktionenkörper, dessen Konstantenkörper ein algebraischer Zahlkörper ist, nach einer geeigneten endlichen Erweiterung des Konstantenkörpers durch eine Gleichung der hier betrachteten Form erzeugen, was in Abschnitt VI geschieht. Zum Schluß dieses Abschnittes wird ein Verfahren angegeben, wie man aus einer Basis der Gruppe der Primdivisoren ersten Grades aus dem erweiterten Körper die entsprechende Basis für den ursprünglichen Körper gewinnen kann. Damit haben wir erkannt, daß man die *Hauptprobleme über elliptische Funktionenkörper über einem algebraischen Zahlkörper erledigen kann, wenn nur eines der zu Anfang genannten drei Probleme für Gleichungen der Form (1) über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper gelöst ist.*

# I.

Damit die vorgelegte Gleichung

$$(1) \quad ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = ez^2$$

nicht degeneriert, müssen wir voraussetzen, daß weder die Koeffizienten  $a, c, e$  noch die Diskriminante

$$d = b^2 - 4ac$$

Null sind. Weiter wollen wir annehmen, daß die Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind und wollen nur die rationalen Lösungen bestimmen; wenn man nämlich einen umfangreicheren algebraischen Zahlkörper zuläßt, so verlaufen die Betrachtungen im wesentlichen auch nicht anders, werden aber durch das Auftreten von Idealklassen und Einheiten nur belastet.

Mit  $x, y, z$  ist auch  $tx, ty, t^2z$  eine (nicht notwendig ganzzahlige) Lösung und soll als nicht wesentlich verschieden von der Lösung  $x, y, z$  aufgefaßt werden, wobei wir für  $t$  beliebige rationale Zahlen  $\neq 0$  zulassen. Aus einer solchen Menge von gleichen Lösungen kann man durch geeignete Normierungsvorschriften eindeutig einen Repräsentanten herausheben, z. B. durch die Forderung, daß  $x, y, z$  ganz sind, daß  $(x, y)$  möglichst klein und schließlich  $x > 0$  oder  $x = 0$  und  $y > 0$  ist. (Die triviale Lösung  $x = y = 0$  wird natürlich weggelassen.)

Von dem willkürlichen Faktor kann man sich auch ohne Normierungsvorschriften frei machen, indem man die ganze Gleichung durch  $y^4$  dividiert, falls  $y \neq 0$  ist:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^4 + b\left(\frac{x}{y}\right)^2 + c = e\left(\frac{z}{y^2}\right)^2.$$

Man erhält so eine rationale Lösung der Gleichung

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = e\eta^2.$$

Ist umgekehrt  $\xi, \eta$  eine rationale Lösung dieser Gleichung, so lassen sich aus  $\xi = \frac{z}{y}, \eta = \frac{x}{y^2}$  Zahlen  $x, y, z$  bestimmen, die dann in unserem Sinne gleiche Lösungen von (1) liefern. — Nun entspricht jeder Lösung von (2) in bekannter Weise eindeutig ein Primdivisor ersten Grades des durch (2) definierten Funktionenkörpers, wobei also  $\xi$  und  $\eta$  jetzt Unbestimmte bedeuten, die durch (2) miteinander verbunden sind. Daher erhalten wir aus gleichen Lösungen von (1) mit  $y \neq 0$  genau einen Primdivisor ersten Grades, während verschiedene Lösungen auf verschiedene Primdivisoren führen. Man erhält so auch alle Primdivisoren ersten Grades bis auf die, die im Nenner von  $\xi$  aufgehen. Diese entsprechen aber den Lösungen von (1) mit  $y \neq 0$ : Solche Lösungen kann es nämlich nur geben, wenn  $\frac{c}{e}$  eine Quadratzahl ist, und diese Lösungen sind dann  $t, 0, \pm t\sqrt{\frac{c}{e}}$ , und zu diesen beiden Lösungen gehören die beiden Primdivisoren ersten Grades, die in diesem Falle im Nenner von  $\xi$  aufgehen. Ist dagegen  $\frac{c}{e}$  keine Quadratzahl, so besitzt (1) keine Lösung mit  $y = 0$ , während der Nennerdivisor von  $\xi$  offenbar Primdivisor im Körper  $P(\xi, \eta)$  bleibt. Damit haben wir also gesehen, daß die Primdivisoren  $p$  ersten Grades von  $P(\xi, \eta)$  eineindeutig den verschiedenen Lösungen von (1) entsprechen. Daher werden wir gelegentlich kurz von dem Primdivisor  $x, y, z$  oder der Lösung  $p$  sprechen, wenn  $p$  der zur Lösung  $x, y, z$  gehörige Primdivisor ist.

Multipliziert man alle Koeffizienten von (1) mit demselben Faktor, so entsteht keine wesentlich neue Gleichung. Setzt man

$$x = x'p, \quad y = y'q, \quad z = z'r$$

mit festen rationalen, von Null verschiedenen Zahlen  $p, q, r$ , so geht die gegebene Gleichung über in

$$a'x'^4 + b'x'^2y'^2 + c'y'^4 = e'z'^2$$

mit

$$a' = ap^4, \quad b' = bp^2q^2, \quad c' = cq^4, \quad e' = er^2,$$

und auch diese Gleichung soll nicht als wesentlich verschieden von der ursprünglichen aufgefaßt werden. In diesem Sinne sind z. B. die Gleichungen

$$r(ar^2x^4 + brx^2y^2 + cy^4) = ez^2,$$

$$\dot{r}(a\dot{r}^2\dot{x}^4 + b\dot{r}\dot{x}^2\dot{y}^2 + c\dot{y}^4) = e\dot{z}^2$$

nicht verschieden, wenn nur  $r$  und  $\hat{r}$  derselben Quadratklasse angehören, d. h. wenn  $\hat{r} = rk^2$  mit rationalem  $k \neq 0$ ; denn dann lautet die zweite Gleichung

$$rk^2(ar^2k^4\hat{x}^4 + brk^2\hat{x}^2\hat{y}^2 + c\hat{y}^4) = e\hat{z}^2,$$

und diese geht über in die erste, wenn wir

$$\hat{x} = \frac{x}{k}, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{z} = kz$$

setzen. — Ähnlich kann man erreichen, daß  $e = 1$  wird, während  $a, b, c$  ganz bleiben: Es ist ja

$$aex^4 + bex^2y^2 + cey^4 = (ez)^2.$$

Wir wollen daher, um einen Buchstaben zu sparen, immer  $e = 1$  annehmen. Dann ist für die normierten Lösungen  $(x, y) = 1$ ; denn setzen wir  $(x, y) = t$ , so folgt aus

$$ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

$t^4 \mid z^2$ , und daher ist  $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t^2}$  eine ganzzahlige Lösung mit  $\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 1$ , und daraus folgt nach der Normierungsvorschrift  $t = 1$ .

Gleichungen, die nicht wesentlich voneinander verschieden sind, sind entweder alle lösbar oder alle unlösbar, daher kommt es z. B., wie wir oben gesehen haben, bei der Frage, für welche  $r$  die Gleichung

$$(3) \quad r(ar^2x^4 + brx^2y^2 + cy^4) = z^2$$

lösbar ist, nur auf den quadratischen Kern von  $r$  an, d. h. auf die Quadratklasse von  $r$ . Wir wollen nun zeigen, daß (3) nur für endlich viele Werte des Kernes von  $r$  lösbar ist. Diese Behauptung ergibt sich daraus, daß wir beweisen: Enthält der quadratische Kern von  $r$  eine Primzahl  $p$ , die nicht in  $ac$  aufgeht, so ist (3) unlösbar; denn wenn das gezeigt ist, ergibt sich, daß im Falle der Lösbarkeit im Kern von  $r$  nur die endlich vielen Primteiler von  $ac$  aufgehen können. Schreiben wir die Gleichung (3) so:

$$ar^3x^4 + br^2x^2y^2 + cry^4 = z^2,$$

so lesen wir ohne weiteres daraus ab: Zunächst ist  $p \mid z^2$ , also  $p \mid z$ . Jetzt folgt  $p^2 \mid ry^4$ , also  $p \mid y$  wegen  $p^2 \nmid r$ , wie wir von vornherein annehmen dürfen, da es ja nur auf den Kern von  $r$  ankommt. Nun folgt  $p^3 \mid x^2$ , also  $p^2 \mid x$ , und schließlich folgt  $p \mid x$  wegen  $p^4 \mid ar^3x^4$  und  $p^4 \nmid ar^3$ . Wäre daher  $x, y, z$  eine ganzzahlige Lösung von (3), so wäre  $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p^2}$  auch eine. Nochmalige Anwendung dieser Schlußweise ergäbe, daß auch  $\frac{x}{p^2}, \frac{y}{p^2}, \frac{z}{p^4}$  eine ganzzahlige Lösung von (3) wäre usw. Da aber  $x$  und  $y$  nicht beide Null sind, geht in ihrem größten gemeinsamen Teiler nur eine beschränkte Potenz von  $p$  auf.

## II.

Wir wollen nun annehmen, daß wir eine Lösung  $x_0, y_0, z_0$  von

$$(1) \quad ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

bereits kennen. Ist weiter  $x, y, z$  eine beliebige Lösung von (1) und setzen wir  $X = x^2, Y = y^2, Z = z$ , so ist  $X, Y, Z$  eine Lösung von

$$(2) \quad aX^2 + bXY + cY^2 = Z^2.$$

$X_0 = x_0^2, Y_0 = y_0^2, Z_0 = z_0$  ist eine feste ganzzahlige Lösung von (2), und daraus entspringt in bekannter Weise eine rationale Parameterdarstellung von  $X, Y, Z$ . Man erhält sie etwa, indem man  $X, Y, Z$  als homogene Koordinaten auffaßt und die Richtung der Verbindungsgeraden mit  $X_0, Y_0, Z_0$ , die den Kegelschnitt (2) ja nur in diesen beiden Punkten schneidet, als Parameter nimmt. Man erhält so

$$(3) \quad \begin{cases} sX = Q_1(u, v), \\ sY = Q_2(u, v), \\ sZ = Q_3(u, v), \end{cases}$$

wobei  $Q_1, Q_2, Q_3$  ganzzahlige quadratische Formen in  $u, v$  sind und für  $u, v$  ganze teilerfremde Zahlen einzusetzen sind. Die Zahl  $s$  nimmt nur endlich viele ganzzahlige Werte an.

Wir müssen die Fälle mit  $x_0y_0z_0 \neq 0$  und  $x_0y_0z_0 = 0$  getrennt behandeln. Zunächst nehmen wir  $x_0y_0z_0 \neq 0$ . Die Parameterdarstellung (3) hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{cases} sX = X_0u^2 + 2(bX_0 + 2cY_0)uv + dX_0v^2, \\ sY = Y_0u^2 - 2(2aX_0 + bY_0)uv + dY_0v^2, \\ sZ = Z_0u^2 - dZ_0v^2. \end{cases}$$

Setzen wir nun hierin  $X = x^2, Y = y^2, Z = z$  und  $X_0 = x_0^2, Y_0 = y_0^2, Z_0 = z_0$  ein, so erhalten wir

$$(4) \quad \begin{cases} sx^2 = x_0^2u^2 + 2(bx_0^2 + 2cy_0^2)uv + dx_0^2v^2, \\ sy^2 = y_0^2u^2 - 2(2ax_0^2 + by_0^2)uv + dy_0^2v^2, \\ sz = z_0u^2 - dz_0v^2. \end{cases}$$

Eine Einschränkung von  $s$  auf endlich viele Werte erhalten wir folgendermaßen: Nach (4) ist

$$(5) \quad \begin{cases} s(x^2(2ax_0^2 + by_0^2) + y^2(bx_0^2 + 2cy_0^2) + 2zz_0) = 4z_0^2u^2, \\ s(x^2(2ax_0^2 + by_0^2) + y^2(bx_0^2 + 2cy_0^2) - 2zz_0) = 4dz_0^2v^2. \end{cases}$$

Wegen  $(u, v) = 1$  ergibt sich daraus  $s \mid 4dz_0^2$ . Also hat man das Gleichungssystem (4) nur für diese endlich vielen Werte zu betrachten. Man könnte nun etwa für die Lösungen der ersten Gleichung von (4), die ja eine qua-

dratische Diophantische Gleichung für  $x, u, v$  darstellt. eine Parameterdarstellung angeben und diese in die zweite Gleichung einsetzen. Empfehlenswerter ist es jedoch, eine der beiden ersten Gleichungen von (4) zu ersetzen durch die Gleichung

$$s(x^2 y_0^2 - y^2 x_0^2) = 2(2ax_0^2 + 2bx_0^2 y_0^2 + 2cy_0^2)uv,$$

die wir auch so schreiben können:

$$s(xy_0 + yx_0)(xy_0 - yx_0) = 4x_0^2 uv.$$

Für deren Lösungen hat man die bekannte Parameterdarstellung

$$(6) \quad \begin{cases} s = \alpha\beta\gamma & 4x_0^2 = \alpha\delta\varepsilon \\ xy_0 + yx_0 = \delta\kappa\lambda & u = \beta\kappa\mu \\ xy_0 - yx_0 = \varepsilon\mu\nu & v = \gamma\lambda\nu \end{cases}.$$

Die Parameter sind hier  $\alpha, \lambda, \mu, \nu$ , während  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  nur endlich viele, von Null verschiedene Werte annehmen. Setzt man nun den hieraus sich ergebenden Ausdruck für  $x$  sowie die Ausdrücke für  $u, v$  in die erste Gleichung von (4) ein, so erhält man

$$s\left(\frac{\delta\kappa\lambda + \varepsilon\mu\nu}{2y_0}\right)^2 = x_0^2\beta^2\kappa^2\mu^2 + 2(bx_0^2 + 2cy_0^2)\beta\gamma\kappa\lambda\mu\nu + dx_0^2\gamma^2\lambda^2\nu^2,$$

oder auch

$$(7) \quad \kappa^2(s\delta^2\lambda^2 - 4x_0^2y_0^2\beta^2\mu^2) + 2\kappa\nu \cdot \lambda\mu(s\delta\varepsilon - 4bx_0^2y_0^2\beta\gamma - 8cy_0^2\beta\gamma) + \nu^2(s\varepsilon^2\mu^2 - 4dx_0^2y_0^2\gamma^2\lambda^2) = 0.$$

Diese Gleichung können wir als quadratische Gleichung für  $\kappa : \nu$  auffassen. Weil sie eine rationale Lösung hat, muß ihre Diskriminante eine Quadratzahl sein:

$$(8) \quad (s\delta\varepsilon - 4bx_0^2y_0^2\beta\gamma - 8cy_0^2\beta\gamma)^2\lambda^2\mu^2 - (s\delta^2\lambda^2 - 4x_0^2y_0^2\beta^2\mu^2)(s\varepsilon^2\mu^2 - 4dx_0^2y_0^2\gamma^2\lambda^2) = \varrho^2.$$

Eine einfache Umformung dieser Gleichung unter Berücksichtigung der ersten Zeile von (6) führt auf

$$4sx_0^2y_0^2(d\gamma^2\delta^2\lambda^4 - 2b\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda^2\mu^2 + \beta^2\varepsilon^2\mu^4) = \varrho^2.$$

Setzen wir hierin

$$(9) \quad \lambda = \frac{y'}{\delta}, \quad \mu = \frac{x'}{2s_0\beta}, \quad \varrho = \frac{2x_0y_0z'}{\alpha\beta\delta}$$

ein, so erhalten wir, wieder unter Anwendung von (6),

$$s(ds^2x'^4 - 2bsx'^2y'^2 + y'^4) = z'^2.$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommen wir im Falle  $x_0y_0z_0 = 0$ . Hier betrachten wir die Möglichkeiten  $x_0y_0 = 0$  und  $z_0 = 0$  getrennt. Zunächst sei  $x_0y_0 = 0$ .

etwa  $y_0 = 0$ , also  $ax_0^4 = z_0^2$ . An Stelle der Gleichungen (4) treten hier die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} sx^2 = x_0^2 u^2 - 2bx_0^2 uv + dx_0^2 v^2 \\ sy^2 = 4ax_0^2 uv \\ sz = z_0 u^2 - dz_0 v^2. \end{cases}$$

Genau wie oben schließt man hier, daß  $s \mid 4dx_0^2$ . Für die Lösungen der zweiten Gleichung von (10) gibt es nun folgende ganze rationale Parameterdarstellung:

$$(11) \quad \begin{cases} s = \alpha\beta\gamma & 4ax_0^2 = \alpha\delta\epsilon\zeta^2 \\ y = \delta\epsilon\zeta\kappa\lambda & u = \beta\delta\kappa^2 \\ & v = \gamma\epsilon\lambda^2 \end{cases},$$

wobei  $\kappa, \lambda$  die Parameter sind, während  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$  nur endlich viele, von Null verschiedene Werte annehmen. Dies in die erste Gleichung von (10) eingesetzt, gibt

$$\alpha\beta\gamma x^2 = x_0^2 \beta^2 \delta^2 \kappa^4 + 2bx_0^2 \beta\gamma\delta\epsilon\kappa^2 \lambda^2 + dx_0^2 \gamma^2 \epsilon^2 \lambda^4.$$

Mit

$$(12) \quad x = \frac{z'}{s x_0 \alpha \beta \epsilon \zeta^2}, \quad \kappa = \frac{y'}{2x_0 \beta}, \quad \lambda = \frac{z'}{x_0 \epsilon \zeta}$$

finden wir dann

$$s(ds^2 x'^4 - 2bsx'^2 y'^2 + y'^4) = z'^2.$$

Genau so gehen wir natürlich vor, wenn  $x_0 = 0$  ist. Es bleibt also nur noch der Fall  $z_0 = 0$  übrig. Hier tritt an Stelle von (4)

$$(13) \quad \begin{cases} sx^2 = x_0^2 u^2 + d(ax_0^2 + by_0^2)v^2, \\ sy^2 = y_0^2 u^2 - ady_0^2 v^2, \\ sz = dy_0^2 uv. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$(14) \quad \begin{cases} s(x^2 y_0^2 - y^2 x_0^2) = d(2ax_0^2 + by_0^2)y_0^2 v^2, \\ s(2ay_0^2 x^2 + (ax_0^2 + by_0^2)y^2) = (2ax_0^2 + by_0^2)y_0^2 u^2. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst  $s \mid d(2ax_0^2 + by_0^2)y_0^2$ , und dabei ist dieser Ausdruck nicht Null, denn sonst wäre, wie man ohne weiteres sieht,  $x_0 = y_0 = 0$ . Für die Lösungen der ersten Gleichung von (14) hat man folgende Parameterdarstellung

$$(15) \quad \begin{cases} d(2ax_0^2 + by_0^2)y_0^2 = \alpha\beta\gamma & s = \alpha\delta\epsilon\zeta^2 \\ v = \delta\epsilon\zeta\kappa\lambda & xy_0 + yx_0 = \beta\delta\kappa^2 \\ & xy_0 - yx_0 = \gamma\epsilon\lambda^2 \end{cases}$$

mit den Parametern  $\kappa, \lambda$ . Dies setzen wir in die erste Gleichung von (13) ein:

$$\alpha\delta\epsilon\zeta^2 \left( \frac{\beta\delta\kappa^3 + \gamma\epsilon\lambda^3}{2y_0} \right)^2 = x_0^2 u^2 + d(ax_0^2 + by_0^2)\delta^2\epsilon^2\zeta^2\kappa^2\lambda^2.$$

Auch von hier aus kommen wir auf die Gleichung

$$s(ds^2 x'^4 - 2bsx'^2 y'^2 + y'^4) = z'^2,$$

wenn wir nämlich

$$(16) \quad u = \frac{sz'}{2sx_0y_0\alpha\beta}, \quad x = \frac{y'}{\alpha\beta\delta_1^2}, \quad \lambda = \frac{x'}{\sqrt{d}y\delta}$$

setzen. ( $\sqrt{d}$  ist ja rational, weil  $ax^2 + bx + c = 0$  wegen  $z_0 = 0$  eine rationale Lösung hat.)

Wir haben also nun in jedem Falle gesehen, daß, wenn eine Lösung von (1) bekannt ist, jede ihrer Lösungen auf eine Lösung einer der Gleichungen

$$(17) \quad s(ds^2 x'^4 - 2bsx'^2 y'^2 + y'^4) = z'^2$$

führt. Wie ein Blick auf das eben angegebene Verfahren lehrt, liefert aber auch jede Lösung von (17) rückwärts eine Lösung von (1).

Wir wenden nun das gleiche Verfahren auf die Gleichung (17) an. Der Koeffizient von  $x'^2 y'^2$  ist  $-2bs^2$ , die Diskriminante ist  $16acs^4$ ; jede Lösung von (17) führt also auf eine Lösung von

$$s'(16acs^4 s'^2 x''^4 + 4bs^2 s' x''^2 y''^2 + y''^4) = z''^2,$$

und diese Gleichung ist nicht wesentlich verschieden von

$$(18) \quad s'(acs'^2 x''^4 + bs' x''^2 y''^2 + y''^4) = z''^2.$$

Unter diesen Gleichungen kommt die Ausgangsgleichung (1) vor; wir brauchen nur  $s' = c$  zu setzen und erhalten so

$$ac^4 x''^4 + bc^2 x''^2 y''^2 + cy''^4 = z''^2,$$

und diese Gleichung ist in der Tat nicht wesentlich von (1) verschieden.

Nun wenden wir dieses Verfahren wieder auf (18) an. Wir kommen dann auf die Gleichungen

$$s''(ds'^4 s''^2 x'''^4 - 2bs'^2 s'' x'''^2 y'''^2 + y'''^4) = z'''^2,$$

die aber nicht wesentlich von den Gleichungen (17) verschieden sind. Der Kreis schließt sich also, und man könnte zunächst glauben, daß man sich wirklich nur im Kreise gedreht habe. Das ist aber nicht der Fall: Man kann nämlich zeigen, daß fast immer, d. h. bis auf endlich viele auszunehmende Lösungen, das Maximum der absoluten Beträge von  $x$  und  $y$  bei diesem Verfahren kleiner wird. Diese Ausnahmelösungen kann man wirklich angeben, wenn man nur je eine Lösung der lösbaren unter den Gleichungen (17) und (18) hat, von denen wir ja schon wissen, daß nur endlich viele verschiedene von ihnen lösbar sind. Geht man also von einer beliebigen Lösung einer der Gleichungen (17) oder (18) aus und wendet auf sie das Verfahren genügend oft an, so kommt man auf eine der Ausnahmelösungen. Damit ist dann die

Bestimmung aller Lösungen der Ausgangsgleichung darauf zurückgeführt zu untersuchen, welche der nach I endlich vielen, möglicherweise lösaren Gleichungen (17) und (18) wirklich lösbar sind, und eine Lösung einer jeden solchen Gleichung anzugeben; denn wenn diese Lösungen bekannt sind, kann man die Ausnahmेलösungen aufstellen und auf diese unser Verfahren rückwärts anwenden. Erhält man dabei keine neuen Lösungen von (17) und (18), so sind die Ausnahmेलösungen bereits alle Lösungen. Treten jedoch neue Lösungen auf, so wende man auf diese wieder das Verfahren rückwärts an, und so fahre man immer weiter fort. Ich möchte jedoch darauf verzichten zu zeigen, wie man die Ausnahmेलösungen bestimmen kann, weil später ein anderes Verfahren angegeben wird, das alle Lösungen der Ausgangsgleichung liefert, wenn man über die Lösbarkeit entscheiden kann, und das einen besseren Überblick über die Gesamtheit aller Lösungen gewährt.

### III.

Verfolgen wir noch einmal den Weg, der von einer Lösung der Gleichung II (17) rückwärts zu einer Lösung der Ausgangsgleichung führt, so erkennen wir, daß es dabei gar nicht darauf ankommt, daß  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ganze Zahlen sind, sondern daß wir  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  auch als Unbestimmte nehmen können, die durch die Gleichung II (17) miteinander verbunden sind. Dabei ist es jedoch zweckmäßiger,  $\xi' = \frac{x'}{y'}$ ,  $\eta' = \frac{z'}{y'^2}$  zu setzen und den nun durch

$$(1) \quad s(ds^2\xi'^4 - 2bs\xi'^2 + 1) = \eta'^2$$

definierten Funktionenkörper  $P(\xi', \eta')$  in Zusammenhang mit  $P(\xi, \eta)$  zu bringen. Wir haben dazu wieder die drei Fälle wie in II zu unterscheiden. Nehmen wir zunächst  $x_0y_0z_0 \neq 0$ . Nach II (9) ist dann

$$\xi' = \frac{x'}{y'} = \frac{\delta\lambda}{2x_0\beta\mu}, \quad \eta' = \frac{z'}{y'^2} = \frac{\alpha\beta\delta\varrho}{2x_0y_0 \cdot 4x_0^2\beta^3\mu^3},$$

also  $P(\xi', \eta') = P\left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\varrho}{\mu^3}\right)$ . Weiter ist nach II (7) und II (8)

$$\frac{x}{y} = \frac{(-s\delta\epsilon + 4bx_0^2y_0^2\beta\gamma + 8cy_0^2\beta\gamma)\frac{\lambda}{\mu} \pm \frac{\varrho}{\mu^3}}{s\delta^3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - 4x_0^2y_0^2\beta^2},$$

also ist  $P\left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\varrho}{\mu^3}\right) = P\left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{x}{y}\right)$ . Nach II (6) ist nun

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\lambda}{\mu}, \frac{x}{y}\right) &= P\left(\frac{v}{xy_0 - yx_0}, \frac{u}{xy_0 - yx_0}\right) \\ &= P\left(\frac{uv}{(xy_0 - yx_0)^2}, \frac{u}{xy_0 - yx_0}\right). \end{aligned}$$

Nach II (4) ist weiter

$$s(x^2 y_0^2 - y^2 x_0^2) = 4 z_0^2 uv,$$

$$s(2ax_0^2 x^2 + b(x_0^2 y^2 + y_0^2 x^2) + 2cy_0^2 y^2 + 2z_0 z) = 4z_0^2 u^2,$$

also ist

$$\begin{aligned} P\left(\frac{uv}{(xy_0 - yx_0)^2}, \frac{u}{xy_0 - yx_0}\right) \\ = P\left(\frac{xy_0 + yx_0}{xy_0 - yx_0}, \frac{\sqrt{s(2ax_0^2 x^2 + b(x_0^2 y^2 + y_0^2 x^2) + 2cy_0^2 y^2 + 2z_0 z)}}{xy_0 - yx_0}\right) \\ = P\left(\xi, \frac{\sqrt{s(2a\xi_0^2 \xi^2 + b(\xi_0^2 + \xi^2) + c + 2\eta\eta_0)}}{\xi - \xi_0}\right) \end{aligned}$$

und somit

$$(2) \quad P(\xi', \eta') = P(\xi, \eta, \sqrt{s(2a\xi_0^2 \xi^2 + b(\xi_0^2 + \xi^2) + c + 2\eta\eta_0)}).$$

Wir sehen also, daß  $P(\xi', \eta')$  ein Erweiterungskörper von  $P(\xi, \eta)$  ist, und zwar höchstens ein quadratischer. Dasselbe wollen wir nun auch noch für die beiden anderen Fälle beweisen. Sei also jetzt  $y_0 = 0$ . Hier ist nach II (12) und II (11)

$$\begin{aligned} P(\xi', \eta') &= P\left(\frac{x'}{y'}, \frac{z'}{y'^2}\right) = P\left(\frac{\lambda}{\kappa}, \frac{z}{\kappa^2}\right) \\ &= P\left(\frac{y}{u}, \frac{z}{u}\right) = P\left(\xi, \frac{u}{z}\right). \end{aligned}$$

Nun ist nach II (10)

$$s(2ax_0^2 x^2 + bx_0^2 y^2 + 2z_0 z) = 4z_0^2 u^2,$$

also können wir auch hier wieder schreiben

$$P(\xi', \eta') = P(\xi, \eta, \sqrt{s(2a\xi_0^2 \xi^2 + b\xi_0^2 + 2\eta_0 \eta)}).$$

Schließlich ist im Falle  $z_0 = 0$  nach II (16), II (15) und II (14)

$$\begin{aligned} P(\xi', \eta') &= P\left(\frac{x'}{y'}, \frac{z'}{y'^2}\right) = P\left(\frac{\lambda}{\kappa}, \frac{u}{\kappa^2}\right) = P\left(\frac{v}{x_0 y + y_0 x}, \frac{u}{x_0 y + y_0 x}\right) \\ &= P\left(\frac{uv}{(x_0 y + y_0 x)^2}, \frac{u}{x_0 y + y_0 x}\right) \\ &= P\left(\frac{z}{(x_0 y + y_0 x)^2}, \frac{\sqrt{d(2ax_0^2 + by_0^2)s(x^2 y_0^2 - y^2 x_0^2)}}{x_0 y + y_0 x}\right) \\ &= P\left(\frac{\eta}{(\xi + \xi_0)^2}, \sqrt{d(2ax_0^2 + by_0^2)s\frac{\xi - \xi_0}{\xi + \xi_0}}\right) \\ &= P\left(\xi, \eta, \sqrt{d(2a\xi_0^2 + b)s\frac{\xi - \xi_0}{\xi + \xi_0}}\right). \end{aligned}$$

Wir wollen nun noch zeigen, daß es sich in allen drei Fällen um Erweiterungen genau vom Grad 2 handelt. Wäre das nicht der Fall, so wäre bei  $x_0 y_0 z_0 \neq 0$  nach (2)

$$\zeta = \frac{s(2a\xi_0^2\xi^2 + b(\xi_0^2 + \xi^2) + 2c + 2\eta_0\eta)}{(\xi + \xi_0)^2}$$

das Quadrat eines Elementes aus  $P(\xi, \eta)$ .  $\zeta$  verhält sich bei  $\xi = \infty$  regulär, wie man erkennt, wenn man Zähler und Nenner durch  $\xi^2$  dividiert und dann  $\xi$  gegen  $\infty$  gehen läßt. Daher ist  $\zeta \cong \frac{a}{p_0^2 p_0'^2}$ , wobei  $p_0$  und  $p_0'$  die beiden in  $\xi + \xi_0$  aufgehenden Primdivisoren sind und  $a$  ein ganzer Divisor ist. — Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{s} (\xi + \xi_0)^2 &= 2a\xi_0^2\xi^2 + b(\xi_0^2 + \xi^2) + 2c + 2\eta_0\eta \\ &= -a(\xi^2 - \xi_0^2)^2 + (\eta + \eta_0)^2. \end{aligned}$$

Ist daher  $p_0'$  der Primdivisor  $-\xi_0, -\eta_0$ , so folgt jetzt

$$\frac{\zeta}{s} (\xi + \xi_0)^2 \equiv 0 \pmod{p_0'^2},$$

also  $\zeta \cong \frac{b}{p_0^2}$  mit ganzem Divisor  $b$ . Wäre daher  $\zeta = \vartheta^2$  mit  $\vartheta \in P(\xi, \eta)$ , so enthielte  $P(\xi, \eta)$  ein Element  $\vartheta$ , das nur eine Nullstelle hat, und wäre daher vom Geschlecht 0, was nicht der Fall ist. — In ganz ähnlicher Weise zeigt man auch bei  $x_0 y_0 z_0 = 0$ , daß  $P(\xi', \eta')$  ein quadratischer Erweiterungskörper von  $P(\xi, \eta)$  ist. — Übrigens kann man genau, wie  $p_0'^2 \mid a$  bewiesen wurde, zeigen, daß  $b = q_0^2$ , wobei  $q_0$  der Primdivisor  $\xi_0, -\eta_0$  ist. Daher ist  $\zeta \sim \frac{q_0^2}{p_0^2}$ , und daraus folgt wegen  $P(\xi', \eta') = P(\xi, \eta, \sqrt{\zeta})$  nach dem Dedekindschen Diskriminantensatz, daß  $P(\xi', \eta')$  unverzweigt über  $P(\xi, \eta)$  ist, d. h. die Relativediskriminante 1 hat. Entsprechende Betrachtungen gelten natürlich auch wieder bei  $x_0 y_0 z_0 = 0$ .

Das in II dargestellte Verfahren bedeutet also für den durch

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = \eta^2$$

definierten Funktionenkörper  $P(\xi, \eta)$  im Falle der Lösbarkeit, d. h. im Falle der Existenz mindestens eines Primdivisors ersten Grades, die Einbettung in einen unverzweigten quadratischen, durch (1) erzeugbaren Erweiterungskörper  $P(\xi', \eta')$ , der ebenfalls mindestens einen Primdivisor ersten Grades besitzt.

Da das oben definierte Element  $\zeta$  von  $P(\xi, \eta)$  vom Grade 2 ist, d. h. zwei Nullstellen und zwei Pole besitzt, ist  $P(\xi, \eta)$  vom Grad 2 über  $P(\zeta)$ . Es muß daher in  $P(\xi, \eta)$  ein Element  $\omega$  geben, für das  $\omega^2$  ein Polynom in  $\zeta$  ist, und zwar ein Polynom vom Grad 3 oder 4, weil  $P(\xi, \eta)$  vom Geschlecht 1 ist. Man könnte nun, um dieses Polynom zu finden, die Bedingungen für seine Koeffizienten aufstellen, die dieses Polynom ein Quadrat in  $P(\xi, \eta)$  werden

lassen. Dieser Weg ist aber recht mühsam, einfacher kommt man folgendermaßen zum Ziel: Zunächst der Fall  $x_0 y_0 z_0 \neq 0$ . Hier ist

$$\eta'^2 = s(ds^2 \xi'^4 - 2bs\xi'^2 + 1),$$

und nach II (9) und II (6)

$$\begin{aligned} \xi'^2 &= \frac{x'^2}{y'^2} = \frac{\delta^2 \lambda^2}{4x_0^2 \beta^2 \mu^2} = \frac{(x y_0 + y x_0)^2}{4x_0^2 y^2} \\ &= \frac{(x y_0 + y x_0)^2}{s(2ax_0^2 x^2 + b(x_0^2 y^2 + y_0^2 x^2) + 2c y_0^2 y^2 + 2x_0 z)} = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

also

$$\eta'^2 = s\left(ds^2 \cdot \frac{1}{\xi^2} - 2bs \cdot \frac{1}{\xi} + 1\right).$$

Es ist nun  $P(\xi', \eta') = P(\xi, \eta, \sqrt{\zeta}) \supseteq P(\xi, \eta, \eta')$ . Weil weiter  $\eta'^2$  in  $P(\xi, \eta)$  liegt, so folgt, daß entweder  $\eta'^2 \overline{(\xi)}$  1 oder  $\eta'^2 \overline{(\xi)} \zeta$  in  $P(\xi, \eta)$  ist. Im ersten Falle wäre  $\eta'^2 = \theta^2$  mit  $\theta \in P(\xi, \eta)$ , also

$$\theta^2 = s\left(ds^2 \frac{1}{\xi^2} - 2bs \cdot \frac{1}{\xi} + 1\right),$$

und daraus würde  $P(\theta, \zeta) = P(\xi, \eta)$  folgen, weil  $P(\xi, \eta)$  vom Grad 2 über  $P(\zeta)$  ist und  $\theta$  nicht in  $P(\zeta)$  liegt.  $P(\theta, \zeta)$  hat aber das Geschlecht 0. Daher bleibt nur die Möglichkeit  $\eta'^2 \overline{(\xi)} \zeta$  in  $P(\xi, \eta)$ ; das heißt aber, es ist

$$(3) \quad s\zeta(ds^2 - 2bs\zeta + \zeta^2) = \omega^2$$

und

$$P(\xi, \eta) = P(\zeta, \omega),$$

und das bedeutet, daß  $\xi, \eta$  und  $\zeta, \omega$  sich birational mit rationalen Koeffizienten ineinander transformieren lassen. Wir wollen dafür auch sagen, die Gleichungen, die  $\xi$  mit  $\eta$  und  $\zeta$  mit  $\omega$  verbinden, lassen sich birational ineinander transformieren. Zum gleichen Ergebnis, insbesondere zu derselben Gleichung (3) kommt man bei  $x_0 y_0 z_0 = 0$ . — Wir können nun leicht entscheiden, welche Gleichungen

$$a'\xi'^4 + b'\xi'^2 + c' = \eta'^2$$

birational äquivalent sind der als lösbar vorausgesetzten Gleichung:

Satz 1. Die der lösbaren Gleichung

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = \eta^2$$

birational äquivalenten Gleichungen der hier betrachteten Art sind, falls  $ac$  keine Quadratzahl ist, die lösbaren unter den Gleichungen

$$r(ar^2\xi'^4 + br\xi'^2 + c) = \eta'^2.$$

Ist dagegen  $ac$  eine Quadratzahl, so kommen zu diesen Gleichungen noch die lösaren unter den folgenden Gleichungen hinzu:

$$\begin{aligned} r^2(2\sqrt{ac} + b)\xi'^4 + 2r^2(6\sqrt{ac} - b)\xi'^2 + r(2\sqrt{ac} + b) &= \eta'^2, \\ r^3(-2\sqrt{ac} + b)\xi'^4 + 2r^2(-6\sqrt{ac} - b)\xi'^2 + r(-2\sqrt{ac} + b) &= \eta'^2. \end{aligned}$$

Beweis. Die gegebene Gleichung ist birational äquivalent mit

$$s\zeta(ds^2 - 2bs\zeta + \zeta^2) = \omega^2.$$

Setzen wir

$$\zeta = 4s\left(\tilde{\zeta} + \frac{b}{6}\right), \quad \omega = 4s^2\tilde{\omega},$$

so geht diese Gleichung über in ihre Weierstraßsche Normalform

$$\tilde{\omega}^2 = 4\tilde{\zeta}^3 - g_2\tilde{\zeta} - g_3$$

mit

$$g_2 = ac + \frac{b^2}{12}, \quad g_3 = \frac{abc}{6} - \frac{b^3}{216}.$$

Da die gesuchten Gleichungen

$$a'\xi'^4 + b'\xi'^2 + c' = \eta'^2$$

birational äquivalent der gegebenen sein sollen, müssen sie auch lösbar sein und lassen sich daher birational auf die Form

$$\omega'^2 = 4\zeta'^3 - g_2'\zeta' - g_3'$$

mit

$$g_2' = a'c' + \frac{b'^2}{12}, \quad g_3' = \frac{a'b'c'}{6} - \frac{b'^3}{216}$$

bringen. Nun sind diese beiden Normalformen dann und nur dann birational äquivalent, wenn

$$g_2' = k^4 g_2, \quad g_3' = k^6 g_3 \quad (k \text{ rational, } \neq 0)$$

ist.  $a', b', c'$  müssen daher den Gleichungen genügen

$$\begin{cases} a'c' + \frac{b'^2}{12} = k^4 \left( ac + \frac{b^2}{12} \right), \\ \frac{a'b'c'}{6} - \frac{b'^3}{216} = k^6 \left( \frac{abc}{6} - \frac{b^3}{216} \right). \end{cases}$$

Elimination von  $a'c'$  gibt

$$b'^3 - b'k^4 \left( 9ac + \frac{3b^2}{4} \right) + k^6 \left( 9abc - \frac{b^3}{4} \right) = 0.$$

Dies können wir als Gleichung für  $\frac{b'}{k^2}$  nehmen. Eine Lösung dieser Gleichung

ist  $\frac{b'}{k^2} = b$ ; denn die Ausgangsgleichung ist sich selbst birational äquivalent.

Die beiden anderen Lösungen berechnet man nun leicht zu

$$\frac{b'}{k^2} = \pm 3\sqrt{ac} - \frac{b}{2},$$

und diese Lösungen sind dann und nur dann rational, wenn  $ac$  eine Quadratzahl ist. Für die erste Lösung ergibt sich nun

$$b' = bk^2, \quad a'c' = ack^4,$$

also etwa

$$a' = tak^2, \quad c' = \frac{c}{t}k^2,$$

und für die zweite und dritte Lösung

$$b' = \left( \pm 3\sqrt{ac} - \frac{b}{2} \right) k^2, \quad a'c' = \frac{k^4}{16} (\pm 2\sqrt{ac} + b)^2,$$

also etwa

$$a' = t \frac{k^2}{4} (\pm 2\sqrt{ac} + b), \quad c' = \frac{k^2}{4t} (\pm 2\sqrt{ac} + b).$$

• Die zugehörigen Gleichungen stimmen nun aber im wesentlichen mit den in der Behauptung angeführten überein.

Satz 1 sagt insbesondere aus, daß die lösbaren unter den Gleichungen

$$(4) \quad r(ar^2\xi^4 + br\xi^2 + c) = \eta^2$$

(wobei also wie immer  $a, b, c$  fest sind und  $r$  Parameter ist) untereinander birational äquivalent sind. Eine dieser Gleichungen ist

$$c(ac^2\xi^4 + bc\xi^2 + c) = \eta^2$$

mit der Lösung  $\xi = 0, \eta = c$ , die im wesentlichen mit

$$(5) \quad ac\xi^4 + b\xi^2 + 1 = \eta^2$$

übereinstimmt. Umgekehrt ist natürlich jede der Gleichungen (4), die mit (5) birational äquivalent ist, lösbar. Damit haben wir also erkannt, daß die Frage nach den lösbaren unter den Gleichungen (4) völlig gleichbedeutend mit der Frage nach den der Gleichung (5) birational äquivalenten unter den Gleichungen (4) ist.

Wir haben oben gesehen, daß das in II dargestellte Verfahren für  $P(\xi, \eta)$  die Einbettung in einen unverzweigten quadratischen Erweiterungskörper  $P(\xi', \eta')$  bedeutet, falls  $P(\xi, \eta)$  einen Primdivisor ersten Grades besitzt. Definierende Gleichungen der beiden Körper sind

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = \eta^2$$

und

$$s(ds^2\xi'^4 - 2bs\xi'^2 + 1) = \eta'^2,$$

und  $P(\xi', \eta')$  besitzt ebenfalls einen Primdivisor ersten Grades. Wir können daher  $P(\xi', \eta')$  seinerseits wieder in einen unverzweigten quadratischen Erweiterungskörper  $P(\xi'', \eta'')$  einbetten mit der definierenden Gleichung

$$s'(acs'^2\xi''^4 + bs'\xi''^2 + 1) = \eta''^2$$

(vgl. den Übergang von II (17) zu II (18)). Ersetzen wir  $s'$  durch  $cs'$  und  $\xi''$  durch  $\frac{\xi''}{c}$ , so geht die definierende Gleichung über in

$$s' (as'^2 \xi''^4 + bs' \xi''^2 + c) = \eta''^2,$$

und diese Gleichung können wir nach Satz 1 birational in

$$a\xi'''^4 + b\xi'''^2 + c = \eta'''^2$$

überführen. Damit haben wir also  $P(\xi, \eta)$  in einen isomorphen Körper  $P(\xi''', \eta''')$  eingebettet, der unverzweigt und vom Grad 4 über  $P(\xi, \eta)$  ist; das ist ein Meromorphismus der Norm 4. In der Sprache der elliptischen Funktionen haben wir den Übergang vom ursprünglichen Periodengitter zu dem vor uns, das man durch Verdoppelung aller Perioden erhält.

#### IV.

In  $P(\xi, \eta)$  definieren wir in bekannter Weise eine Addition der Primdivisoren:  $\mathfrak{o}$  sei ein fester Primdivisor ersten Grades,  $C$  eine Divisorenklasse des Grades 0. Es gibt dann nach dem Riemann-Rochschen Satz genau einen Primdivisor  $\mathfrak{p}$  ersten Grades, so daß  $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$  zu  $C$  gehört. Ist nun  $C_1 C_2 = C_3$  und gehört in diesem Sinne  $\mathfrak{p}_i$  zu  $C_i$ , so setzt man  $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3$ . Damit ist also je zwei Lösungen der erzeugenden Gleichung

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = \eta^2$$

eine dritte Lösung als Summe zugeordnet, und die Lösungen bilden bei dieser Summendefinition einen Modul. Um nun den Zusammenhang zwischen zwei Lösungen und ihrer Summe möglichst einfach darstellen zu können, berücksichtigen wir, daß die erzeugende Gleichung birational in die Gleichung

$$\xi^4 + b\xi^2 + ac = \eta^2$$

transformiert werden kann; sie ist nämlich birational äquivalent mit allen lösbaren Gleichungen

$$r(ar^2\xi^4 + br\xi^2 + c) = \eta^2,$$

und hier brauchen wir nur noch  $r = a$  zu nehmen und  $\xi$  durch  $\frac{\xi}{a}$  zu ersetzen.  $P(\xi, \eta)$  denken wir uns also nun von vornherein durch

$$(1) \quad \xi^4 + b\xi^2 + c = \eta^2$$

erzeugt. Entwickeln wir  $\eta$  nach fallenden Potenzen von  $\xi$ , so erhalten wir die beiden Zweige

$$(2) \quad \begin{cases} \eta = \xi^2 \left( 1 + \frac{b}{2} \xi^{-2} + \dots \right), \\ \eta = -\xi^2 \left( 1 + \frac{b}{2} \xi^{-2} + \dots \right). \end{cases}$$

Als Bezugsprimdivisor  $\mathfrak{o}$  nehmen wir den im Nenner von  $\xi$  aufgehenden Primdivisor, der zur ersten Potenzreihe gehört. Den anderen, zur zweiten Potenzreihe gehörigen, nennen wir  $\mathfrak{o}'$ .  $\mathfrak{o}$  und  $\mathfrak{o}'$  sind bezüglich  $P(\xi)$  konjugiert, und ganz allgemein bezeichnen wir den Übergang zum konjugierten bezüglich  $P(\xi)$  durch Hinzufügung eines „‘“.

Was bedeutet nun  $p_1 + p_2 = p_3$  für die zu den  $p_i$  gehörigen Lösungen  $\xi = \xi_i$ ,  $\eta = \eta_i$ ? Nach Definition ist

$$\frac{p_1}{\mathfrak{o}} \frac{p_2}{\mathfrak{o}} \sim \frac{p_3}{\mathfrak{o}},$$

und daraus folgt

$$\frac{p_1 p_2 p'_3}{\mathfrak{o}} \sim p_3 p'_3.$$

Nun ist  $p_3 p'_3$  ein rationaler Divisor 1. Grades, d. h. ein Divisor 1. Grades von  $P(\xi)$ . In  $P(\xi)$  sind aber alle Divisoren 1. Grades miteinander äquivalent, also ist z. B. auch

$$p_3 p'_3 \sim \mathfrak{o} \mathfrak{o}',$$

und das gibt

$$\frac{p_1 p_2 p'_3}{\mathfrak{o}^2 \mathfrak{o}'} \sim 1,$$

oder auch, indem wir zur konjugierten Äquivalenz übergehen,

$$\frac{p'_1 p'_2 p_3}{\mathfrak{o} \mathfrak{o}'^2} \sim 1.$$

Wir haben also bei gegebenen  $p_1, p_2$  ein Element des Körpers  $P(\xi, \eta)$  anzugeben, das ein Multiplum von  $\frac{1}{\mathfrak{o} \mathfrak{o}'^2}$  ist, d. h. das den Divisor  $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{o} \mathfrak{o}'^2}$  mit ganzem  $\mathfrak{a}$  besitzt, und wobei  $p'_1 p'_2$  in  $\mathfrak{a}$  aufgeht. Dann ist  $p_3 = \frac{\mathfrak{a}}{p'_1 p'_2}$ . Nach dem Riemann-Rochschen Satz bilden die Multipla von  $\frac{1}{\mathfrak{o} \mathfrak{o}'^2}$  einen  $P$ -Modul vom Rang 3, d. h. man kann jedes Multiplum als Linearkombination dreier fester unter ihnen mit rationalen Koeffizienten darstellen. Eine solche Basis ist z. B.  $1, \xi, \eta - \xi^2$ ; denn  $1$  hat den Nenner  $1$ ,  $\xi$  hat den Nenner  $\mathfrak{o} \mathfrak{o}'$ , der von  $\xi^2$  ist  $\mathfrak{o}^2 \mathfrak{o}'^2$ , also ist  $\mathfrak{o}^4 \mathfrak{o}'^4$  der Nenner von  $\xi^4$  und damit nach (1) auch von  $\eta^2$ . So laß  $\eta$  den Nenner  $\mathfrak{o}^2 \mathfrak{o}'^2$  hat. Daher ist zunächst  $\eta - \xi^2 \cong \frac{\epsilon}{\mathfrak{o}^2 \mathfrak{o}'^2}$ , wobei  $\epsilon$  ein ganzer Divisor vom Grad 4 ist. Andererseits geht aber  $\mathfrak{o}$  nicht im Nenner von  $\eta - \xi^2$  auf; denn nach (2) besitzt  $\eta - \xi^2$  eine reguläre Potenzreihenentwicklung nach dem Primelement  $\xi^{-1}$  von  $\mathfrak{o}$ . Also hat  $\eta - \xi^2$  höchstens den Nenner  $\mathfrak{o}'^2$ , und somit sind in der Tat  $1, \xi, \eta - \xi^2$  lauter Multipla von  $\frac{1}{\mathfrak{o} \mathfrak{o}'^2}$ , und da sie offenbar linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis aller Multipla von  $\frac{1}{\mathfrak{o} \mathfrak{o}'^2}$ .

Wir erledigen zunächst die Sonderfälle. Ist etwa  $p_1 = 0$ , so sind wir fertig; denn es ist  $0 + p = p$ . Es sei nun  $p_1 = p_2 = 0'$ . Für  $p_3$  gilt dann

$$\frac{0 \cdot p_3}{0'^2} \sim 1.$$

Nun hat, wie wir schon sahen,  $\eta - \xi^2$  höchstens den Nenner  $0'^2$ , also gilt dasselbe für  $\eta - \xi^2 - \frac{b}{2}$ . Der Nenner kann aber nicht vom Grad 1 sein, weil ja sonst  $P(\xi, \eta)$  vom Geschlecht 0 wäre; also ist er genau  $0'^2$ . Nach (2) hat  $\eta - \xi^2 - \frac{b}{2}$  für  $0$  eine frühestens mit  $\xi^{-2}$  beginnende Potenzreihenentwicklung, also geht  $0^2$  im Zähler von  $\eta - \xi^2 - \frac{b}{2}$  auf, und daraus folgt nun, weil dieser Zähler vom gleichen Grade wie der Nenner ist,

$$\eta - \xi^2 - \frac{b}{2} \cong \frac{0^2}{0'^2},$$

also  $\frac{0^2}{0'^2} \sim 1$ . Vergleichen wir das mit  $\frac{0 \cdot p_3}{0'^2} \sim 1$ , so erhalten wir  $p_3 = 0$ , also

$$2 \cdot 0' = 0' + 0' = 0.$$

Der nächste Sonderfall ist:  $p_1$  von  $0$  und  $0'$  verschieden und  $p_2 = 0'$ . Für  $p_3$  haben wir dann

$$\frac{p_1 p_3}{0'^2} \sim 1,$$

und jedes Multiplum von  $\frac{1}{0'^2}$  hat die Form

$$\vartheta = k + l(\xi^2 - \eta)$$

mit rationalen  $k, l$ . Nun soll sein

$$k + l(\xi_1^2 + \eta_1) = 0,$$

also ist

$$\vartheta = l(-\xi_1^2 - \eta_1 + \xi^2 - \eta).$$

Die beiden Nullstellen von  $\vartheta$  sind  $\xi = \pm \xi_1$ ,  $\eta = -\eta_1$ , also gehört

$$p_3 = p_1 + 0'$$

zu  $-\xi_1, -\eta_1$ . Gehen wir von  $\xi, \eta$  zu  $x, y, z$  zurück, so können wir das auch so ausdrücken

$$(3) \quad x_3 = -x_1, \quad y_3 = y_1, \quad z_3 = -z_1,$$

und in dieser Gestalt gilt die Formel offenbar auch noch, wenn  $p_1 = 0$  oder  $0'$  ist.

Nun seien  $p_1$  und  $p_2$  von  $0$  und  $0'$  verschieden, aber es sei  $p_1 = p_2'$ . Dann muß sein

$$\frac{p_1 p_2' p_3}{0 \cdot 0'^2} \sim 1.$$

Nun ist aber, wie schon erwähnt,  $p_2 p'_2 \sim 0 \circ'$ , also  $p_3 = 0'$ , d. h.:

$$p + p' = 0'.$$

Jetzt seien  $p_1$  und  $p_2$  gleich, aber wieder von  $0$  und  $0'$  verschieden. Dann muß sein

$$\frac{p_1^3 p_3}{0 \circ'^2} \sim 1,$$

das heißt, der Nenner von

$$\theta = k + l\xi + m(\xi^2 - \eta)$$

ist durch  $p_1'^2$  teilbar. Nun ist  $\tau = \xi - \xi_1$  Primelement für  $p_1$  und  $p_1'$ , außer wenn  $\eta_1 = 0$  ist. Setzen wir  $\xi = \tau + \xi_1$  in (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta^2 &= c + b\xi_1^2 + 2b\xi_1\tau + \xi_1^4 + 4\xi_1^3\tau + \tau^2(\dots) \\ &= \eta_1^2 + 2(b\xi_1 + 2\xi_1^3)\tau + \dots, \end{aligned}$$

also

$$\eta = \pm \left( \eta_1 + \frac{b\xi_1 + 2\xi_1^3}{\eta_1} \tau + \dots \right),$$

und daraus folgt, weil  $\eta \equiv -\eta_1 \pmod{p_1'}$  ist, für  $p_1'$

$$\eta = -\eta_1 - \frac{b\xi_1 + 2\xi_1^3}{\eta_1} \tau + \dots$$

Danach lautet die Entwicklung von  $\theta$ :

$$\theta = k + l\xi_1 + l\tau + m\xi_1^2 + 2m\xi_1\tau + m\eta_1 + m\frac{b\xi_1}{\eta_1}\tau + 2m\frac{\xi_1^3}{\eta_1}\tau + \dots$$

Nun wird verlangt  $\theta \equiv 0 \pmod{p_1'^2}$ , also

$$\begin{cases} k + l\xi_1 + m\xi_1^2 + m\eta_1 = 0, \\ l + 2m\xi_1 + m\frac{b\xi_1}{\eta_1} + 2m\frac{\xi_1^3}{\eta_1} = 0. \end{cases}$$

Das gibt

$$\begin{cases} l = m \left( -2\xi_1 - \frac{b\xi_1}{\eta_1} - \frac{2\xi_1^3}{\eta_1} \right), \\ k = m \left( \xi_1^2 + \frac{b\xi_1^2}{\eta_1} + \frac{2\xi_1^4}{\eta_1} - \eta_1 \right). \end{cases}$$

$p_3$  ist der dritte im Nenner von  $\theta$  aufgehende Primdivisor, also ist

$$\eta_3 = \xi_3^2 + \frac{l}{m}\xi_3 + \frac{k}{m}.$$

Setzen wir das in (1) ein, so erhalten wir

$$\xi_3^4 + b\xi_3^2 + c = \xi_3^4 + \frac{l^2}{m^2}\xi_3^2 + \frac{k^2}{m^2} + \frac{2l}{m}\xi_3^3 + \frac{2k}{m}\xi_3^2 + \frac{2kl}{m^2}\xi_3,$$

also

$$\frac{2l}{m}\xi_3^3 + \left( \frac{l^2}{m^2} + \frac{2k}{m} - b \right) \xi_3^2 + \frac{2kl}{m^2}\xi_3 + \frac{k^2 - cm^2}{m^2} = 0.$$

Das ist eine kubische Gleichung für  $\xi_3$ ; weil aber  $p_1'^2 p_3$  im Nenner von  $\theta$  aufgeht, sind  $\xi_1$ , doppelt gezählt, und  $\xi_3$  ihre Lösungen, also, wenn auch noch  $\xi_1 \neq 0$ ,

$$\xi_3 = \frac{cm^2 - k^2}{m \cdot 2l \xi_1^2} = \frac{c - \left( \xi_1^2 + \frac{b \xi_1^2}{\eta_1} + \frac{2 \xi_1^2}{\eta_1} - \eta_1 \right)^2}{-2 \xi_1^2 \left( 2 \xi_1 + b \frac{\xi_1}{\eta_1} + \frac{2 \xi_1^2}{\eta_1} \right)}.$$

Eine einfache Rechnung ergibt nun

$$\begin{cases} \xi_3 = \frac{\xi_1^2 - c}{2 \xi_1 \eta_1}, \\ \eta_3 = \frac{\eta_1^2 - d \xi_1^2}{4 \xi_1^2 \eta_1^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen können wir auch so schreiben:

$$(4) \quad \begin{cases} x_3 = x_1^4 - c y_1^4, \\ y_3 = 2 x_1 y_1 z_1, \\ z_3 = z_1^4 - d x_1^4 y_1^4 \end{cases}$$

mit  $\frac{x_i}{y_i} = \xi_i$ ,  $\frac{x_i}{y_i^2} = \eta_i$ . In dieser Form gelten sie, wie man sich leicht überzeugt, auch für die bisher ausgeschlossenen Fälle mit  $x_1 y_1 z_1 = 0$ . Die Gleichungen (4) liefern also stets die „Verdoppelung“  $p_3 = p_1 + p_1 = 2 p_1$  für jede Lösung  $p_1$ .

Schließlich kommen wir zum allgemeinen Fall, wo  $p_1$  und  $p_2$  voneinander und von  $o$  und  $o'$  verschieden und nicht konjugiert sind. Setzen wir wieder

$$\theta = k + l \xi + m (\xi^2 - \eta),$$

so haben wir  $k, l, m$  so zu bestimmen, daß  $p_1'$  und  $p_2'$  Nullstellen von  $\theta$  sind, daß also

$$(5) \quad \begin{cases} k + l \xi_1 + m (\xi_1^2 + \eta_1) = 0, \\ k + l \xi_2 + m (\xi_2^2 + \eta_2) = 0. \end{cases}$$

Dabei ist  $m \neq 0$ ; denn sonst wäre  $\xi_1 = \xi_2$ , also  $p_1 = p_2$  oder  $p_2'$ . Die dritte Nullstelle von  $\theta$  ist dann  $p_3$ , also

$$k + l \xi_3 + m (\xi_3^2 - \eta_3) = 0.$$

Setzen wir den hieraus sich ergebenden Wert

$$(6) \quad \eta_3 = \xi_3^2 + \frac{l}{m} \xi_3 + \frac{k}{m}$$

in (1) ein, so erhalten wir

$$\xi_3^4 + b \xi_3^2 + c = \xi_3^4 + \frac{l^2}{m^2} \xi_3^2 + \frac{k^2}{m^2} + \frac{2l}{m} \xi_3^3 + \frac{2k}{m} \xi_3^2 + \frac{2kl}{m^2} \xi_3,$$

also

$$\xi_3^3 \cdot \frac{2l}{m} + \xi_3^2 \left( \frac{l^2}{m^2} + \frac{2k}{m} - b \right) + \xi_3 \cdot \frac{2lk}{m^2} + \frac{k^2 - cm^2}{m^2} = 0.$$

Das ist wieder eine kubische Gleichung für  $\xi_3$ . Zwei ihrer Wurzeln sind  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , weil der Nenner von  $\theta$  durch  $p'_1 p'_2$  teilbar ist, und daher ist  $\xi_3$  die dritte Wurzel:

$$\xi_3 = \frac{-k^2 + c m^2}{2lm \xi_1 \xi_2}.$$

Nun genügen  $k, l, m$  den Gleichungen (5); eine Lösung davon ist

$$\begin{cases} k = \xi_1 \xi_2^2 - \xi_2 \xi_1^2 + \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1, \\ l = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \eta_1 - \eta_2, \\ m = \xi_2 - \xi_1. \end{cases}$$

Nach einfacher Rechnung erhält man jetzt

$$\xi_3 = \frac{(\xi_1^2 - \xi_1 \xi_2 + \eta_1)(\xi_2^2 - \xi_1 \xi_2 + \eta_2) - \xi_1^2 \xi_2^2 - b \xi_1 \xi_2 - c}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \eta_1 - \eta_2)}.$$

Wir gehen wieder zu  $x, y, z$  zurück:

$$(7) \quad \begin{cases} x_3 = (x_1^2 y_2 - x_1 x_2 y_1 + y_2 z_1)(x_2^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 + y_1 z_2) - y_1 y_2 (x_1^2 x_2^2 \\ \quad \quad \quad + b x_1 x_2 y_1 y_2 + c y_1^2 y_2^2), \\ y_3 = (x_2 y_1 - x_1 y_2)(x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 + y_2^2 z_1 - y_1^2 z_2). \end{cases}$$

Man könnte nun  $z_3 = \eta_3 y_3^2$  nach (6) berechnen, was aber etwas mühsam ist. Für später brauchen wir nur den Ausdruck für  $z_3 - x_3^2$ , und dieser ergibt sich nach einfacher Rechnung zu

$$(8) \quad z_3 - x_3^2 = (x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 + y_2^2 z_1 - y_1^2 z_2)^2 (-x_1^2 x_2^2 - b x_1 x_2 y_1 y_2 - c y_1^2 y_2^2 + x_1 x_2).$$

Bei der Ableitung dieser Formeln hatten wir vorausgesetzt, daß  $p_1$  und  $p_2$  voneinander und von  $o$  und  $o'$  verschieden und nicht konjugiert sind. Wie man sich aber nachträglich leicht überzeugt, gelten die Formeln auch noch, wenn nur  $p_1$  und  $p_2$  voneinander und von  $o'$  verschieden sind.

Wir können das ganze *Additionstheorem* folgendermaßen zusammenfassen:

1. Sind  $p_1$  und  $p_2$  voneinander und von  $o'$  verschieden, so wird  $p_3 = p_1 + p_2$  durch (7) und (8) gegeben.

2. Die Verdoppelung  $p_3 = 2 p_1$  wird immer durch (4) gegeben.

3.  $p_3 = p_1 + o'$  wird stets durch (3) gegeben.

Es sei noch bemerkt, daß man das Additionstheorem folgendermaßen geometrisch beschreiben kann: Wir betrachten

$$\xi^4 + b \xi^2 + c = \eta^2$$

als Kurve in der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene. Die uneigentliche Gerade trifft die Kurve nur in einem einzigen Punkt, und zwar ist dieser ein Berührungsknoten mit der uneigentlichen Geraden als Tangente, d. h. die beiden zu  $o$  und  $o'$  gehörigen Zweige berühren sich in dem einzigen uneigentlichen Punkte der Kurve und

die uneigentliche Gerade ist die gemeinsame Tangente. Nun haben alle zu  $\eta = \xi^2$  parallelen Parabeln (unter die wir auch die aus der uneigentlichen Geraden und einer zur  $\eta$ -Achse parallelen Geraden bestehenden Kegelschnitte sowie die doppelt gezählte uneigentliche Gerade aufnehmen müssen) mit dem Zweig  $o'$  einen doppelten und mit dem Zweig  $o$  einen dreifachen Schnittpunkt. Sind dann  $p_1, p_2, p_3$  die drei übrigen Schnittpunkte der Parabel mit der Kurve, so ist  $p_1 + p_2 + p_3 = o$ . Addieren wir auf beiden Seiten  $p'_1 + p'_2$ , so erhalten wir nach (3) und wegen  $2o' = o$

$$p_3 = p'_1 + p'_2.$$

Will man also

$$q_3 = q_1 + q_2$$

konstruieren, so lege man, wenn  $q_i$  die Punkte  $\xi_i, \eta_i$  der Kurve sind, durch die zu  $q_1$  und  $q_2$  konjugierten Punkte  $\xi_1, -\eta_1$  und  $\xi_2, -\eta_2$  die zu  $\eta = \xi^2$  parallele Parabel. Die acht Schnittpunkte sind dann  $o, o, o, o', q'_1, q'_2$  und der gesuchte Punkt  $q_3$ . Ganz ähnlich erhält man allgemeiner eine Addition der Punkte auf der Kurve

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = \eta^2,$$

bei der die Summe zweier rationaler Punkte wieder ein rationaler Punkt ist, wenn  $o$  ein beliebiger rationaler Punkt der Kurve ist. Um  $q_3 = q_1 + q_2$  zu bestimmen, lege man durch  $o, q'_1, q'_2$  die Parabel, deren Achse parallel zur  $\eta$ -Achse ist. Sie schneidet die Kurve in ihrem Berührungsknoten vierfach, und der letzte übrigbleibende Schnittpunkt ist dann  $q_3$ .

Für später wollen wir jetzt feststellen, wie viele Lösungen

$$2p = o$$

hat. Nach (4) ist dann und nur dann  $2p = o$ , wenn

$$\begin{cases} xyz = 0, \\ (x^4 - cy^4)^2 = x^4 - dx^4y^4. \end{cases}$$

Ist zunächst  $y = 0$ , so ist  $x^4 = z^2$ . Für die dazugehörigen Lösungen  $p = o$  und  $p = o'$  ist in der Tat  $2p = o$ . Ist weiter  $x = 0$ , so ist  $cy^4 = z^2$ . Das ist nur lösbar, wenn  $c$  eine Quadratzahl ist, und die beiden Lösungen sind dann  $x = 0, y = 1, z = \pm \sqrt{c}$ , und für diese beiden Lösungen gilt ebenfalls, wie man sich leicht überzeugt,  $2p = 2p' = o$ . Da nun bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper  $2p = o$  genau vier Lösungen hat, so folgt jetzt:  $p = 2o$  hat vier Lösungen, wenn  $c$  eine Quadratzahl ist, und sonst nur zwei.

## V.

Wie wir in II gesehen haben, entspricht dem Primdivisor  $p$ , der zur Lösung  $x, y, z$  gehört, eine Zahl  $s$  vermöge der Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} sx^2 = u^2 - 2buv + dv^2 \\ sy^2 = 4uv \\ sz = u^2 - dv^2. \end{cases}$$

[In II (10) haben wir nämlich  $a = 1$  zu setzen und können  $x = 1, y = 0, z = 1$  nehmen.]  $s$  ist bis auf einen quadratischen Faktor durch  $v$  eindeutig bestimmt. Wir zeigen nun, daß diese Zuordnung ein Homomorphismus ist:

**Satz 2.** Ist  $p_1 + p_2 = p_3$  und gehört  $s_i$  zu  $p_i$ , so ist  $s_1 s_2 \overline{(2)} s_3$ , das heißt  $s_1 s_2$  und  $s_3$  unterscheiden sich nur um einen quadratischen, von Null verschiedenen Faktor.

**Beweis.** Nach (1) ist

$$(2) \quad s_i (2x_i^2 + by_i^2 - 2z_i) = 4dv_i^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ist zunächst  $p_1 = 0$ , so ist  $v_1 = 0, s_1 x_1^2 = u_1^2$ , also  $s_1 \overline{(2)} 1$ . Für diesen Fall wie für  $p_2 = 0$  ist damit der Beweis wegen  $p_2 = p_3$  schon erbracht. Nun sei  $p_3 = 0$ , also  $p_1 + p_2 = 0$ . Daraus folgt  $p_2 = p'_1 + o'$ .  $p'_1$  ist die Lösung  $x_1, y_1, -z_1$ , also ist  $p'_1 + o'$  die Lösung  $-x_1, y_1, z_1$ . Daher ist  $x_2 = -x_1, y_2 = y_1, z_2 = z_1$ , und daraus folgt nach (2)  $s_1 = s_2$ , also  $s_1 s_2 \overline{(2)} 1 \overline{(2)} s_3$ .

Sind jetzt alle  $p_i$  von 0 verschieden, so ist  $v_i \neq 0$ . Nach (2), IV (7) und IV (8) ist nun, wenn  $p_1$  und  $p_2$  voneinander und von  $o'$  verschieden sind,

$$\begin{aligned} \frac{4dv_1^2}{s_1} &= 2x_2^2 + by_2^2 - 2z_2 \\ &= (x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 + y_2^2 z_1 - y_1^2 z_2)^2 (2x_1^2 x_2^2 + 2bx_1 x_2 y_1 y_2 \\ &\quad + 2cy_1^2 y_2^2 - 2z_1 z_2 + b(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2) \\ &\stackrel{(2)}{=} 2x_1^2 x_2^2 + bx_1^2 y_2^2 + bx_2^2 y_1^2 + 2cy_1^2 y_2^2 - 2z_1 z_2 \\ &= \frac{1}{s_1 s_2} (2(u_1^2 - 2bu_1 v_1 + dv_1^2)(u_2^2 - 2bu_2 v_2 + dv_2^2) \\ &\quad + b(u_1^2 - 2bu_1 v_1 + dv_1^2) \cdot 4u_2 v_2 \\ &\quad + b(u_2^2 - 2bu_2 v_2 + dv_2^2) \cdot 4u_1 v_1 \\ &\quad + 2c \cdot 4u_1 v_1 \cdot 4u_2 v_2 - 2(u_1^2 - dv_1^2)(u_2^2 - dv_2^2)) \\ &= \frac{4d}{s_1 s_2} (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &\stackrel{(2)}{=} d s_1 s_2. \end{aligned}$$

also  $s_1 s_2 \overline{(2)} s_3$ .

Ist weiter  $p_1 = p_2$ , aber  $p_1 + p_2 \neq 0$ , so haben wir zu zeigen  $s_3 \equiv 1$ .  
Nach (2) und IV (4) ist

$$\begin{aligned} s_3 &\equiv d(2x_3^2 + by_3^2 - 2z_3) \\ &= d(2(x_1^4 - cy_1^4)^2 + 4bx_1^2y_1^2z_1^2 - 2z_1^4 + 2dx_1^4y_1^4) \\ &= 4d^2x_1^4y_1^4 \\ &\equiv 1. \end{aligned}$$

Schließlich haben wir die Behauptung noch für  $p_1 = 0'$  zu beweisen. Hier ist nach (2)

$$s_1 \equiv d(2+2) \equiv d,$$

also haben wir  $ds_2 \equiv s_3$  zu zeigen. Nun ist nach (2)

$$\begin{cases} s_2 \equiv d(2x_2^2 + by_2^2 - 2z_2), \\ s_3 \equiv d(2x_3^2 + by_3^2 - 2z_3). \end{cases}$$

Nach IV (3) ist  $x_3 = -x_2$ ,  $y_3 = y_2$ ,  $z_3 = -z_2$ , also

$$\begin{aligned} s_2 s_3 &\equiv d(2x_2^2 + by_2^2 - 2z_2)(2x_2^2 + by_2^2 + 2z_2) \\ &= dy_2^4 \\ &\equiv d, \end{aligned}$$

was noch zu beweisen war.

**Satz 3.** Die Quadratklassen derjenigen  $r$ , für die

$$r(r^2x^4 + brx^2y^2 + cy^4) = z^2$$

lösbar ist, bilden eine abelsche Gruppe vom Typ  $(2, 2, \dots, 2)$  und von endlicher Ordnung  $2^{n_1}$ .

**Beweis.** Wir gehen aus von der lösbaren Gleichung

$$x^4 - 2bx^2y^2 + dy^4 = z^2.$$

Ihre Diskriminante ist  $4b^2 - 4d = 16c$ . Analog zu (1) haben wir dann

$$\begin{cases} tx^2 = u^2 + 4buv + 16cv^2 \\ ty^2 = 4uv \\ tz = u^2 - 16cv^2. \end{cases}$$

Satz 2 können wir nun auch so aussprechen: Die Quadratklassen der  $t$ , für die dieses Gleichungssystem lösbar ist, bilden eine abelsche Gruppe, deren Elemente alle die Ordnung 2 haben. Andererseits stimmen nach II diese  $t$  überein mit den  $t$ , für die die Gleichung

$$t(16ct^2x'^4 + 4bt^2x'^2y'^2 + y'^4) = z'^2$$

lösbar ist. Daraus folgt aber die Behauptung, wenn wir noch  $2x' = y$ ,  $y' = x$ ,  $z' = z$  und  $t = r$  setzen und berücksichtigen, daß, wie in I gezeigt wurde, diese Gleichung nur für endlich viele Quadratklassen von  $r$  lösbar ist.

Wir führen jetzt das in II geschilderte Verfahren, angewandt auf die Gleichung

$$x^4 + b x^2 y^2 + c y^4 = z^2,$$

der besseren Übersicht wegen hier noch einmal kurz durch, wobei wir aber jetzt nicht mehr auf Ganzzahligkeit, sondern nur noch auf Rationalität Wert legen. Als Ausgangslösung nehmen wir  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 1$  und kommen so zu

$$(3) \quad \begin{cases} s x^2 = u^2 - 2 b u v + d v^2 \\ s y^2 = 4 u v \\ s z = u^2 - d v^2 \end{cases},$$

wobei man festsetzen kann, daß die hier auftretenden  $s$  lauter verschiedenen Quadratklassen angehören. Weiter ist dann

$$(4) \quad \begin{cases} s(2x^2 + by^2 + 2z) = 4u^2 \\ s(2x^2 + by^2 - 2z) = 4dv^2. \end{cases}$$

Den Quadratkeren von  $s$  kann man also aus einer der beiden Gleichungen

$$\begin{cases} s \overline{\overline{2x^2 + by^2 + 2z}}, \\ ds \overline{\overline{2x^2 + by^2 - 2z}} \end{cases}$$

bestimmen. Aus der zweiten Gleichung von (3) folgt nun

$$(5) \quad \begin{cases} s = \alpha\beta, & u = \alpha\kappa^2, \\ y = 2\kappa\lambda, & v = \beta\lambda^2. \end{cases}$$

Das wird in die erste Gleichung von (3) eingesetzt:

$$sx^2 = \alpha^2 \kappa^4 - 2bs\kappa^2 \lambda^2 + d\beta^2 \lambda^4.$$

Setzen wir nun

$$(6) \quad \kappa = x', \quad \lambda = \frac{y'}{\beta}, \quad x = \frac{z'}{s\beta},$$

so erhalten wir

$$s^3 x'^4 - 2bs^2 x'^2 y'^2 + ds y'^4 = z'^2.$$

Es sei nun  $x'_0, y'_0, z'_0$  eine feste Lösung dieser Gleichung. (Diese Lösung hängt natürlich von  $s$  ab; ist speziell  $s \overline{\overline{1}}$ , so können wir  $s = 1$  festsetzen und  $x'_0 = 1$ ,  $y'_0 = 0$ ,  $z'_0 = 1$  nehmen.) Dann gilt, falls  $z'_0 \neq 0$ ,

$$(7) \quad \begin{cases} s' x'^2 = x_0'^2 u'^2 + (-bsx_0'^2 + dy_0'^2) u'v' + cs^2 x_0'^2 v'^2, \\ s' y'^2 = y_0'^2 u'^2 + (-s^2 x_0'^2 + bsy_0'^2) u'v' + cs^2 y_0'^2 v'^2, \\ s' z' = z_0' u'^2 - cs^2 z_0' v'^2, \end{cases}$$

und, falls  $z'_0 = 0$ , was höchstens bei  $c \overline{\overline{1}}$  möglich ist,

$$(7_0) \quad \begin{cases} s' x'^2 = x_0'^2 u'^2 + (sx_0'^2 - 2by_0'^2) v'^2, \\ s' y'^2 = y_0'^2 u'^2 - sy_0'^2 v'^2, \\ s' z' = 4\sqrt{cs} y_0'^2 u'v'. \end{cases}$$

Daraus folgt bei  $z'_0 \neq 0$

$$(8) \quad \begin{cases} s' (s^3 x_0'^2 x'^2 - bs^2 y_0'^2 x'^2 - bs^2 x_0'^2 y'^2 + ds y_0'^2 y'^2 + z'_0 z') = 2 z_0'^2 u'^2, \\ s' (s^3 x_0'^2 x'^2 - bs^2 y_0'^2 x'^2 - bs^2 x_0'^2 y'^2 + ds y_0'^2 y'^2 - z'_0 z') = 2c s^2 z_0'^2 v'^2, \end{cases}$$

und bei  $z'_0 = 0$

$$(8_0) \quad \begin{cases} s' (s y_0'^2 x'^2 + s x_0'^2 y'^2 - 2 b y_0'^2 y'^2) = 2 y_0'^2 (s x_0'^2 - b y_0'^2) u'^2, \\ s' (y_0'^2 x'^2 - x_0'^2 y'^2) = 2 y_0'^2 (s x_0'^2 - b y_0'^2) v'^2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben also an, wie sich der Quadratkern von  $s'$  aus  $x', y', z'$  bestimmt. Jedoch ist er, wie wir gleich sehen werden, durch  $x, y, z$  im allgemeinen noch nicht eindeutig bestimmt, und zwar ist die Vieldeutigkeit die: An Stelle der Quadratklasse von  $s'$  kann auch die von  $cs'$  treten.

Beweis. Nach (6) ist

$$x' = \kappa, \quad y' = \beta \lambda, \quad z' = s \beta x,$$

also ist nach (5) und (4) für  $y' \neq 0$

$$\begin{cases} \xi' = \frac{x'}{y'} = \frac{\kappa}{\beta \lambda} = \frac{y}{2v} = \frac{y}{\sqrt{\frac{s}{d}(2x^2 + by^2 - 2z)}}, \\ \eta' = \frac{z'}{y'^2} = \frac{s x}{\beta \lambda^2} = \frac{s x}{v} = \frac{2 s x}{\sqrt{\frac{s}{d}(2x^2 + by^2 - 2z)}}, \end{cases}$$

wobei für die Wurzel beide Male das gleiche Vorzeichen zu nehmen ist. Daraus erkennt man, daß auch, wenn  $x, y, z$  durch  $tx, ty, tz$  ersetzt werden,  $\xi'$  und  $\eta'$  entweder ungeändert bleiben oder gleichzeitig das Vorzeichen wechseln. Das gleiche gilt auch, wie man sich ohne weiteres überzeugt, wenn  $y' = 0$  ist. Jede Lösung  $x, y, z$  führt also auf die beiden verschiedenen Lösungen  $x', y', z'$  und  $-x', y', -z'$ . Nach (8) bedeutet der Übergang von  $x', y', z'$  zu  $-x', y', -z'$  den Übergang von der Quadratklasse von  $s'$  zu der von  $cs'$ . Dasselbe gilt bei (8<sub>0</sub>), weil in diesem Falle  $c \overline{\overline{s}}$  1 ist.

Satz 4. Ist  $p_1 + p_2 = p_3$  und ist  $s_1 = s_2$ , so gilt, wenn  $s'_i$  zu  $p_i$  gehört,  $s'_1 s'_2 \overline{\overline{s}}_3$  oder  $cs'_3$ .

Beweis. Nach Satz 2 ist  $s_3 \overline{\overline{s}}_1 s_2 = s_1^2 \overline{\overline{s}}_1$ , also nach unserer Festsetzung  $s_3 = 1$ . Daher ist nach (8) und wegen der Zweideutigkeit von  $s'$

$$s'_3 \overline{\overline{s}}_3 2 (x_3'^2 - b y_3'^2 \pm z_3')$$

oder genauer

$$\begin{cases} s'_3 (x_3'^2 - b y_3'^2 + z_3') = 2 u_3'^2, \\ s'_3 (x_3'^2 - b y_3'^2 - z_3') = 2 c v_3'^2. \end{cases}$$

Nach (6) und (5) ist

$$x_3'^2 = \beta_3 u_3, \quad y_3'^2 = \beta_3 v_3, \quad z_3' = \beta_3 x_3,$$

also

$$(9) \quad \begin{cases} s'_3 \beta_3 (u_3 - b v_3 + x_3) = 2 u'_3{}^2, \\ s'_3 \beta_3 (u_3 - b v_3 - x_3) = 2 c v'_3{}^2. \end{cases}$$

Wir beweisen nun die Behauptung der Reihe nach für die drei Fälle aus dem Additionstheorem und haben dabei gegebenenfalls noch zu unterscheiden, ob  $z'_0 = 0$  oder  $z'_0 \neq 0$  ist.

Wir beginnen mit dem allgemeinsten Falle, wo also  $p_1$  und  $p_2$  voneinander und von  $\sigma'$  verschieden sind. Nach (4) ist

$$4 d v_3^2 = 2 x_3^2 + b y_3^2 - 2 z_3.$$

Nach IV (7) und IV (8) erhalten wir

$$4 d v_3^2 = (x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 + y_2^2 z_1 - y_1^2 z_2)^2 (2 x_1^2 x_2^2 + 2 c y_1^2 y_2^2 - 2 z_1 z_2 + b x_2^2 y_1^2 + b x_1^2 y_2^2).$$

Nun ist

$$\begin{cases} s x_i^2 = u_i^2 - 2 b u_i v_i + d v_i^2 \\ s y_i^2 = 4 u_i v_i \\ s z_i = u_i^2 - d v_i^2 \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

Jetzt erhalten wir nach leichter Rechnung

$$v_3 = \frac{8}{s^3} \cdot u_1 u_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2.$$

Nach (3) und IV (7) ergibt sich dann weiter

$$u_3 = \frac{2}{s} u_1 u_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Für  $u_1 u_2 = 0$  ist die Behauptung ohne weiteres direkt zu beweisen. Ist dagegen  $u_1 u_2 \neq 0$ , so sind, was im folgenden des öfteren stillschweigend gebraucht wird,  $u_3$  und  $v_3$  nicht beide Null; denn sonst wären, wie man sofort sieht,  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  nicht wesentlich voneinander verschieden.

Nach (5) und (6) ist

$$\left\{ \begin{aligned} u_i &= \frac{s}{\beta_i} x_i'^2, & v_i &= \frac{y_i'^2}{\beta_i} \\ x_i &= \frac{z_i'}{s \beta_i}, & y_i &= \frac{2 x_i' y_i'}{\beta_i} \end{aligned} \right. \quad (i = 1, 2),$$

also

$$(10) \quad \begin{cases} u_3 = \frac{8}{s \beta_1^2 \beta_2^2} x_1'^2 x_2'^2 (x_1' y_1' z_2' - x_2' y_2' z_1')^2, \\ v_3 = \frac{8 s}{\beta_1^2 \beta_2^2} x_1'^2 x_2'^2 (x_1'^2 y_2'^2 - x_2'^2 y_1'^2)^2. \end{cases}$$

Drücken wir auch noch  $x_3$  durch  $x_i', y_i', z_i'$  aus, indem wir in IV (7) die obigen Ausdrücke für  $x_i, y_i$  einsetzen sowie folgenden Ausdruck für  $z_i$

$$z_i = \frac{1}{s} (u_i^2 - d v_i^2) = \frac{1}{s \beta_i^2} (s^2 x_i'^4 - d y_i'^4) \quad (i = 1, 2),$$

so erhalten wir

$$x_3 = \frac{8x_1'^3 x_2'^3}{s\beta_1^3 \beta_2^3} (2x_1' x_2' y_1' y_2' (s^2 x_1'^2 x_2'^2 - b s^2 x_1'^2 y_2'^2 - b s^2 x_2'^2 y_1'^2 + d s y_1'^2 y_2'^2) - z_1' z_2' (x_1'^2 y_2'^2 + x_2'^2 y_1'^2)).$$

Jetzt folgt

$$\begin{cases} u_3 - b v_3 + x_3 = \frac{8x_1'^3 x_2'^3}{s\beta_1^3 \beta_2^3} (x_1' y_2' + x_2' y_1')^2 (s^2 x_1'^2 x_2'^2 - b s^2 x_1'^2 y_2'^2 - b s^2 x_2'^2 y_1'^2 + d s y_1'^2 y_2'^2 - z_1' z_2'), \\ u_3 - b v_3 - x_3 = \frac{8x_1'^3 x_2'^3}{s\beta_1^3 \beta_2^3} (x_1' y_2' - x_2' y_1')^2 (s^2 x_1'^2 x_2'^2 - b s^2 x_1'^2 y_2'^2 - b s^2 x_2'^2 y_1'^2 + d s y_1'^2 y_2'^2 + z_1' z_2'). \end{cases}$$

Nun setzen wir die Ausdrücke für  $x_1'^2$ ,  $y_1'^2$ ,  $z_1'$  aus (7) bzw. (7<sub>0</sub>) hier ein. Nach einfacher Rechnung erhält man bei  $z_0' \neq 0$

$$(11) \quad \begin{cases} u_3 - b v_3 + x_3 = \frac{8x_1'^3 x_2'^3}{s\beta_1^3 \beta_2^3} (x_1' y_2' + x_2' y_1')^2 \cdot \frac{2cs^2 z_0'^2}{s_1' s_2'} (u_1' v_2' - u_2' v_1')^2, \\ u_3 - b v_3 - x_3 = \frac{8x_1'^3 x_2'^3}{s\beta_1^3 \beta_2^3} (x_1' y_2' - x_2' y_1')^2 \cdot \frac{2z_0'^2}{s_1' s_2'} (u_1' u_2' - cs^2 v_1' v_2')^2, \end{cases}$$

und bei  $z_0' = 0$

$$(11_0) \quad u_3 - b v_3 \pm x_3 = \frac{8x_1'^3 x_2'^3}{s\beta_1^3 \beta_2^3} (x_1' y_2' \pm x_2' y_1')^2 \cdot \frac{8cs^2 y_0'^4}{s_1' s_2'} (u_1' v_2' \mp u_2' v_1')^2.$$

Die beiden Zahlen  $u_3 - b v_3 \pm x_3$  sind nicht beide gleichzeitig Null, weil sonst  $x_3 = 0$  und  $u_3 = b v_3$ , also

$$x_3^2 = b^2 v_3^2 - 2 b^2 v_3^2 + d v_3^2 = -4 c v_3^2$$

und somit auch noch  $u_3 = v_3 = 0$  wäre. Wegen

$$s_3' \overline{(2)} 2 \beta_3 (u_3 - b v_3 \pm x_3)$$

folgt also jetzt nach (11) bzw. (11<sub>0</sub>)

$$(12) \quad s_3' \overline{(2)} 2 \beta_3 s \beta_1 \beta_2 s_1' s_2' \quad \text{oder} \quad 2 \beta_3 c s \beta_1 \beta_2 s_1' s_2'.$$

Nun ist nach (10)

$$u_3 = 2 s \beta_1 \beta_2 A^2, \quad v_3 = 2 s \beta_1 \beta_2 B^2.$$

Andererseits ist nach (5)

$$u_3 = \alpha_3 \kappa_3^2 = \beta_3 \left( \frac{\kappa_3}{\beta_3} \right)^2, \quad v = \beta_3 \lambda_3^2.$$

Daraus folgt nun aber  $\beta_3 \overline{(2)} 2 s \beta_1 \beta_2$ , und damit ist nach (12) die Behauptung bewiesen:

$$s_3' \overline{(2)} s_1' s_2' \quad \text{oder} \quad c s_1' s_2'.$$

Wir kommen nun zur Verdoppelung  $p_3 = 2 p_1$ . Zu zeigen haben wir hier  $s'_3 \overline{(2)}$  1 oder  $c$ . Es ist

$$\begin{cases} x_3 = x_1^4 - c y_1^4, \\ y_3 = 2 x_1 y_1 z_1, \\ z_3 = z_1^4 - d x_1^4 y_1^4, \end{cases}$$

also ist

$$\begin{aligned} 4 d v_3^2 &= 2 x_3^2 + b y_3^2 - 2 z_3 \\ &= 2 (x_1^4 - c y_1^4)^2 + b (2 x_1 y_1 z_1)^2 - 2 (z_1^4 - d x_1^4 y_1^4) \\ &= 4 d x_1^4 y_1^4, \end{aligned}$$

also etwa

$$v_3 = x_1^2 y_1^2,$$

und wegen  $y_3^2 = 4 u_3 v_3$

$$u_3 = z_1^2.$$

Nach (5) ist daher etwa

$$\begin{cases} \alpha_3 = 1, & \kappa_3 = z_1, \\ \beta_3 = 1, & \lambda_3 = x_1 y_1 \end{cases}$$

und nach (6)

$$x'_3 = z_1, \quad y'_3 = x_1 y_1, \quad z'_3 = x_1^4 - c y_1^4.$$

Daher ist nach (8)

$$\begin{aligned} s'_3 \overline{(2)} &= 2 (x'_3{}^2 - b y'_3{}^2 \pm z'_3) \\ &= 4 x_1^4 \text{ oder } 4 c y_1^4, \end{aligned}$$

also in der Tat  $s'_3 \overline{(2)}$  1 oder  $c$ .

Beim dritten Falle des Additionstheorems handelt es sich um  $p + 0'$ , und hier macht die Verifikation der Behauptung nur eine kleine Rechnung, die wir hier weglassen wollen. Damit ist dann Satz 4 bewiesen.

**Satz 5.** *Dann und nur dann ist  $p = 2 q$ , wenn für die zu  $p$  gehörigen Zahlen  $s$  und  $s'$  gilt  $s \overline{(2)}$  1 und  $s' \overline{(2)}$  1 oder  $c$ .*

**Beweis.** Ist  $p = 2 q$ , so folgt die Behauptung unmittelbar aus den Sätzen 2 und 4.

Zum Beweis der Umkehrung können wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen  $s = 1$  und  $s' = 1$ . Nach den obigen Formeln ist dann

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\beta}, & \kappa &= \frac{x'^2}{\beta}, & v &= \frac{y'^2}{\beta}, \\ x &= \frac{x'}{\beta}, & y &= \frac{2 x' y'}{\beta}, & z &= \frac{x'^4 - d y'^4}{\beta^2}. \end{aligned} \right\}$$

Dabei ist

$$x'^4 - 2 b x'^2 y'^2 + d y'^4 = x'^2.$$

Wegen  $s' = 1$  können wir nun auf  $x', y', z'$  die gleiche Schlußweise anwenden und erhalten so

$$x' = \frac{z''}{\beta}, \quad y' = \frac{2x''y''}{\beta}, \quad z' = \frac{x''^4 - 16cy''^4}{\beta^2},$$

und dabei ist

$$x''^4 + 4bx''^2y''^2 + 16cy''^4 = z''^2.$$

Setzen wir also

$$x'' = x_1, \quad y'' = \frac{y_1}{2}, \quad z'' = z_1,$$

so erhalten wir

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\beta\beta'^2}(x_1^4 - cy_1^4), \\ y = \frac{1}{\beta\beta'^2}2x_1y_1z_1, \\ z = \frac{1}{\beta^2\beta'^4}(z_1^4 - dx_1^4y_1^4) \end{cases}$$

mit

$$x_1^4 + bx_1^2y_1^2 + cy_1^4 = z_1^2;$$

die Lösung  $x_1, y_1, z_1$  liefert also eine Lösung  $q$  von  $p = 2q$ .

Nach Satz 3 bilden die Quadratklassen derjenigen  $r$ , für die

$$r(r^2x^4 + brx^2y^2 + cy^4) = z^2$$

lösbar ist, eine Gruppe der Ordnung  $2^{e_1}$ . Entsprechend sei  $2^{e_2}$  die Ordnung der Gruppe der Quadratklassen derjenigen  $r'$ , für die

$$r'(r'^2x^4 - 2br'x^2y^2 + dy^4) = z'^2$$

lösbar ist. Dann gilt

**Satz 6.** Die Faktorgruppe  $p/2p$ , d. h. die Faktorgruppe aller Lösungen  $p$  nach der Untergruppe, die aus den Lösungen  $2p$  besteht, ist endlich und hat die Ordnung  $2^{e_1+e_2}$ , wenn  $c$  eine Quadratzahl ist, und sonst die Ordnung  $2^{e_1+e_2-1}$ .

**Beweis.** Jede Lösung  $x, y, z$  von

$$x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2,$$

zu der die Zahlen  $s$  und  $s'$  gehören, läßt sich, wie wir aus II wissen, aus einer Lösung  $x', y', z'$  der Gleichung

$$s(s^2x'^4 - 2bs'x'^2y'^2 + dy'^4) = z'^2$$

gewinnen, und diese wieder erhält man aus einer Lösung  $x'', y'', z''$  von

$$s'(s'^2x''^4 + bs'x''^2y''^2 + cy''^4) = z''^2.$$

Geht man umgekehrt bei gegebenen  $s$  und  $s'$  von einer Lösung der dritten Gleichung aus, so erhält man daraus eine Lösung der zweiten Gleichung und daraus dann wieder eine der ersten, der dann die Zahlen  $s$  und  $s'$  zugeordnet sind. Nun gibt es  $2^{e_1+e_2}$  Quadratklassen-Paare  $s, s'$ . Wie wir oben gesehen haben, ist die Quadratklasse von  $s$  eindeutig der Lösung  $x, y, z$  zugeordnet, während die von  $s'$  auch durch die von  $cs'$  ersetzt werden kann. Zu jedem Paar  $s, s'$  wählen wir eine feste Lösung  $q_i$ , und zwar nehmen wir für die Paare  $s, s'$  und  $s, cs'$  den gleichen Repräsentanten. Die Anzahl der  $q_i$  ist dann  $2^{e_1+e_2}$ , wenn  $c \not\equiv 1$ , und  $2^{e_1+e_2-1}$  sonst; denn die Quadratklassen der  $s$  stimmen mit denen der  $s'$  und die Quadratklassen der  $s'$  mit denen der  $s$  überein. Zwei verschiedene solche  $q_i$  gehören nun verschiedenen Nebenklassen nach der Gruppe der  $2p$  an; denn ist  $q_i = q_k + 2p$ , so haben die zu  $q_i$  und  $q_k$  gehörigen  $s$  nach Satz 2 die gleiche Quadratklasse, und nach Satz 4 folgt nun, daß sich die Quadratklassen der zugehörigen  $s'$  höchstens um  $c$  unterscheiden, also folgt  $i = k$  auf Grund der Auswahl der  $q_i$ . Diese  $q_i$  repräsentieren nun aber auch die ganze Faktorgruppe  $p/2p$ ; denn gehören zu einer beliebigen Lösung  $p$  die Zahlen  $s$  und  $s'$ , so nehmen wir den Repräsentanten  $q_i$ , der zum Zahlenpaar  $s, s'$  oder  $s, cs'$  gehört. Für die zu  $p + q_i$  gehörigen Zahlen  $s$  und  $s'$  gilt dann nach Satz 2 und Satz 4  $s \equiv 1$  und  $s' \equiv 1$  oder  $c$ . Daraus folgt aber nach Satz 5, daß  $p + q_i = 2q$  lösbar ist, daß also  $p = q_i + 2(q - q_i)$ . Die Ordnung der Faktorgruppe  $p/2p$  ist daher gleich der oben bestimmten Zahl der  $q_i$ , und das gibt die Behauptung.

Satz 7. Die Gruppe der Lösungen  $p$  besitzt eine endliche Basis, d. h. es gibt endlich viele Lösungen  $p_1, \dots, p_n$ , so daß jede Lösung  $p$  ausgedrückt werden kann als

$$p = g_1 p_1 + \dots + g_n p_n$$

mit ganzen rationalen  $g_i$ .

Beweis. Im Beweis von Satz 6 haben wir gesehen, daß es endlich viele Lösungen  $q_1, \dots, q_m$  gibt, so daß man zu beliebigem  $p$  ein  $q_i$  angeben kann mit  $p = q_i + 2q$ , wobei  $q$  höchstens vierdeutig bestimmt ist. Ist  $p$  die Lösung  $x, y, z$ , wobei wir jetzt  $x, y, z$  wieder als ganze Zahlen nehmen und  $(x, y) = 1$  vorschreiben, so sei  $M(p)$  das Maximum der absoluten Beträge von  $x$  und  $y$ . Wir werden nun zeigen, daß für ein solches  $q$  fast immer  $M(p) > M(q)$  ist, das heißt, daß es nur endlich viele  $t_1, \dots, t_r$  gibt, für die  $M(t_k) \leq M\left(\frac{t_k - q_i}{2}\right)$  ist, und daß wir diese Ausnahmélösungen auch wirklich angeben können, wenn von den lösbaren unter den Gleichungen

$$r(r^2 x^4 + brx^2 y^2 + cy^4) = z^2$$

und

$$r'(r'^2 x'^4 - 2br'x'^2 y'^2 + dy'^4) = z'^2$$

je eine Lösung bekannt ist. Wenn das gezeigt ist, folgt, daß die  $q_1, \dots, q_m$  zusammen mit den  $t_i$  eine Basis bilden; denn: Es ist  $p = q_{i_1} + 2r_1$ . Ist  $r_1$  ein  $p_\mu$ , so haben wir  $p$  bereits durch die behauptete Basis dargestellt. Ist das noch nicht der Fall, so ist  $M(r_1) < M(p)$  und  $r_1 = q_{i_2} + 2r_2$ . Ist  $r_2$  ein  $p_\mu$ , so ist  $r_1$  und damit auch  $p$  durch die Basis dargestellt. Ist das nicht der Fall, so ist  $M(r_2) < M(r_1)$  und  $r_2 = q_{i_3} + 2r_3$ . Dieses Verfahren bricht nach weniger als  $M(p)$  solchen Schritten ab; denn  $M(p), M(r_1), \dots$  sind natürliche Zahlen, also

$$1 \leq M(r_i) \leq M(p) - 1.$$

Es gibt daher ein  $l < M(p)$ , so daß  $r_l = q_{i_l} + t_\mu$  ist, und daraus ergibt sich rückwärts, daß  $p$  eine ganzzahlige Linearkombination der  $t_1, \dots, t_\mu, q_1, \dots, q_m$  ist.

Es bleibt also jetzt zu zeigen, daß, wenn  $p = q_i + 2q$  ist, fast immer  $M(p) > M(q)$  ist.

Wir beweisen zunächst: Ist  $2x = r$  bei gegebenem  $r$  lösbar, so ist für eines dieser  $x$

$$M(r) > C_1 M(x)^4$$

mit konstantem  $C_1$ . Es sei nämlich  $r$  die Lösung  $x, y, z$ . Wegen

$$z^2 = x^4 + bx^2y^2 + cy^4$$

ist zunächst in der Landauschen Bezeichnungsweise

$$z^2 = O(M(r)^4),$$

also

$$z = O(M(r)^2).$$

(Hier und im folgenden kann man stets die in jedem  $O$  steckende Konstante angeben, z. B. ist hier  $|z| \leq \sqrt{1 + |b| + |c|} M(r)^2$ .) Nun sind  $u^2$  und  $v^2$  linear mit konstanten Koeffizienten durch  $x^2, y^2, z$  darstellbar, also ist

$$\begin{cases} u = O(M(r)), \\ v = O(M(r)). \end{cases}$$

Wie im Beweis von Satz 5 ist

$$u = \frac{x'^2}{\beta}, \quad v = \frac{y'^2}{\beta},$$

wobei  $\beta$  nur endlich viele Werte annimmt. Daher ist

$$\begin{cases} x' = O(M(r)^{\frac{1}{2}}), \\ y' = O(M(r)^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Genau so erhält man

$$\begin{cases} x''^2 = O(\text{Max}(|x'|, |y'|)) = O(M(r)^{\frac{1}{2}}), \\ y''^2 = O(\text{Max}(|x'|, |y'|)) = O(M(r)^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Nun ist  $x'', y'', z''$  eine Lösung  $x$  von  $2x = r$ , also ist in der Tat

$$M(x) = O(M(r)^{\frac{1}{2}}),$$

und das wollten wir gerade zeigen.

Wir beweisen nun weiter: Ist  $r$  eine feste Lösung,  $p$  eine beliebige, so ist

$$M(p + r) = O(M(p)^3).$$

Ist nämlich  $p$  von  $r$  und  $o'$  verschieden, so lehrt ein Blick auf das Additionstheorem IV (7), daß diese Behauptung richtig ist, wobei wir noch einmal zu berücksichtigen haben, daß

$$z = O(\text{Max}(|x|^2, |y|^2)).$$

Damit die behauptete Abschätzung auch für die beiden Sonderfälle gilt, brauchen wir nur die in  $O$  steckende Konstante genügend groß zu wählen.

Diese beiden Abschätzungen wenden wir nun auf  $p = q_i + 2q$  an, wo also  $q$  die Rolle des obigen  $x$  spielt. Danach ist

$$C_1 M(q)^4 < M(2q) = M(p - q_i) < C'_i M(p)^3.$$

$i$  durchläuft nur endlich viele Werte; ist daher  $C_2$  das Maximum der  $C'_i$ , so gilt

$$C_1 M(q)^4 < C_2 M(p)^3.$$

Die Ausnahmelösungen waren nun durch

$$M(p) \leq M(q)$$

charakterisiert. Das gibt aber

$$M(p) < \left(\frac{C_2}{C_1} M(p)^3\right)^{\frac{1}{4}},$$

also

$$M(p) < \frac{C_2}{C_1}.$$

Nach der Definition von  $M(p)$  bedeutet das, daß  $|x|$  und  $|y|$  kleiner als  $\frac{C_2}{C_1}$  sind. Dafür gibt es aber nur endlich viele Möglichkeiten, also gibt es erst recht nur endlich viele Ausnahmelösungen  $t_1, \dots, t_s$ , und für alle anderen Lösungen ist, wie zu zeigen war,  $M(p) > M(q)$ .

Nach Satz 7 bilden die Lösungen  $p$  einen Modul  $\mathfrak{M}$ , dessen Koeffizientenbereich aus den ganzen rationalen Zahlen besteht, und der eine endliche Basis besitzt. Daher ist  $\mathfrak{M}$  bekanntlich direkte Summe eines endlichen Moduls  $\mathfrak{M}_0$  und eines Moduls  $\mathfrak{M}_1$ , dessen Elemente außer dem Nullelement keine endliche Ordnung haben.

Wir wenden uns zunächst der Bestimmung von  $\mathfrak{M}_0$  zu und verschärfen zu diesem Zwecke die erste der obigen Abschätzungen zu

$$M(2p) > C M(p)^4.$$

Wir haben nämlich oben gesehen, daß für ein geeignetes  $x$  mit  $2p = 2x$  gilt

$$M(2p) > C_1 M(x)^4.$$

Nun ist  $x = p + \eta$ , wobei  $\eta$  eine der Lösungen von  $2\eta = 0$  ist, also zu einer der Lösungen  $x = 1, y = 0, z = \pm 1$  oder auch, falls  $c \equiv 1 \pmod{4}$ , zu  $x = 0, y = 1, z = \pm \sqrt{c}$  gehört. Ist daher  $p$  die Lösung  $x, y, z$ , so gehören die zwei bzw. vier Primdivisoren  $p + \eta$  zu den Lösungen  $x, y, z$  oder  $-x, y, -z$  oder auch, falls  $c \equiv 1 \pmod{4}$ , zu  $\sqrt{c}y, x, -\sqrt{c}z$  oder  $-\sqrt{c}y, x, \sqrt{c}z$ , wie ohne weiteres aus dem Additionstheorem folgt. Die beiden letzten Lösungen werden im allgemeinen noch nicht normiert sein, lassen sich aber wegen  $(x, y) = 1$  durch Division mit einem beschränkten, nämlich in  $\sqrt{c}$  aufgehenden Faktor normieren. Daraus folgt nun

$$M(x) \geq C_3 M(p)$$

und damit, wie behauptet,

$$M(2p) > C M(p)^4.$$

Ist nun  $p$  von endlicher Ordnung, so durchläuft  $kp$  nur endlich viele Primdivisoren, also bleibt insbesondere  $M(2^j p)$  bei  $j \rightarrow \infty$  beschränkt. Durch wiederholte Anwendung der obigen Abschätzung erhält man aber

$$\begin{aligned} M(2^j p) &> C^{1+4+\dots+4^{j-1}} M(p)^{4^j} \\ &= C^{-\frac{1}{3}} (C^{\frac{1}{3}} M(p))^{4^j}. \end{aligned}$$

Soll also  $p$  endliche Ordnung haben, so muß

$$M(p) \leq C^{-\frac{1}{3}}$$

sein. Um daher alle Elemente von  $\mathcal{M}_0$  zu bestimmen, können wir folgendermaßen vorgehen: Wir bestimmen alle  $p$  mit  $M(p) \leq C^{-\frac{1}{3}}$  (deren Anzahl ist endlich) und bilden für diese  $p$  der Reihe nach  $2p, 3p, 4p, \dots$ . Dies tun wir so lange, bis wir entweder  $kp = 0$  oder  $M(kp) > C^{-\frac{1}{3}}$  erhalten. Im ersten Falle hat  $p$  eine endliche Ordnung, im zweiten aber nicht, weil dann  $kp$  nicht von endlicher Ordnung ist. Es sei noch bemerkt, daß in dieses  $C$  nur  $b$  und  $c$  eingehen, wie ein Blick auf die Herleitung der Abschätzung lehrt. Zur Bestimmung der Lösungen endlicher Ordnung von

$$x^4 - bx^2y^2 - cy^4 = z^2$$

braucht man daher keine Gleichung auf ihre Lösbarkeit hin zu untersuchen.

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß  $\mathcal{M}_0$  höchstens zwei Erzeugende besitzt. Bei algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper der Charakteristik 0 bilden nämlich die Lösungen der Gleichung  $p x = 0$  für jede Primzahl  $p$  eine Gruppe der Ordnung  $p^2$ . Daher hat in unserem Falle die Gruppe der Lösungen dieser Gleichung eine der Ordnungen 1,  $p$  oder  $p^2$ , und daraus folgt nach dem Fundamentalsatz über endliche abelsche Gruppen die Behauptung.

Wesentlicher ist nun die Bestimmung einer unabhängigen Basis von  $\mathfrak{M}_1$ , insbesondere ihrer Länge, des sogenannten „Ranges“ von  $\mathfrak{M}_1$ , den man auch als den Rang von  $\mathfrak{M}$  bezeichnet.

Satz 8. Der Rang des Moduls  $\mathfrak{M}$  der Lösungen von

$$x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

ist  $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 - 2$ . (Vgl. Satz 6.)

Beweis. Nach Satz 6 hat die Faktorgruppe von  $p$  nach der Gruppe der  $2p$  die Ordnung  $2^{\varrho_1 + \varrho_2}$ , wenn  $c$  eine Quadratzahl ist, und sonst die Ordnung  $2^{\varrho_1 + \varrho_2 - 1}$ . Andererseits ist aber die Ordnung dieser Faktorgruppe  $2^{\varrho + \epsilon_0}$ , wenn  $\varrho_0$  die Zahl der geraden Invarianten von  $\mathfrak{M}_0$  ist, wenn also  $2p = 0$  genau  $2^{\varrho_0}$  Lösungen hat. Wie in IV gezeigt wurde, ist  $\varrho_0 = 2$ , wenn  $c \not\equiv 1$ , und  $\varrho_0 = 1$  sonst. Ist also  $c \equiv 1$ , so ist  $\varrho + 2 = \varrho_1 + \varrho_2$ , und sonst ist  $\varrho + 1 = \varrho_1 + \varrho_2 - 1$ , also in beiden Fällen  $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 - 2$ .

Wir gehen jetzt daran, aus einer beliebigen Basis von  $\mathfrak{M}$  eine unabhängige Basis zu konstruieren. Wie schon gezeigt, können wir alle Elemente von  $\mathfrak{M}_0$  angeben und können daher auch eine aus höchstens zwei Elementen  $e_x$  bestehende Basis von  $\mathfrak{M}_0$  bestimmen. Sind also  $p_1, \dots, p_n$  die Elemente der gegebenen Basis, die keine endliche Ordnung haben, so bilden  $p_1, \dots, p_n$  zusammen mit der Basis von  $\mathfrak{M}_0$  eine Basis von  $\mathfrak{M}$ . Wir beweisen nun folgenden

Hilfssatz. Die Elemente  $p_i, e_x$  bilden dann und nur dann eine unabhängige Basis, wenn aus

$$\sum_i g_i p_i \equiv 2q \pmod{\mathfrak{M}_0}, \quad g_i = 0 \text{ oder } 1,$$

$g_i = 0$  folgt.

Beweis. Im Falle einer unabhängigen Basis sind die  $g_i$  eindeutig durch  $q$  bestimmt; ist also  $q \equiv \sum_i h_i p_i \pmod{\mathfrak{M}_0}$ , so ist  $g_i = 2h_i$ , also  $g_i = 0$ .

Es möge nun umgekehrt eine Abhängigkeit bestehen:

$$\sum_i p_i p_i + \sum_x e_x e_x = 0,$$

wobei die  $e_x$  nur mod Ordnung von  $e_x$  zu nehmen sind, so sind wegen der Unabhängigkeit der  $p_i$  nicht alle Null. Ihr größter gemeinsamer Teiler sei  $t$ . Dann ist auch  $\sum_i \frac{p_i}{t} p_i$  noch ein Element endlicher Ordnung; denn sein  $t$ -faches liegt in  $\mathfrak{M}_0$ . Es gibt dann also eine Beziehung

$$\sum_i q_i p_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}_0}, \quad (q_1, \dots, q_n) = 1.$$

Setzen wir nun

$$q_i = g_i + 2r_i, \quad \text{mit } g_i = 0 \text{ oder } 1,$$

so sind die  $g_r$  nicht alle Null, und es ist

$$\sum_r g_r p_r \equiv 2 \sum_r (-r, p_r) \pmod{\mathfrak{M}_0},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wollen wir also die gegebene Basis  $p_r, e_x$  auf ihre Abhängigkeit untersuchen, so rechnen wir für alle Primdivisoren  $\sum_r g_r p_r + \sum_x e_x e_x$  mit  $g_r = 0$  oder 1 und  $e_x = 0$  oder 1 die zugehörigen Zahlen  $s$  und  $s'$  aus und können dann nach Satz 5 entscheiden, welche von diesen Primdivisoren die Form  $2q$  haben. Ist das nur für die Lösungen mit  $g_r = 0$  der Fall, so ist die Basis unabhängig, sonst aber abhängig. Im Falle der Abhängigkeit gibt es also eine Kongruenz

$$\sum_r g_r p_r \equiv 2q \pmod{\mathfrak{M}_0},$$

wobei die  $g_r = 0$  oder 1, aber nicht alle Null sind. Aus

$$2q = \sum_r g_r p_r + \sum_x e_x e_x$$

können wir  $q$  bestimmen, wie es im Beweis von Satz 5 geschah, und dann  $q$  durch die Basis ausdrücken, was wie im Beweis von Satz 7 in endlich vielen Schritten geht:

$$q \equiv \sum_r h_r p_r \pmod{\mathfrak{M}_0}.$$

Dann ist

$$\sum_r (g_r - 2h_r) p_r \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}_0},$$

wobei die Koeffizienten  $g_r - 2h_r$  nicht alle Null sind, weil unter ihnen mindestens ein ungerader vorkommt. Ist dann  $t$  ihr größter gemeinsamer Teiler, so setzen wir

$$g_r - 2h_r = tk_{1r}$$

und erhalten in  $\sum_r k_{1r} p_r$  wieder ein Element endlicher Ordnung mit teilerfremden Koeffizienten:

$$(13) \quad \sum_r k_{1r} p_r \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}_0}, \quad (k_{11}, \dots, k_{1n}) = 1.$$

Wir können nun weitere ganze Zahlen  $k_{\mu r}$  ( $\mu = 2, \dots, n$ ;  $r = 1, \dots, n$ ) bestimmen, so daß die Determinante  $|k_{\mu r}| = 1$  ist. Die Matrix  $(k_{\mu r})^{-1} = (l_{\mu r})$  ist dann ganzzahlig. Setzen wir also

$$\sum_r k_{\mu r} p_r = q_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n),$$

so ist

$$p_r = \sum_{\mu} l_{r\mu} q_{\mu},$$

d. h. die  $q_{\mu}, e_x$  bilden auch eine Basis von  $\mathfrak{M}$ . Nach (13) können wir aber  $q_1$  durch die  $e_x$  ausdrücken, so daß schon  $q_2, \dots, q_n$  und die  $e_x$  eine Basis

von  $\mathfrak{R}$  bilden, und diese Basis ist kürzer als die gegebene. Nach endlich vielen Wiederholungen dieses Prozesses erhalten wir daher eine unabhängige Basis von  $\mathfrak{R}$ .

## VI.

Der hier untersuchte, durch

$$(1) \quad \xi^4 + b\xi^2 + c = \eta^2$$

definierte Funktionenkörper  $P(\xi, \eta)$  ist ein spezieller Körper vom Geschlecht 1. Es läßt sich jedoch zeigen, daß *jeder Funktionenkörper  $K$  vom Geschlecht 1 nach geeigneter Erweiterung des Konstantenkörpers durch eine solche Gleichung definiert werden kann*: Zunächst können wir durch eine geeignete Erweiterung des Grundkörpers erreichen, daß der so erweiterte Funktionenkörper Primdivisoren ersten Grades besitzt, oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, daß seine definierende Gleichung im neuen Grundkörper Lösungen besitzt. Ein Körper vom Geschlecht 1, der einen Primdivisor ersten Grades besitzt, kann nun stets durch eine Gleichung der Form

$$\omega^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3$$

erzeugt werden. Adjungieren wir nun dem Grundkörper noch eine Nullstelle von  $4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3$ , so können wir  $\zeta, \omega$  nach III birational in  $\xi, \eta$  transformieren, wobei  $\xi, \eta$  durch die Gleichung (1) miteinander verbunden sind. Für später ist es zweckmäßig, den Konstantenkörper gleich noch zu seinem Normalkörper über dem ursprünglichen Konstantenkörper zu erweitern.

Diesen neuen Funktionenkörper, der also durch eine Erweiterung des Konstantenkörpers aus  $K$  hervorgegangen ist und der über dem neuen Konstantenkörper  $N$  durch (1) erzeugt werden kann, bezeichnen wir mit  $K^*$ . Die Hauptaufgabe ist nun, aus den Primdivisoren  $p^*$  ersten Grades von  $K^*$ , für die wir eine Basis als bekannt voraussetzen, rückwärts eine Übersicht über die Primdivisoren  $p$  ersten Grades von  $K$  zu erhalten.

Es sei also  $p$  ein Primdivisor ersten Grades von  $K$ . Seine Primzerlegung in  $K^*$  hat die Form

$$p = p_1^* \dots p_g^*,$$

wobei die  $p_i^*$  alle voneinander verschieden sind, weil bei einer Erweiterung des Konstantenkörpers keine Verzweigung auftritt. Ist  $f$  der Grad von  $p^*$  über dem alten Grundkörper  $P$ , so ist

$$fg = m = [N : P].$$

Nun umfaßt der Restklassenkörper mod  $p^*$  den Körper  $N$ , also ist  $f \geq m$ , und das gibt  $f = m, g = 1$ , d. h.  $p$  bleibt unzerlegt in  $K^*$  und ist, aufgefaßt als Primdivisor von  $K^*$  mit dem Konstantenkörper  $N$ , vom Grade 1, und

außerdem stimmt  $p$  mit seinen konjugierten überein. Ist umgekehrt  $p^*$  ein Primdivisor ersten Grades von  $K^*$ , der invariant gegenüber den Automorphismen von  $K^*/K$  bleibt, und  $p$  der zugehörige Primdivisor von  $K$ , so folgt durch Umkehrung dieser Schlußweise  $p^* = p$ . Die Frage nach den Primdivisoren ersten Grades von  $K$  kommt also darauf hinaus, die für  $K^*/K$  invarianten Primdivisoren ersten Grades von  $K^*$  zu bestimmen.

$p_1^*, \dots, p_n^*$  sei eine unabhängige Basis der Primdivisoren ersten Grades von  $K^*$ , und es sei

$$(2) \quad p^* = \sum_r g_r p_r^*.$$

Weiter sei  $\sigma$  ein Automorphismus von  $K^*/K$ , und dabei sei

$$(3) \quad \begin{cases} p_r^{*\sigma} = \sum_{\mu} h_{r\mu}^{(\sigma)} p_{\mu}^*, \\ o^{*\sigma} = \sum_{\mu} k_{\mu}^{(\sigma)} p_{\mu}^*, \end{cases}$$

wobei  $o^*$  der Bezugsprimdivisor der Addition ist. Die Gleichung (2) bedeutet

$$\frac{p^*}{o^*} \sim \prod_r \left( \frac{p_r^*}{o^*} \right)^{g_r}.$$

Auf diese Äquivalenz wenden wir  $\sigma$  an:

$$\frac{p^{*\sigma}}{o^{*\sigma}} \sim \prod_r \frac{p_r^{*\sigma} g_r}{o^{*\sigma} g_r},$$

also

$$\frac{p^{*\sigma}}{o^{*\sigma}} \sim \frac{o^{*\sigma}}{o^*} \prod_r \left( \frac{p_r^{*\sigma}}{o^*} \right)^{g_r} \left( \frac{o^{*\sigma}}{o^*} \right)^{-g_r},$$

und das heißt

$$p^{*\sigma} = o^{*\sigma} + \sum_r g_r (p_r^{*\sigma} - o^{*\sigma}).$$

Daraus folgt nach (3)

$$(4) \quad p^{*\sigma} = \sum_{\mu} (k_{\mu}^{(\sigma)} + \sum_r g_r (h_{r\mu}^{(\sigma)} - k_{\mu}^{(\sigma)})) p_{\mu}^*.$$

Nun soll  $p^*$  invariant für  $K^*/K$  sein, also  $p^{*\sigma} = p^*$  für jeden Automorphismus  $\sigma$  von  $K^*/K$ . Nach (2) und (4) bedeutet das wegen der Unabhängigkeit der Basis

$$(5) \quad g_{\mu} = k_{\mu}^{(\sigma)} + \sum_r g_r (h_{r\mu}^{(\sigma)} - k_{\mu}^{(\sigma)}),$$

wobei  $\mu$  die Zahlen von 1 bis  $n$  und  $\sigma$  die Galoissche Gruppe von  $K^*/K$  durchlaufen, und wobei die den Basiselementen endlicher Ordnung entsprechenden Gleichungen nur als Kongruenzen nach der jeweiligen Ordnung zu lesen sind. Für die gesuchten  $g_{\mu}$  haben wir also ein lineares Gleichungs- und Kongruenzensystem gefunden. Seine allgemeine Lösung liefert die gewünschte Übersicht über die Primdivisoren  $p$  ersten Grades von  $K$ : Ist z. B. (5) unlösbar, so heißt

das, es gibt keine Primdivisoren ersten Grades in  $K$ . Ist (5) aber lösbar, so werden die invarianten  $p^*$ , die wir auch einfach als Primdivisoren  $p$  von  $K$  bezeichnen können, gegeben durch

$$p = \sum_n g_n p_n^*,$$

wobei die  $g_n$  eben die Lösungen von (5) sind. Das bedeutet offenbar, daß die  $p$  eine Nebenklasse nach einer gewissen Untergruppe von  $\mathfrak{M}^*$  bilden, die durch das zu (5) gehörige homogene Gleichungs- und Kongruenzsystem definiert ist. Ist  $o$  ein fester Primdivisor unter diesen  $p$ , so können wir die Elemente dieser Untergruppe eineindeutig auf die Differenzen  $p - o$  abbilden. Der Addition in dieser Untergruppe entspringt nun eine neue Addition der  $p$ , die wir so definieren: Wir setzen  $p \oplus q = r$ , wenn  $(p - o) + (q - o) = r - o$  ist. Die Gruppeneigenschaft dieser Addition ist nach der Herleitung klar; was wir zeigen wollen, ist natürlich, daß diese Addition mit der alten Addition der Primdivisoren ersten Grades von  $K$  mit  $o$  als Bezugsdivisor übereinstimmt.  $p \oplus q = r$  bedeutet  $p + q = r + o$ , d. h.  $\frac{pq}{ro}$  ist Hauptdivisor in  $K^*$ . Daraus folgt nun aber, daß  $\frac{pq}{ro}$  Hauptdivisor schon in  $K$  ist; denn: In der Klasse von  $\frac{pq}{o}$  in  $K$  gibt es genau einen Primdivisor  $t$  ersten Grades, so daß  $\frac{o p}{q} \sim t$  ist. Daraus folgt natürlich erst recht  $\frac{pq}{o} \sim t$  in  $K^*$ . Andererseits ist in  $K^*$  schon  $\frac{pq}{o} \sim r$ , wobei  $r$  durch  $\frac{pq}{o}$  eindeutig bestimmt ist, also ist  $r = t$ , d. h.  $\frac{pq}{ro} \sim 1$  in  $K$ . Schreiben wir dies als  $\frac{p}{o} \cdot \frac{q}{o} \sim \frac{r}{o}$ , so sehen wir nunmehr, daß die oben definierte Addition  $p \oplus q$  übereinstimmt mit der alten Addition  $p + q$  in  $K$ , die  $o$  als Bezugsdivisor hat.

Wir bekommen daher eine Basis des Moduls der  $p$  in  $K$ , indem wir eine Basis der obenerwähnten Untergruppe von  $\mathfrak{M}^*$  bestimmen, und das kommt, wie man ohne weiteres sieht, genau darauf hinaus, daß man ein System unabhängiger Lösungen des zu (5) gehörigen homogenen Gleichungs- und Kongruenzsystems bestimmt.

(Eingegangen am 31. 3. 1939.)

# Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. III.

Von

Hans Petersson in Prag.

## 1. Problemstellung und Inhaltsübersicht.

1. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine Ergänzung zu der im zweiten Teil<sup>1)</sup> entwickelten Theorie der Stufe  $Q$ ;  $Q$  ist eine beliebige natürliche Zahl. Es wird hier die Untersuchung der Dirichletschen Reihen weitergeführt, die den ganzen Spitzenformen der Stufe  $Q$  zugeordnet sind, zu einem bestimmten Teiler  $t$  von  $Q$  gehören und eine Eulersche Produktentwicklung bezüglich der in  $Q$  nicht aufgehenden Primzahlen besitzen (vgl. die Definition in (T<sub>n</sub> II), S. 331 und Satz 42). Es gelingt mit Hilfe elementarer Methoden, die Bauart des von den Primteilern der Stufe herrührenden Bestands in den Produktdarstellungen dieser Dirichlet-Reihen zu bestimmen.

Zum Verständnis des Problems stelle ich die im zweiten Teil bewiesenen Sätze, soweit sie hier in Betracht kommen, auszugsweise zusammen.

(Satz 5.) Bezeichnet  $\mathfrak{S}(t, s, Q)$  die Schar der ganzen Spitzenformen der Art  $\{\Gamma(Q), -r\}$  mit natürlichem  $r$ , welche zum Teiler  $t$  von  $Q$  und zum Charakter  $s(n) \bmod Q$  gehören, so besitzt  $\mathfrak{S}(t, s, Q)$  eine Basis

$$v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_M(\tau)$$

mit den Eigenschaften

$$v_i(\tau) | T_n = \omega_i(n) v_i(\tau) [1 \leq i \leq M, n \geq 1, (n, Q) = 1].$$

Diese Basis kann stets als normierte Orthogonalbasis gewählt werden. Sie ist unabhängig davon bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt, wenn  $t = 1$  ist, und wenn jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1 = \frac{Q}{t}$  aufgeht.

In den anderen Fällen dagegen besteht diese Eindeutigkeit bereits bei Primzahlstufe  $Q = q$  (wie die Theorie in (K II), § 3 zeigt) nicht immer.

(Satz 6.) Es bezeichne ferner  $\mathfrak{L}(t, s, Q)$  die lineare Schar der den Formen

$$(29) \quad \varphi(\tau) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n, t_1)=1}}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{Q}}$$

<sup>1)</sup> Teil I: Math. Annalen 116 (1939), S. 401–412; Teil II: Ebenda 117 (1939), S. 39–64. Teil II wird hier gelegentlich mit (K II) zitiert. Ferner E. Hecke, Über Modulformen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I, II, Math. Annalen 114 (1937), S. 1–28, 316–351; wie bisher mit (T<sub>n</sub> I) und (T<sub>n</sub> II) zitiert.

von  $\mathfrak{S}(t, s, Q)$  zugeordneten Dirichlet-Reihen

$$(30) \quad D(s) = D(s; \varphi) = t^{-s} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, t_1)=1}}^{\infty} a_n m^{-s}.$$

Diese Schar  $\mathfrak{I}(t, s, Q)$  besitzt eine Basis in Gestalt der Dirichlet-Reihen mit den Produktdarstellungen

$$(31) \quad H_i(s) = t^{-s} H_i^{(Q)}(s) \prod_{(p, Q)=1} \left(1 - \frac{m_i(p)}{p^s} + \frac{p^{s-1} \varepsilon(p)}{p^{2s}}\right)^{-1} \quad (1 \leq i \leq M).$$

Dabei bedeutet  $H_i^{(Q)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n} m^{-s}$  eine Dirichlet-Reihe, in der höchstens die  $m$  wirklich auftreten, die keinen Primteiler von  $t_1$  und keine zur Stufe  $Q$  teilerfremde Primzahl als Faktor enthalten. Die Basis (31) ist bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt, wenn  $t = 1$  ist, und ebenso, wenn jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht; in diesen Fällen ist ersichtlich  $H_i^{(Q)}(s)$  konstant. In den anderen Fällen dagegen besteht diese Eindeutigkeit bereits bei Primzahlstufe  $Q = q$  (wie die Theorie in (K II), § 3 zeigt) nicht immer.

(Satz 16.) Die Schar  $\mathfrak{S}(t, s, Q)$  zerfällt auf eine und nur eine Weise in paarweise orthogonale Teilscharen, die folgendermaßen erklärt sind: Jede Teilschar besteht aus lauter Eigenfunktionen aller Operatoren  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$ . Die Formen einer und derselben Teilschar haben bei Anwendung jedes einzelnen  $T_n$  ( $(n, Q) = 1$ ) die gleichen Eigenwerte. Zwei Formen aus zwei verschiedenen Teilscharen, die beide nicht identisch verschwinden, haben bei Anwendung mindestens eines dieser Operatoren  $T_n$  verschiedene Eigenwerte. Man setze nun  $\omega(n) = \omega_i(n)$  für ein festes  $i = 1, 2, 3, \dots, M$  und alle natürlichen  $n$  mit  $(n, Q) = 1$  und bezeichne mit  $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_i$  den unendlichen Vektor mit den nach wachsenden natürlichen  $n$  geordneten Komponenten  $\omega(n) = \omega_i(n)$  ( $(n, Q) = 1$ ). Dann entspricht jedem solchen Vektor  $\mathfrak{o}$  eine Teilschar  $\mathfrak{S}(t, s, Q, \mathfrak{o})$  der genannten Art eindeutig. Sie besteht aus den sämtlichen und nur solchen Formen von  $\mathfrak{S}(t, s, Q)$ , welche für jedes  $n$  mit  $(n, Q) = 1$  Eigenfunktionen des Operators  $T_n$  zum Eigenwerte  $\omega(n)$  sind. Eine Basis von  $\mathfrak{S}(t, s, Q)$ , welche aus lauter Eigenfunktionen aller dieser Operatoren  $T_n$  besteht, setzt sich aus Basen der sämtlichen Teilscharen zusammen. Sie ist durch ihr Verhalten gegenüber den  $T_n$  dann und nur dann bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt, wenn die genannten Teilscharen sämtlich den Rang 1 haben, d. h. wenn alle Vektoren  $\mathfrak{o}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, M$ ) paarweise verschieden sind.

Zu diesen Sätzen tritt als verbindendes Glied der Satz 42, ( $T_n$  II). Er gestattet zusammen mit den zitierten Aussagen die folgende Schlußweise:

Es sei  $H(s)$  eine Dirichlet-Reihe, die durch  $H(s) = D(s; \varphi)$  einer Modulform  $\varphi(\tau)$  der Stufe  $Q$  vom Teiler  $t$  zugeordnet ist. (Es wird nicht vorausgesetzt, daß  $\varphi(\tau)$  normiert, d. h. Eigenfunktion aller  $R_n$  mit  $(n, Q) = 1$  sei.)  $H(s)$  besitze eine Produktzerlegung von der allgemeinen Gestalt (19), (K II). Dann ist die zugehörige Modulform  $\varphi(\tau)$  Eigenfunktion aller  $R_n$ ,  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  und also in einer der Scharen  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  enthalten. Es genügt daher, diese Teilscharen  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  zu untersuchen.

Die ihr zugeordnete Teilschar  $\mathfrak{I}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  von  $\mathfrak{I}(t, \varepsilon, Q)$  besteht aus den sämtlichen und lauter solchen Dirichlet-Reihen  $D(s)$  von  $\mathfrak{I}(t, \varepsilon, Q)$ , welche eine Produktzerlegung der Gestalt

$$(32) \quad D(s) = t^{-s} K(s) \prod_{(p, Q)=1} \left( 1 - \frac{\omega(p)}{p^s} + \frac{p^{r-1} \varepsilon(p)}{p^{2s}} \right)^{-1} \\ = t^{-s} K(s) P(s; \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$$

zulassen; hier bezeichnet

$$(33) \quad K(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s} \quad (* \text{ bedeutet } (m, t_1) = (m, p) = 1 \text{ für } (p, Q) = 1),$$

der „Kern“ von  $D(s)$ , eine Dirichlet-Reihe, welche höchstens die Glieder mit denjenigen  $m$  wirklich enthält, in denen kein Primteiler von  $t_1$  und keine zu  $Q$  teilerfremde Primzahl aufgeht. Unter diesen Funktionen (32) befindet sich also das gegebene  $H(s)$ . Der Faktor  $t^{-s} P(s; \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  ist bei allen diesen Funktionen  $D(s)$  aus  $\mathfrak{I}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  der gleiche. Die durch (32) erklärten Funktionen  $K(s)$ , die in der genannten Weise den fest gegebenen Symbolen  $t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o}$  zugeordnet sind, bilden offenbar eine zu  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  und  $\mathfrak{I}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  linear-isomorphe Schar  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$ .

Wenn  $t = 1$  ist, oder wenn jeder Primteiler von  $t$  in  $t_1$  aufgeht, sind alle  $K(s)$  konstant und die Untersuchung ist gegenstandslos. Ferner können wir nach (K II), Satz 17 den Fall, in dem alle Teilscharen  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  eingliedrig sind, als erledigt ansehen. Denn dann sind die Basisformen  $v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_M(\tau)$  als Eigenfunktionen aller  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  bis auf die Reihenfolge und konstante Faktoren eindeutig bestimmt und automatisch Eigenfunktionen aller  $T'_m$  ( $m \geq 1$ ); die ihnen zugeordneten Dirichlet-Reihen gestatten also sämtlich Produktentwicklungen der Form ( $T_n$  II), Gleichung (20) mit Zahlkoeffizienten, oder, m. a. W., es gilt in der Ausdruckweise von (K II) für die Schar  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  das Hauptachsen-Theorem. Indessen ergibt sich dies Resultat auch als Spezialfall der Resultate der vorliegenden Arbeit.

Das allgemeine Ergebnis dieser Arbeit kann dahin zusammengefaßt werden: Es seien  $q_1, q_2, \dots, q_h$  die sämtlichen Primteiler von  $t$ , die nicht in  $t_1$  aufgehen. Dann läßt sich jede der Funktionen  $K(s)$ , die einer Schar

$\mathfrak{D}(t, \varepsilon, Q, v)$  mit festen  $t, \varepsilon, Q, v$  entstammen, aus einem festen endlichen Vorrat von Produkten der Gestalt

$$(34) \quad q_1^{-(r_1-1)s} \left(1 - \frac{\alpha_1}{q_1}\right)^{-r_1} \cdot q_2^{-(r_2-1)s} \left(1 - \frac{\alpha_2}{q_2}\right)^{-r_2} \cdots q_h^{-(r_h-1)s} \left(1 - \frac{\alpha_h}{q_h}\right)^{-r_h}$$

linear mit konstanten Koeffizienten kombinieren. Dabei ist für jedes der  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, h$ ) eine feste endliche Anzahl von verschiedenen komplexen Zahlen in (34) einzusetzen, und  $v_i$  durchläuft bei festem  $i$  die natürlichen Zahlen bis zu einem nur von  $q_i$  und  $\alpha_i$  abhängigen Höchstwert  $N(q_i, \alpha_i)$ . Die Zahlen  $\alpha_i$  sind die charakteristischen Wurzeln einer gewissen linearen Transformation  $V_i$ , die eine gewisse, aus  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(t, \varepsilon, Q, v)$  abgeleitete Schar  $\mathfrak{D}^{(0)}$  in sich überführt. Sie sind auch unter den charakteristischen Wurzeln der in  $\mathfrak{D}$  erklärten linearen Transformation  $V_i$  enthalten, welche dem Operator  $T_{q_i}^i$  entspricht. Der Höchstwert  $N(q_i, \alpha_i)$  ist die Vielfachheit der Nullstelle  $\alpha_i$  in dem Minimalpolynom der linearen Transformation  $V_i$  in der Schar  $\mathfrak{D}^{(0)}$ .

Es wird im allgemeinen nicht bewiesen (und ist für  $h \geq 2$  auch kaum zu erwarten), daß alle die genannten Produkte (34) selber unter den  $K(s)$  aus  $\mathfrak{D}$  vorkommen. Im Falle  $h = 1$  trifft dies jedoch zu. Hier ist also das System der Funktionen

$$(35) \quad w_r(q^{-s}, \alpha) = q^{-(r-1)s} \left(1 - \frac{\alpha}{q}\right)^{-r} \quad (q = q_1)$$

eine Basis der Schar  $\mathfrak{D}$ . Dabei durchläuft  $\alpha$  die verschiedenen charakteristischen Wurzeln der in  $\mathfrak{D}(t, \varepsilon, Q, v)$  erklärten linearen Transformation  $T_q^i$  und  $v$  zu gegebenem  $\alpha$  die natürlichen Zahlen bis zur Vielfachheit der Nullstelle  $\alpha$  des zugehörigen charakteristischen Polynoms. Dieses fällt im übrigen mit dem Minimalpolynom von  $T_q^i$  zusammen; denn es zeigt sich, daß das Minimalpolynom der einzige nicht-konstante Elementarteiler von  $T_q^i$  ist. Der hier zitierte Basissatz ( $h = 1$ ) gilt insbesondere für alle Primzahlpotenzstufen  $Q = q^2$ , wo dann  $t = Q$  sein muß.

Durch das Ergebnis dieser Arbeit wird die in der Überschrift formulierte Aufgabe insofern gelöst, als sie nunmehr auf die Diskussion der linearen Relationen zwischen den endlich vielen wohlbestimmten elementaren Funktionen (34) zurückgeführt ist. Denn zunächst läßt sich die Schar  $\mathfrak{U}$  der Dirichlet-Reihen, die den Linearkombinationen der Eisensteinreihen entsprechen, von gewissen, in  $\mathfrak{U}$  enthaltenen Produkten je zweier Dirichletschen  $L$ -Reihen mit Restcharakteren erzeugen (vgl. ( $T_n$  II), Satz 44). Alle diese Funktionen gestatten nach ( $T_n$  II), Satz 42 eine (eindeutig bestimmte) Eulersche Produktentwicklung bezüglich der nicht in der Stufe  $Q$  aufgehenden Primzahlen  $p$ . Will man die Elemente von  $\mathfrak{U}$  ermitteln, die eine vollständige Eulersche Produktentwicklung gestatten, so hat man diejenigen unter den genannten Erzeugenden, welche zur gleichen System  $\varepsilon(n), \omega(n)$  ( $(n, Q) = 1$ ) gehören,

zusammenzufassen. Wird für eine Funktion der zugehörigen Teilschar wieder die Zerlegung (32) ausgeführt, so ist nur zu untersuchen, welche Linearkombinationen der bei diesen  $D(s)$  auftretenden Faktoren  $t^{-s} K(s)$  durch Produkte von der Gestalt

$$(35_1) \quad \prod_{i, r, \varphi} C_{i, r, \varphi} q_i^{-\gamma_i, r, \varphi} w_{r, i} (q_i^{-s}, \alpha_{i, \varphi}) \quad (q_i | Q)$$

ausgedrückt werden können. Dabei kommt nur eine feste endliche Auswahl von  $\alpha$ -,  $\gamma$ - und  $r$ -Werten in Betracht; die  $\gamma$  und  $r$  sind ganze Zahlen  $\geq 0$ ,  $w_0(u, \alpha)$  ist 1. Im übrigen sind die im Zusammenhang mit der Schar  $\mathcal{U}$  auftretenden Werte  $r_i$  höchstens gleich 2.

Im Falle der ganzen Spitzenformen hat man dieses Vorgehen nur in einigen Hinsichten zu modifizieren. Hat die Dirichlet-Reihe  $D(s)$ , die einer ganzen Spitzenform  $\varphi(\tau)$  der Art  $\{\bar{F}(Q), -r\}$  entsprechen möge, im Sinne von (T<sub>n</sub> II), S. 331 eine allgemeine Eulersche Produktentwicklung bezüglich der Primzahlen  $p$  mit  $(p, Q) = 1$ , so zerlege man  $\varphi(\tau)$  additiv in Modulformen, deren jede einen Teiler besitzt. In der zugehörigen Zerlegung von  $D(s)$ :

$$D(s) = \sum_{t|Q} D_t(s)$$

gestattet jeder Summand  $D_t(s)$  eine Darstellung

$$D_t(s) = t^{-s} K_t(s) P(s; s, Q, o),$$

in der  $s$  und  $o$  nicht von  $t$  abhängen (vgl. (T<sub>n</sub> II), § 6 und Satz 35). Nach dem zitierten Hauptsatz der vorliegenden Arbeit über die Zerlegung dieser  $D_t(s)$  zerfällt  $D(s)$  additiv in eine feste endliche Anzahl von Dirichlet-Reihen, die eine vollständige Eulersche Produktentwicklung (bezüglich aller Primzahlen) besitzen. Jede einzelne von ihnen hat das Aussehen der rechten Seite der letzten Gleichung, wenn darin  $K_t(s)$  durch ein Produkt von der Gestalt (34) ersetzt wird. Es steht zwar nicht fest, daß diese Teilreihen immer zu Modulformen gehören. Damit aber  $D(s)$  selbst eine vollständige Eulersche Produktentwicklung gestatte, ist notwendig und hinreichend, daß die Summe  $\sum_{t|Q} t^{-s} K_t(s)$  eine Darstellung der Gestalt (35.) zuläßt.

Um schließlich die analoge Entscheidung für eine Dirichlet-Reihe  $F(s)$  zu treffen, die einer beliebigen ganzen Modulform  $g(\tau)$  zugeordnet ist, zerlege man  $F(s)$  in eine Summe  $F(s) = E(s) + D(s)$ , wo  $E(s)$  in  $\mathcal{U}$  liegt und  $D(s)$  einer ganzen Spitzenform entspricht. Aus der Existenz einer Eulerschen Produktzerlegung von  $F(s)$  bezüglich der Primzahlen  $p$  mit  $(p, Q) = 1$  folgt das gleiche für die beiden Funktionen  $E(s)$  und  $D(s)$ , und der früher mit  $P(s; s, Q, o)$  bezeichnete Faktor ist bei beiden Funktionen derselbe. Damit ist die Frage wieder auf die Diskussion der linearen Relationen zwischen elementaren Funktionen der Gestalt (34) zurückgeführt.

Der im Falle  $h = 1$  bestehende Basissatz soll jetzt noch kurz am Beispiel der im zweiten Teil vollständig durchgeführten Theorie der Primzahlstufe  $Q = q$  erläutert werden. Hier wurde die Schar der ganzen Spitzenformen vom Teiler  $t = Q = q$  in gewisse, gegenüber allen  $T_m^t$  ( $m \geq 1$ ) invariante Scharen  $\mathcal{L}_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) zerlegt; die Formen einer Schar  $\mathcal{L}_k$  gehören sämtlich zum gleichen Charakter  $\varepsilon(n)$  und setzen sich überdies bei Anwendung der Substitutionen der vollen Modulgruppe mit ihren Transformaten nach einer normierten irreduziblen Darstellung der Modulgruppe um. Wird jede dieser Scharen  $\mathcal{L}_k$  nach (K II), Satz 16 in die den verschiedenen Eigenwertvektoren  $\varphi_i = 0$  zugeordneten Teilscharen  $\mathcal{S}_k(0)$  aufgespalten, so gelangt man bei allen Scharen  $\mathcal{L}_k$  mit einer einzigen Ausnahme zu lauter eingliedrigen Teilscharen  $\mathcal{S}_k(0)$  und damit zu der Gültigkeit des Hauptachsentheorems in diesen  $\mathcal{L}_k$ . Denn aus der Maximalität des von den Matrizen  $\lambda(n)$  [ $(n, Q) = 1$ ] in  $\mathcal{L}_k$  erzeugten Matrizenringes folgt, daß alle Eigenwertvektoren  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  paarweise verschieden sein müssen. In allen diesen Fällen, denen sich nur eine einzige Schar  $\mathcal{L}_k$  nicht unterordnet, ergab sich früher und ergibt die Theorie der vorliegenden Arbeit bei festen  $t$  ( $= q = Q$ ),  $\varepsilon, \varphi$  als  $\alpha$ -Menge eine einzige Zahl  $\alpha$  und für  $\nu$  den Wert Eins.

Die eine Ausnahmeschar  $\mathcal{L}_0$  besteht aus den ganzen Spitzenformen der Gruppe  $\Gamma_0(q)$ . Hier ist  $r$  gerade,  $\varepsilon(n)$  der Hauptcharakter, und es finden sich unter den nach Satz 16, (K II) erklärten Teilscharen  $\mathcal{S}_0(0) = \mathcal{S}_0(q, 1, q, \varphi)$  von  $\mathcal{L}_0$  sicher zweigliedrige Scharen, wenn  $r = 12$  und wenn  $r \geq 16$ . Die sämtlichen zweigliedrigen Teilscharen  $\mathcal{S}_0(0)$  werden auf folgende Weise erhalten: Es sei  $f(\tau)$  eine ganze Spitzenform der vollen Modulgruppe und Eigenfunktion von allen auf der ersten Stufe erklärten Operatoren  $T_n$ , wo  $n$  eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Wir schreiben  $f(\tau) | T_n = \varrho_n f(\tau)$  für diese  $T_n$  ( $n \geq 1$ ), so daß also  $\omega(n) = \varrho_n$  für  $(n, q) = 1$ , und bezeichnen mit  $\xi, \xi'$  die zu  $r$  und  $q$  gehörigen „Ramanujan-Wurzeln“, d. h. die Nullstellen des quadratischen Polynoms

$$\nu_q(x) = x^2 - \varrho_q x + q^{r-1}.$$

Dann wird  $\mathcal{S}_0(0)$  von den beiden Formen  $f(\tau), f(q\tau)$  aufgespannt, und die Theorie der vorliegenden Arbeit bestätigt das auch aus (K II) § 3 unmittelbar zu entnehmende Resultat:

Für  $\xi \neq \xi'$  bilden die Funktionen  $w_1(q^{-s}, \alpha)$  mit  $\alpha = \xi$  und  $\alpha = \xi'$  eine Basis der  $\mathcal{S}_0(0)$  entsprechenden zweigliedrigen Schar  $\mathcal{D}_0(0)$  der Funktionen  $K(s)$ ; für  $\xi = \xi'$  dagegen die Funktionen  $w_1(q^{-s}, \alpha)$  und  $w_2(q^{-s}, \alpha)$  mit  $\alpha = \xi$ . Im ersten Falle gilt in der Schar  $\mathcal{S}_0(0)$  das Hauptachsentheorem, im zweiten nicht.

Es sei noch hervorgehoben, daß von der Theorie der irreduziblen Darstellungen der Modulgruppe  $\mathfrak{M}(Q)$  nicht Gebrauch gemacht wird, sondern

daß vielmehr die Beweise völlig elementar verlaufen. Von den Entwicklungen des zweiten Teils wird nur der Inhalt der §§ 1, 2 benutzt. Die in (K II), § 3 durchgeführte Theorie der Primzahlstufe gibt dann nach Kenntnis der allgemeinen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ein Verfahren an, mit dem man — zunächst für Primzahlstufe — eine Einsicht in die genauere Beschaffenheit der Ausdrücke (34) der allgemeinen Theorie gewinnt.

Der elementare Charakter der Beweisführung äußert sich auch in dem Umstand, daß die gesamte Theorie der Scharen  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\ell, \varepsilon, Q, \sigma)$  mit dem gleichen Erfolg auf alle diejenigen Funktionenscharen  $\mathfrak{B}$  von endlichem Rang übertragen werden kann, welche die folgenden zwei Eigenschaften aufweisen: Alle Funktionen von  $\mathfrak{B}$  sind Dirichlet-Reihen, in denen nur die Potenzprodukte der vorgegebenen Primzahlen  $q_1, q_2, \dots, q_h$  auftreten, und  $\mathfrak{B}$  ist gegenüber den  $h$  Operatoren  $V_i$  invariant, die die Funktion

$$K(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ aus } \mathfrak{B} \text{ in } K(s) | V_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_i m^{-s} \quad (1 \leq i \leq h)$$

(der Stern bedeutet die soeben angegebene Summationsbeschränkung) überführen. Diese Operatoren  $V_i$  erzeugen dann einen kommutativen Operatorenring  $\mathfrak{R}$ , der nach Auswahl einer Basis von  $\mathfrak{B}$  durch den Ring  $\mathfrak{M}$  der zugehörigen Umsetzungsmatrizen treu dargestellt wird. Der Ring  $\mathfrak{M}$  erweist sich wieder als maximal. Darüber hinaus erkennt man folgendes: Eine Schar  $\mathfrak{B}$  mit den beschriebenen Eigenschaften, die den gegebenen Rang  $\mu$  hat und zu den gegebenen Primzahlen  $q_1, q_2, \dots, q_h$  gehört, ist durch die Existenz einer Basis, welche bei den Operatoren  $V_i$  Umsetzungen mit vorgegebenen Matrizen erfährt, eindeutig bestimmt.

Im Anschluß hieran werden die sämtlichen allgemeinen Scharen  $\mathfrak{B}$  mit  $h = \mu = 2$  durch Angabe zweier Basisfunktionen explizit aufgestellt. Dabei zeigt sich einerseits, daß man in diesem Spezialfall die beiden Umsetzungsmatrizen  $A_1, A_2$  zu  $V_1, V_2$  unter den als notwendig erkannten Bedingungen (Vertauschbarkeit von  $A_1, A_2$  und Maximalität von  $\mathfrak{M}$ ) willkürlich vorschreiben kann; andererseits aber, bei geeigneter Wahl von  $A_1, A_2$ , daß die eine Basis der betreffenden Schar  $\mathfrak{B}$  kombinierenden Produkte (34) nicht sämtlich in  $\mathfrak{B}$  enthalten sind; darüber hinaus schließlich, daß eine und (abgesehen von einem konstanten Faktor) nur eine Funktion in  $\mathfrak{B}$  existiert, welche multiplikativ in zwei Dirichlet-Reihen zerfällt, in deren jeder nur die Potenzen einer der beiden Primzahlen  $q_1, q_2$  auftreten.

Im vorletzten Abschnitt wird das in der Überschrift dieser Arbeiten formulierte Problem, die Dirichlet-Reihen zu konstruieren, die den ganzen Modulformen der Stufe  $Q$  entsprechen und eine vollständige (d. h. auf alle Primzahlen bezügliche) Eulersche Produktentwicklung gestatten, etwas ausführlicher erörtert. Die Lösung dieses Problems, d. h. seine Zurückführung auf die Diskussion der linearen Relationen zwischen den elementaren Funk-

tionen (34), beruht auf dem Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit. Dieses besagt für die hier gestellte Frage folgendes:

*Hat eine Dirichlet-Reihe  $D(s)$ , die einer ganzen Modulform der Stufe  $Q$  entspricht, eine Eulersche Produktentwicklung bezüglich der Primzahlen  $p$  mit  $(p, Q) = 1$ , so läßt sie sich aus einem festen endlichen Vorrat von Dirichlet-Reihen, deren jede eine vollständige Eulersche Produktentwicklung besitzt, linear mit konstanten Koeffizienten kombinieren. Die Teilprodukte, die sich auf die  $p$  mit  $(p, Q) = 1$  beziehen, stimmen bei allen diesen Dirichlet-Reihen miteinander überein und haben die Gestalt eines  $P(s; z, Q, o)$  aus (32). Die Teilprodukte, die sich auf die Primteiler der Stufe  $Q$  beziehen, haben (abgesehen von einem Faktor  $t^{-s}$ ) die Gestalt (34). Ist  $Q$  eine Primzahlpotenz, so gehören jene Dirichlet-Reihen mit einer vollständigen Eulerschen Produktentwicklung sämtlich zu ganzen Modulformen; hier gibt es für die Schar der Dirichlet-Reihen, die den ganzen Modulformen der Stufe  $Q$  entsprechen und eine feste Eulersche Produktentwicklung bezüglich der Primzahlen  $p$  mit  $(p, Q) = 1$  zulassen, eine Basis aus Dirichlet-Reihen, die sämtlich eine vollständige Eulersche Produktentwicklung zulassen. Ihr  $Q$ -Bestandteil hat (abgesehen von einem Faktor  $t^{-s}$ ) die Gestalt (35).*

Im letzten Abschnitt wird ein Konstruktionsverfahren entwickelt, das die explizite Bestimmung einer Basis von  $\mathfrak{S}(t, z, Q, o)$  durch die Umsetzungsmatrizen  $\lambda(q_i)$  ( $1 \leq i \leq h$ ) ermöglicht. Auch dieses Verfahren läßt sich in den allgemeinen Scharen  $\mathfrak{B}$  von beliebiger Signatur  $\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\}$  durchführen. Sei also  $\mathfrak{B}$  eine solche Schar. Nach bekannten Sätzen der linearen Algebra existiert eine Basis von  $\mathfrak{B}$ , deren Umsetzungsmatrizen  $A_i$  bei Anwendung der Operatoren  $V_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ) sämtlich Dreiecksgestalt haben, d. h. oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen als Elemente enthalten. Sieht man die Elemente dieser Matrizen  $A_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ) als gegeben an, so lassen sich nun aus ihnen die Funktionen der genannten Basis explizit und abgesehen von gewissen  $\mu$  Konstanten vollständig bestimmen. Das dabei verwendete Konstruktionsverfahren macht von der linearen Unabhängigkeit der Basisfunktionen keinen Gebrauch. Die damit erhaltene Aussage besteht also für irgendein System von  $\mu$  Funktionen, das sich bei Ausübung der Operatoren nach den gegebenen Dreiecksmatrizen  $A_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ) umsetzt.

## 2. Durchführung der Beweise.

### 2. 1. Es seien

$$t = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_h^{\gamma_h} q_{h+1}^{\gamma_{h+1}} q_{h+2}^{\gamma_{h+2}} \dots q_N^{\gamma_N},$$

$$Q = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_h^{\gamma_h} q_{h+1}^{\delta_{h+1}} q_{h+2}^{\delta_{h+2}} \dots q_N^{\delta_N}$$

die Primzahlzerlegungen von  $t$  und  $Q$ , wo die  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h$ , und die  $\delta_{h+1}, \delta_{h+2}, \dots, \delta_N$  natürliche, die  $\gamma_{h+1}, \gamma_{h+2}, \dots, \gamma_N$  ganze Zahlen mit

$$0 \leq \gamma_i < \delta_i \quad (i = h+1, h+2, \dots, N)$$

darstellen. Die Reihenfolge der  $q_1, q_2, \dots, q_h$  und ebenso die der  $q_{h+1}, q_{h+2}, \dots, q_N$  ist willkürlich. Die Primzahlen  $q_1, q_2, \dots, q_h$  sind die sämtlichen Primteiler von  $t$ , die nicht in  $t_1 = \frac{Q}{t}$  aufgehen. Wir setzen  $h \geq 1$  voraus; möglicherweise ist  $h = N$ .

Für jedes  $i = 1, 2, 3, \dots, h$  bezeichne  $\mathfrak{R}_i$  die Gesamtheit der  $m$  von der Gestalt  $m = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_i^{k_i}$  mit ganzen, nichtnegativen  $k_1, k_2, \dots, k_i$ . Der Buchstabe  $\mathfrak{R}_i$  unter einem Summenzeichen bedeutet die Summationsbedingung  $m \in \mathfrak{R}_i$  für den Summationsbuchstaben  $m$ .

Wir wenden Satz 16 in (K II) auf die volle Schar  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  an. Ist  $\mathfrak{o}$  einer der Vektoren  $\mathfrak{o}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ , und jetzt  $M$  der Rang von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ ), so bezeichnen wir die zu  $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_i$  gehörige der in Satz 16, (K II) erklärten Teilscharen  $\mathfrak{S}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) mit  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  oder kürzer mit  $\mathfrak{S}; t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o}$  sind für die fernere Untersuchung fest gewählt. Den Rang von  $\mathfrak{S}$  nennen wir  $\mu$ .  $\mathfrak{S}$  besteht aus allen und nur denjenigen Formen von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ , die bei Anwendung eines jeden  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  den Faktor  $\omega(n)$  aufnehmen; dabei ist  $\omega(n) = \omega_i(n)$  die zu  $n$  gehörige Komponente von  $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_i$ . Mithin ist die Schar  $\mathfrak{S}$  gegenüber allen Operatoren  $T_m^i$  ( $m \geq 1$ ) invariant. Denn nach (T<sub>n</sub> II), Satz 37 und Satz 38.1 ergibt die Anwendung eines Operators  $T_{q_i}^i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, h$ ) auf eine Form  $\varphi(\tau)$  von  $\mathfrak{S}$  wieder eine Form  $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau) | T_{q_i}^i$  von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ , die bei Ausübung eines jeden  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  den Faktor  $\omega(n)$  aufnimmt.

Die einer Form (29) aus  $\mathfrak{S}$  zugeordnete Dirichlet-Reihe (30) gestattet die Darstellung (32), wo mit der Bedeutung von  $a_m$  in (29):

$$(36) \quad K(s) = K(s; \varphi) = \sum_{\mathfrak{R}_h} a_m m^{-s}.$$

Wir nennen  $K(s)$  den Kern von  $D(s)$  und auch den Kern von  $\varphi(\tau)$ . Die Menge der Kerne  $K(s) = K(s; \varphi)$  der Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{S}$  bildet eine zu  $\mathfrak{S}$  linear-isomorphe Schar  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(t, \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  (vom Range  $\mu$ ), und der Operator  $V_i$ , der  $K(s) = K(s; \varphi)$  in

$$(37) \quad K(s) | V_i = K(s; \varphi) | V_i = K(s; \varphi | T_{q_i}^i) \subset \mathfrak{D} \quad (1 \leq i \leq h)$$

überführt, bewirkt

$$(38) \quad K(s) | V_i = \sum_{\mathfrak{R}_h} a_m q_i m^{-s}.$$

Im folgenden soll zunächst der Fall  $h = 1$  erörtert werden; dabei schreiben wir  $q, V$  für  $q_1, V_1$  und  $u$  für  $q^{-s}$ ,  $b_n$  für  $a_{q^n}$ , so daß also

$$K(s) = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \quad f(u) | V = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} u^n.$$

Die Schar der so entstehenden Potenzreihen  $f(u)$  werde wieder mit  $\mathfrak{D}$  bezeichnet.

Ein Vektor  $f(u) = \{f_1(u), f_2(u), \dots, f_\mu(u)\}$ , dessen Komponenten eine Basis von  $\mathfrak{D}$  bilden (kurz Basisvektor von  $\mathfrak{D}$  genannt), erfährt bei Anwendung des Operators  $V$  die Umsetzung mit einer gewissen konstanten Matrix  $A$ . In der Heckschen Terminologie ist  $A$  diejenige Matrix  $\lambda(q)$ , nach der sich die Basisformen  $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\mu(\tau)$  von  $\mathfrak{S}$ , die durch

$$D(s; \varphi_k) = t^{-s} f_k(q^{-s}) P(s; \varepsilon, Q, 0) \quad (1 \leq k \leq \mu)$$

gegeben sind, bei Anwendung des Operators  $T'_q$  umsetzen. Es sei  $J$  die Jordansche Normalform von  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

ein Diagonalkästchen des Grades  $\lambda$  von  $J$ ,  $g(u) = \{g_1(u), g_2(u), \dots, g_\lambda(u)\}$  ein Basisvektor der  $A$  zugeordneten invarianten Teilschar  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{D}$ . Dann erfahren die Komponenten

$$(39) \quad g_j(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{j,n} u^n \quad (j = 1, 2, \dots, \lambda)$$

von  $g(u)$  bei Anwendung des Operators  $V$  die Umsetzung

$$(40) \quad \begin{aligned} g_1(u) | V &= \alpha g_1(u), \\ g_j(u) | V &= g_{j-1}(u) + \alpha g_j(u) \quad (j = 2, 3, \dots, \lambda; \lambda \geq 2). \end{aligned}$$

Man erkennt nun mit vollständiger Induktion den folgenden elementaren Sachverhalt: Es sei (39) irgendein System von Potenzreihen  $g_j(u)$ , die sämtlich nicht nur für  $u = 0$  konvergieren, und die sich bei Anwendung des Operators  $V$  nach den Gleichungen (40) umsetzen. Dabei bedeutet jetzt  $\lambda$  irgendeine vorgegebene natürliche,  $\alpha$  irgendeine vorgegebene komplexe Zahl;  $\alpha$  kann Null sein. Wird in Übereinstimmung mit (35)

$$(41) \quad w_r(u, \alpha) = u^{r-1} (1 - \alpha u)^{-r} \quad (v \text{ eine natürliche Zahl})$$

gesetzt, so gilt dann

$$(42) \quad g_j(u) = \sum_{r=1}^j c_{j-r+1,0} w_r(u, \alpha).$$

Umgekehrt hat das System der Funktionen

$$g_j(u) = \sum_{r=1}^j c_{j-r+1} w_r(u, \alpha) \quad (1 \leq j \leq \lambda)$$

die genannten Eigenschaften, wenn die komplexen Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_\lambda$  willkürlich vorgegeben werden, und es fällt auch  $c_j$  mit dem Anfangskoeffizienten  $c_{j,0}$  der Potenzreihe (39) von  $g_j(u)$  zusammen. Da die  $w_\nu(u, \alpha)$  ( $1 \leq \nu \leq \lambda$ ) offenbar linear unabhängig sind, so sind die  $g_j(u)$  ( $1 \leq j \leq \lambda$ ) dann und nur dann linear unabhängig, wenn  $c_{1,0} \neq 0$ . In diesem Falle spannen also die  $w_\nu(u, \alpha)$  ( $1 \leq \nu \leq \lambda$ ) die gleiche Schar auf, wie die  $g_j(u)$  ( $1 \leq j \leq \lambda$ ).

Unser ursprüngliches Problem ist damit für  $h = 1$  bereits gelöst. Wir bemerken noch erstens, daß die invariante Teilschar  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{D}$  vermöge der Existenz einer Basis  $g(u)$  mit der Eigenschaft  $g(u)|V = A g(u)$  durch  $\alpha$  und  $\lambda$  eindeutig bestimmt ist; zweitens, daß in der Jordanschen Normalform  $J$  von  $A$  keine der charakteristischen Wurzeln  $\alpha$  von  $A$  in zwei verschiedenen Diagonalkästchen auftritt. Dies besagt, daß das Minimalpolynom von  $A$  der einzige nicht-konstante Elementarteiler der Polynommatrix  $A - \alpha I$  ( $I$  die Einheitsmatrix) ist, daß also das Minimalpolynom (bis auf das Vorzeichen) mit dem charakteristischen Polynom zusammenfällt, und daß daher  $\lambda$  die Vielfachheit der charakteristischen Wurzel  $\alpha$  der Matrix  $A$  angibt. Wir formulieren die bisher gewonnenen Ergebnisse in zwei Sätzen:

**Satz 21.** Es sei  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$  wie in Satz 5 erklärt,  $M$  der Rang von  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ , und es werde für ein festes  $i = 1, 2, 3, \dots, M: \omega = \omega_i$ , also für alle natürlichen  $n$  mit  $(n, Q) = 1: \omega(n) = \omega_i(n)$  geschrieben. Die lineare Schar derjenigen Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q)$ , welche bei Anwendung eines jeden Operators  $T_n$  mit  $(n, Q) = 1$  den Faktor  $\omega(n)$  aufnehmen, heiße  $\mathfrak{S}(t, \varepsilon, Q, \omega)$  oder kürzer  $\mathfrak{S}$ . Entsprechend heiße  $\mathfrak{I}(t, \varepsilon, Q, \omega) = \mathfrak{I}$  die lineare Schar der diesen Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{S}$  zugeordneten Dirichlet-Reihen  $D(s)$ . Die Schar  $\mathfrak{S}$  ist gegenüber allen Operatoren  $T_m^*$  ( $m \geq 1$ ) invariant. Die einer Form (29) von  $\mathfrak{S}$  zugeordnete Dirichlet-Reihe (30) gestattet eine Produktzerlegung von der Gestalt (32), wo  $K(s)$ , der Kern von  $D(s)$ , durch (36) gegeben ist. Dabei entstammen die Koeffizienten  $a_m$  in der Reihe für  $K(s)$  der Darstellung (29) von  $\varphi(\tau)$ . Der Faktor  $t^{-s} P(s; \varepsilon, Q, \omega)$  ist bei allen  $D(s)$  aus  $\mathfrak{I}$  der gleiche. Die Kerne  $K(s)$  der Dirichlet-Reihen  $D(s)$  aus  $\mathfrak{I}$  bilden also eine zu  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{I}$  linear-isomorphe Schar  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(t, \varepsilon, Q, \omega)$ . Besitzt eine Dirichlet-Reihe  $H(s)$ , die einer ganzen Spitzenform der Stufe  $Q$  vom Teiler  $t$  zugeordnet ist, eine Produktzerfällung von der Gestalt (19), (K II), so gibt es einen Charakter  $\varepsilon(n) \bmod Q$  und einen Eigenwertvektor  $\omega_i = \omega$  derart, daß  $H(s)$  in  $\mathfrak{I}(t, \varepsilon, Q, \omega)$  liegt, daß also

$$H^{(Q)}(s) \in \mathfrak{D}, \quad \sum_{p=0}^{\infty} c(p^s) p^{-s} = \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s} + \frac{p^{r-1} \varepsilon(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

für jede Primzahl  $p$ , die nicht in  $Q$  aufgeht.

**Satz 22.** Es existiere eine einzige Primzahl  $q$ , welche in  $t$  nicht aber in  $t_1 = \frac{Q}{t}$  aufgeht. Dann bilden die Funktionen

$$K(s) = w(q^{-s}, \alpha) = q^{-(r-1)s} \left(1 - \frac{\alpha}{q^s}\right)^{-r}$$

eine Basis der Schar  $\mathfrak{D}(t, z, Q, \alpha)$ , wenn für  $\alpha$  die verschiedenen charakteristischen Wurzeln der in  $\mathfrak{S}(t, z, Q, \alpha)$  erklärten linearen Transformation  $T_\alpha^t$  und zu jedem dieser  $\alpha$  für  $\nu$  die natürlichen Zahlen, bis zur Vielfachheit der charakteristischen Wurzel  $\alpha$  ansteigend, eingesetzt werden. Die lineare Transformation  $T_\alpha^t$  besitzt (als Transformation in  $\mathfrak{S}(t, z, Q, \alpha)$ ) einen einzigen von Eins verschiedenen Elementarteiler, der also mit dem Minimalpolynom und dem charakteristischen Polynom von  $T_\alpha^t$  zusammenfällt.

2.2. Um für  $h \geq 2$  ein Ergebnis dieser Art zu erhalten, setzen wir, wenn  $K(s) \in \mathfrak{D}$  durch die Reihe (36) gegeben ist,

$$K^{(i)}(s) = (K(s))^{(i)} = \sum_{\mathfrak{A}_i} a_m m^{-s} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, h).$$

Liegen die Dirichlet-Reihen  $K_1(s), K_2(s), \dots, K_N(s)$  sämtlich in  $\mathfrak{D}$ , so gilt mit beliebigen komplexen  $x_1, x_2, \dots, x_N$ :

$$\left( \sum_{r=1}^N x_r K_r(s) \right)^{(i)} = \sum_{r=1}^N x_r K_r^{(i)}(s) \quad (1 \leq i \leq h).$$

Also bilden die Funktionen  $K^{(i)}(s)$  mit  $K(s) \in \mathfrak{D}$  eine lineare Schar  $\mathfrak{D}^{(i)}$  von einem Range  $\mu_i \leq \mu$ . Offenbar ist  $\mu - \mu_i$  der Rang der Teilschar  $\mathfrak{D}_i$  derjenigen  $L(s)$  aus  $\mathfrak{D}$ , für die  $L^{(i)}(s)$  identisch verschwindet. Man entnimmt ferner aus (37), (38), daß, wenn  $K(s) \in \mathfrak{D}$  durch die Reihe (36) gegeben ist,

$$K^{(i)}(s) | V_\varrho = (K(s) | V_\varrho)^{(i)} = \sum_{\mathfrak{A}_i} a_m a_\varrho m^{-s} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, i).$$

Daher ist die Schar  $\mathfrak{D}^{(i)}$  gegenüber allen Operatoren  $V_\varrho$  mit  $\varrho = 1, 2, \dots, i$  invariant.

Wir bezeichnen für das folgende mit  $A$  diejenige Matrix, nach der sich irgendeine Basis von  $\mathfrak{D}$  bei Anwendung des Operators  $V_A = V$  umsetzt, mit  $J$  die Jordansche Normalform von  $A$ , und für  $i = 1, 2, \dots, h$  mit  $\zeta_i(x)$  das Minimalpolynom der in der Schar  $\mathfrak{D}^{(i)}$  erklärten linearen Transformation  $V_i$ . Bilden die Funktionen  $K_j^{(i)}(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, \mu_i$ ) eine Basis von  $\mathfrak{D}^{(i)}$ , so ergänze man die Funktionen  $K_j(s)$  aus  $\mathfrak{D}$  durch Hinzunahme einer Basis  $K_k(s)$  ( $k = \mu_i + 1, \mu_i + 2, \dots, \mu; \mu_i < \mu$ ) von  $\mathfrak{D}_i$  zu einer Basis von  $\mathfrak{D}$ . Da  $\mathfrak{D}_i$  bei  $V_i$  invariant ist, so erkennt man, daß  $\zeta_i(x)$  in dem Minimalpolynom der in  $\mathfrak{D}$  erklärten linearen Transformation  $V_i$  aufgeht.

Wir schreiben nun  $V_A = V$ ,  $q_A = q$ ,  $q^{-s} = u$  und  $A$  für ein Diagonalkästchen der Matrix  $J$ ;  $A$  sei die unter 2.1 dargestellte Matrix. Ist

$$g(s) = \{g_1(s), g_2(s), \dots, g_\lambda(s)\}, \quad g_j(s) = \sum_{\mathfrak{A}_\lambda} c_{j,m} m^{-s} \quad (1 \leq j \leq \lambda)$$

eine Basis der zu  $A$  gehörigen invarianten Teilschar von  $\mathfrak{D}$ , also  $g(s) | V = A g(s)$ , so gilt

$$c_{1,m} = \alpha c_{1,m}, \quad c_{j,m} = c_{j-1,m} + \alpha c_{j,m} \quad (j = 2, 3, \dots, \lambda, \lambda \geq 2; m \in \mathfrak{A}_\lambda).$$

Setzt man

$$c_{j, k}^n = c_{j, n}(k), \quad g_j(u, k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{j, n}(k) u^n \quad (1 \leq j \leq \lambda, \quad k \in \mathfrak{A}_{h-1}),$$

so bestehen für diese  $g_j(u, k)$  bei festem  $k$  die Umsetzungsformeln (40). Daher erhält man nach (42)

$$g_j(u, k) = \sum_{r=1}^j c_{j-r+1, 0}(k) w_r(u, \alpha) \quad (1 \leq j \leq \lambda).$$

Überdies ist im Gebiete absoluter Konvergenz

$$g_j(s) = \sum_{k \in \mathfrak{A}_{h-1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{j, n}(k) u^n k^{-s} = \sum_{k \in \mathfrak{A}_{h-1}} g_j(u, k) k^{-s} \quad (1 \leq j \leq \lambda),$$

also

$$g_j(s) = \sum_{r=1}^j \left( \sum_{k \in \mathfrak{A}_{h-1}} c_{j-r+1, r} k^{-s} \right) w_r(u, \alpha) = \sum_{r=1}^j g_{j-r+1}^{(h-1)}(s) w_r(u, \alpha).$$

Um hieraus die Darstellung einer beliebigen Funktion  $K(s)$  von  $\mathfrak{D}$  herzuleiten, denken wir uns die Zahlen  $\alpha$ , die bei der Zerlegung von  $\mathfrak{D}$  in die gegenüber  $V$  invarianten Teilscharen (entsprechend der Zerlegung von  $J$  in Diagonalkästchen  $A$ ) auftreten, durch  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ , die zugehörigen Kästchengrade durch  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  und eine Basis der zu  $\alpha_i, \lambda_i$  gehörigen invarianten Teilschar von  $\mathfrak{D}$  durch die Funktionen

$$g_{l, j}(s) \quad (1 \leq j \leq \lambda_i; \quad l = 1, 2, \dots, d)$$

gegeben. Dann ist

$$(43) \quad K(s) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{\lambda_i} C_{l, j} g_{l, j}(s) = \sum_{i=1}^d \sum_{r=1}^{\lambda_i} f_{l, r}^{(h-1)}(s) w_r(u, \alpha_i)$$

mit konstanten  $C_{l, j}$  und

$$f_{l, r}^{(h-1)}(s) = \sum_{j=1}^{\lambda_i} C_{l, j} g_{l, j-r+1}(s), \quad f_{l, r}^{(h-1)}(s) \in \mathfrak{D}^{(h-1)}.$$

Die zweite Doppelsumme in (43) kann offenbar in eine Summe der gleichen Gestalt verwandelt werden, in der  $\alpha_i$  nur die (paarweise verschiedenen) charakteristischen Wurzeln der (in  $\mathfrak{D}$  erklärten) linearen Transformation  $V_{\lambda}$  je einfach durchläuft, und die natürliche Zahl  $r$  bis zur Vielfachheit von  $\alpha_i$  im Minimalpolynom  $\zeta_{\lambda}(x)$  von  $V_{\lambda}$  ansteigt. Da die hierbei auftretenden Koeffizienten aus  $\mathfrak{D}^{(h-1)}$  eine analoge Darstellung zulassen, in der  $h-1$  an die Stelle von  $h$  und demgemäß  $\mathfrak{D}^{(h-1)}$  an die Stelle von  $\mathfrak{D}^{(h)}$  tritt, ist jetzt insgesamt folgendes bewiesen:

**Satz 23.** Es sei  $h \geq 2$ ,  $i$  eine der Zahlen  $1, 2, 3, \dots, h$ . Man streiche in der Reihendarstellung (36) einer Funktion  $K(s)$  aus  $\mathfrak{D}$  die Glieder, in deren  $m$  eine der Primzahlen  $q_{i+1}, q_{i+2}, \dots, q_h$  aufgeht. Die Gesamtheit der so bei festem  $i$  entstehenden Funktionen  $K^{(i)}(s)$  mit  $K(s) \in \mathfrak{D}$  ist eine lineare Schar  $\mathfrak{D}^{(i)}$  von ein  $\supset$  Range  $\mu_i \leq \mu$ .  $\mathfrak{D}^{(i)}$  ist gegenüber allen Operatoren  $V_{\rho}$  mit  $\rho = 1, 2, \dots, i$

invariant. Es bezeichne  $\zeta_i(x)$  das Minimalpolynom der in  $\mathfrak{D}^{(i)}$  erklärten linearen Transformation  $V_i$ ,  $G_i$  den Grad von  $\zeta_i(x)$ . ( $\zeta_i(x)$  teilt das Minimalpolynom der in  $\mathfrak{D}$  erklärten linearen Transformation  $V_i$ .) Man bilde die  $G = G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_h$  Funktionen

$$(44) \quad w_{\nu_1}(u_1, \alpha_1) \cdot w_{\nu_2}(u_2, \alpha_2) \cdot \dots \cdot w_{\nu_h}(u_h, \alpha_h) \quad (u_i = q_i^{-s}, i = 1, 2, 3, \dots, h),$$

in welche für jedes  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) eine beliebige der Nullstellen von  $\zeta_i(x)$  und für jedes  $\nu_i$  eine natürliche Zahl eingesetzt wird; dabei ist der Index  $\nu_i$  in dem Faktor  $w_{\nu_i}(u_i, \alpha_i)$  höchstens gleich der Vielfachheit der Nullstelle  $\alpha_i$  des Polynoms  $\zeta_i(x)$ . Dann gilt: Die  $G$  Funktionen (44) erzeugen die Schar  $\mathfrak{D}$ , d. h. jedes  $K(s)$  aus  $\mathfrak{D}$  ist eine Linearkombination der Funktionen (44) mit komplexen konstanten Koeffizienten. Im übrigen enthält diese Aussage den Satz (22) als Spezialfall ( $h = 1$ ).

2. 3. Beim Beweise von Satz 23 spielt die Herkunft der Funktionenschar  $\mathfrak{D}$  von den Modulformen aus  $\mathfrak{S}(t, s, Q, o)$  ersichtlich keine Rolle. Satz 23 gilt also wörtlich für alle linearen Funktionenscharen  $\mathfrak{B}$  von endlichem Rang, die die folgenden zwei Eigenschaften aufweisen:

Es sei  $h$  eine beliebige natürliche Zahl, und es seien  $h$  paarweise verschiedene Primzahlen  $q_1, q_2, \dots, q_h$  willkürlich vorgegeben. Die beiden Eigenschaften besagen:

I. Jede Funktion aus  $\mathfrak{B}$  ist eine (irgendwo konvergente) Dirichlet-Reihe von der Gestalt

$$K(s) = \sum_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}} m^{-s}.$$

II.  $\mathfrak{B}$  ist gegenüber allen Operatoren  $V_\varrho$  ( $\varrho = 1, 2, \dots, h$ ) invariant; d. h. mit  $K(s)$  liegen die  $h$  Funktionen  $K(s) | V_\varrho$  sämtlich in  $\mathfrak{B}$ .

Eine lineare Funktionenschar  $\mathfrak{B}$  von dieser Beschaffenheit werde, wenn  $\mu$  ihren Rang angibt, als eine Schar von der Signatur  $\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\}$  bezeichnet. Eine solche Schar  $\mathfrak{B}$  hat nun stets zwei weitere Eigenschaften, die sich nach Wahl einer Basis

$$(45) \quad \mathfrak{K}(s) = (K_1(s), K_2(s), \dots, K_\mu(s)) = \sum_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}} m^{-s},$$

$$a_{\mathfrak{m}} = (a_{1, \mathfrak{m}}, a_{2, \mathfrak{m}}, \dots, a_{\mu, \mathfrak{m}})$$

in der folgenden Weise ausdrücken lassen:

Es sei

$$(46) \quad \mathfrak{K}(s) | V_i = \Lambda(q_i) \mathfrak{K}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

a) Dann sind die Matrizen  $\Lambda(q_i)$  paarweise vertauschbar, und der von ihnen erzeugte Matrizenring  $\mathfrak{M}$  ist maximal, d. h. jede mit allen  $\Lambda(q_i)$  ( $1 \leq i \leq h$ ) vertauschbare Matrix des Grades  $\mu$  liegt in  $\mathfrak{M}$ , ist also ein Polynom in den  $\Lambda(q_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) mit skalaren Koeffizienten.

b) Man setze

$$(47) \quad \Lambda(m) = (\lambda_{j,k}(m)) = \prod_{i=1}^h \Lambda(q_i)^{t_i}, \text{ wenn } m = \prod_{i=1}^h q_i^{t_i} \in \mathfrak{R}_h$$

und bilde die Funktionenmatrix

$$(48) \quad \mathfrak{L}(s) = \sum_{\mathfrak{R}_h} \Lambda(m) m^{-s} = (L_{j,k}(s)); L_{j,k}(s) = \sum_{\mathfrak{R}_h} \lambda_{j,k}(m) m^{-s} \\ (j, k = 1, 2, 3, \dots, \mu).$$

Dann liegen alle diese Funktionen  $L_{j,k}(s)$  in  $\mathfrak{B}$  und erzeugen  $\mathfrak{B}$ , d. h.  $\mathfrak{B}$  ist mit der Menge der Linearkombinationen der  $\mu^2$  Funktionen  $L_{j,k}(s)$  identisch.

Es soll eine kurze Begründung dieser Behauptungen für diejenigen Scharen  $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}(t, s, Q, o)$  ausgeführt werden, die mit den aus Modulformen gebildeten Scharen  $\mathfrak{S}(t, s, Q, o)$  in der eingangs beschriebenen Weise verknüpft sind.

Die erste Aussage ergibt sich aus dem Verhalten derjenigen Basis  $q(\tau)$  von  $\mathfrak{S}(t, s, Q, o)$ , deren Elemente den Komponenten des Vektors  $t^{-s} \mathfrak{R}(s) P(s; s, Q, o)$  entsprechen. Für natürliches  $n$  mit  $(n, Q) = 1$  gilt  $q(\tau) | T_n = \omega(n) q(\tau)$ ; also erweist sich  $\Lambda(n) = \omega(n) I$  als die dem Operator  $T_n$  in der Basis  $q(\tau)$  zugeordnete Matrix ( $I$  bezeichnet die Einheitsmatrix des Grades  $\mu$ ). Mit dieser Matrix  $\Lambda(n)$  ist einerseits jede Matrix vertauschbar, und sie liegt andererseits in jedem Matrizenring, der die Einheitsmatrix enthält.

Die zweite Aussage beruht auf der Gleichung  $(T_n \text{ II})$ , (20), die für die hier diskutierte Schar  $\mathfrak{S}(t, s, Q, o)$  die Gestalt

$$\Phi(s) = t^{-s} \mathfrak{L}(s) P(s; s, Q, o)$$

annimmt. Vorher wird in  $(T_n \text{ II})$  bewiesen, daß die Elemente von  $\Phi(s)$  in  $\mathfrak{I}(t, s, Q, o)$  liegen und  $\mathfrak{I}(t, s, Q, o)$  aufspannen. Im übrigen ist

$$(49) \quad \mathfrak{L}(s) = \prod_{i=1}^h (I - \Lambda(q_i) q_i^{-s})^{-1}$$

Es sei nun eine allgemeine Schar  $\mathfrak{B}$  von der Signatur  $\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\}$  vorgelegt. Dann läßt sich die Hecke'sche Theorie in  $(T_n \text{ I})$ , § 3 vollständig auf die in  $\mathfrak{B}$  erklärten Operatoren  $V_\varrho$  ( $\varrho = 1, 2, 3, \dots, h$ ) übertragen. Daher bestehen die genannten beiden Aussagen auch stets für die allgemeinen Scharen  $\mathfrak{B}$  von beliebiger Signatur. Die Übertragung soll hier nicht dargestellt werden. Es sei nur bemerkt, daß sie von den zu  $(T_n \text{ I})$ , (19) analogen, aber einfacheren Grundgleichungen

$$a_{km} = \Lambda(m) a_k = \Lambda(k) a_m \quad (mk \in \mathfrak{R}_h) \quad (\text{speziell } a_m = \Lambda(m) a_1)$$

ausgeht und über die Formeln

$$\Lambda(m) = \sum_{r=1}^n a_{r,m} B_r, \quad \mathfrak{L}(s) = \sum_{r=1}^n K_r(s) B_r$$

zu den genannten Ergebnissen führt. Zwischen  $\mathfrak{R}(s)$  und  $\mathfrak{L}(s)$  besteht die einfache Beziehung

$$\mathfrak{R}(s) = \mathfrak{L}(s) a_1.$$

Wir formulieren zusammenfassend:

**Satz 24.** *Es sei  $\mathfrak{B}$  eine Schar von der Signatur  $\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\}$ , also eine Schar mit den obengenannten Eigenschaften I., II. Dann gilt für  $\mathfrak{B}$  der Satz 23. Es sei ferner durch (45) ein Basisvektor  $\mathfrak{R}(s)$  von  $\mathfrak{B}$  gegeben, welcher sich bei Ausübung der Operatoren  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) nach den Formeln (46) umsetzt. Dann sind die Matrizen  $\Lambda(q_i)$  ( $1 \leq i \leq h$ ) paarweise vertauschbar, und der von den  $\Lambda(q_i)$  erzeugte Matrizenring  $\mathfrak{M}$  ist maximal, d. h. jede mit allen  $\Lambda(q_i)$  vertauschbare Matrix liegt in  $\mathfrak{M}$ . ( $\mathfrak{M}$  besteht aus den sämtlichen Polynomen in den  $\Lambda(q_i)$  mit skalaren Koeffizienten.) Man bilde mit den  $\Lambda(m)$  aus (47) die durch (48) erklärte Matrix  $\mathfrak{L}(s)$ . Dann ist  $\mathfrak{B}$  mit der von den  $\mu^2$  Funktionen  $L_{j,k}(s)$  ( $j, k = 1, 2, 3, \dots, \mu$ ) erzeugten linearen Schar identisch. Ist also  $\mathfrak{B}^*$  eine Schar von der gleichen Signatur  $\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\}$  wie  $\mathfrak{B}$ , und besitzt  $\mathfrak{B}^*$  eine Basis  $\mathfrak{R}^*(s)$ , die sich bei Ausübung der  $V_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ) nach den gleichen Matrizen  $\Lambda(q_i)$  umsetzt wie  $\mathfrak{R}(s)$ , so ist  $\mathfrak{B}^*$  mit  $\mathfrak{B}$  identisch. Ein Basisvektor  $\mathfrak{H}(s)$  von  $\mathfrak{B}$  erfährt bei Ausübung der  $V_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ) die Umsetzungen mit den gleichen Matrizen  $\Lambda(q_i)$  wie  $\mathfrak{R}(s)$  dann und nur dann, wenn  $\mathfrak{H}(s) = M \mathfrak{R}(s)$ , wo  $M$  eine umkehrbare Matrix des Ringes  $\mathfrak{M}$  bezeichnet.*

Auf die Frage, wie sich diejenigen Scharen  $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}(t, s, Q, o)$ , welche mit den aus Modulformen gebildeten Scharen  $\mathfrak{S}(t, s, Q, o)$  verknüpft sind, innerhalb der Menge aller Scharen  $\mathfrak{B}$  von der gleichen Signatur auszeichnen, soll hier nicht eingegangen werden. Man hätte zu diesem Zwecke zu untersuchen, wie sich die Formen von  $\mathfrak{S}(t, s, Q, o)$  bei Anwendung der Substitutionen der vollen Modulgruppe verhalten.

2. 4. Die oben entwickelte Theorie der allgemeinen Scharen  $\mathfrak{B}$  von der Signatur  $\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\}$  führt auf das nachstehend formulierte algebraische Problem: Man gebe für eine zu konstruierende Schar  $\mathfrak{B}$  die Signatur

$$\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\} \text{ und die } h \text{ Matrizen } \Lambda(q_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, h)$$

des Grades  $\mu$  willkürlich, aber unter der Einschränkung vor, daß die Matrizen  $\Lambda(q_i)$  paarweise vertauschbar sind, und daß der von ihnen erzeugte Matrizenring maximal ist. Existiert dann eine Schar  $\mathfrak{B}$  von der gegebenen Signatur mit einer Basis, welche sich bei Ausübung der  $V_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ) nach den gegebenen Matrizen  $\Lambda(q_i)$  umsetzt?

Diese Frage ist zu verneinen, wie das Beispiel des Matrizenringes (40) in ( $T_n$  I), S. 22 zeigt. Sie ist dagegen in dem einfachsten nicht-trivialen Spezialfall  $\mu = h = 2$  zu bejahen; dieser Spezialfall soll hier kurz abgehandelt werden. Im übrigen ist die gestellte Frage natürlich allgemein zu bejahen, wenn man die Vertauschbarkeit der Matrizen  $\Lambda(q_i)$  ( $1 \leq i \leq h$ ) und zusätzlich fordert,

daß ein Vektor  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu\}$  und  $\mu$  Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_\mu$  aus  $\mathbb{R}_h$  existieren sollen derart, daß die Vektoren  $A(m_i)\alpha$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) linear unabhängig sind.

Von den beiden gegebenen Matrizen  $A_1 = A(q_1)$ ,  $A_2 = A(q_2)$  kann man sich stets die eine, etwa  $A_1$ , in der Jordanschen Normalform vorgelegt denken. Es sei zunächst  $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ . Die mit  $A_1$  vertauschbare Matrix  $A_2$  hat notwendig die Gestalt  $A_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \partial & \beta \end{pmatrix}$ . Der von diesen  $A_1, A_2$  erzeugte Matrizenring  $\mathfrak{M}$  ist immer maximal, weil man aus  $I$  und  $A_1$  jede Matrix von der Form  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$  linear kombinieren kann. Andererseits sind die Funktionen

$$(50) \quad \begin{cases} K_1(s) = w_1(u_1, \alpha) w_1(u_2, \beta), \\ K_2(s) = w_2(u_1, \alpha) w_1(u_2, \beta) + \partial w_1(u_1, \alpha) w_2(u_2, \beta) \end{cases}$$

$$(u_i = q_i^{-s}, i = 1, 2)$$

linear-unabhängig und setzen sich bei Anwendung von  $V_1, V_2$  nach den gegebenen Matrizen  $A_1, A_2$  um.

Ist zweitens  $A_1$  in der Gestalt  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$  mit  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  vorgelegt, so hat  $A_2$  Diagonalform  $\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathfrak{M}$  ist maximal und die linear-unabhängigen Funktionen

$$K_1(s) = w_1(u_1, \alpha_1) w_1(u_2, \beta_1), \quad K_2(s) = w_1(u_1, \alpha_2) w_1(u_2, \beta_2)$$

bilden (in Analogie zu den Konsequenzen des Hauptachsentheorems) einen Vektor, der die gewünschten Umsetzungen erfährt.

Ist schließlich  $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , so kann man  $A_2$ , ohne  $A_1$  zu ändern, auf die Jordansche Normalform transformieren und kommt damit, von dem unmöglichen Fall  $A_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  abgesehen, auf die bereits behandelten Fälle zurück.

Die Basiseigenschaft des Systems (50) folgt aus einem allgemeinen Satz über die lineare Unabhängigkeit von  $w$ -Produkten der Gestalt (44): Es seien  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h$  beliebige, aber fest gegebene komplexe Zahlen. Eine Relation

$$\sum C_{r_1, r_2, \dots, r_h} w_{r_1}(u_1, \alpha_1) w_{r_2}(u_2, \alpha_2) \dots w_{r_h}(u_h, \alpha_h) = 0 \quad (u_i = q_i^{-s}),$$

in der die  $C_{r_1, r_2, \dots, r_h}$  komplexe Konstanten bedeuten, und in der über endlich viele, paarweise verschiedene Vektoren  $\{v_1, v_2, \dots, v_h\}$  mit natürlichen  $v_i$  als Komponenten summiert wird, gilt nur dann, wenn alle Koeffizienten  $C_{r_1, r_2, \dots, r_h}$  verschwinden. Der Beweis läßt sich am einfachsten auf Grund der Formel

$$w_{a+b}(u, \alpha) = u w_a(u, \alpha) w_b(u, \alpha) \quad (a \text{ und } b \text{ ganz } \geq 1)$$

durch vollständige Induktion nach  $h$  erbringen.

Dieser Unabhängigkeitssatz führt bei den Scharen  $\mathfrak{B}$ , die von den Funktionen (50) für  $\partial \neq 0$  erzeugt werden, auf folgende Tatsachen: Die einzige

Funktion von der Produktgestalt  $f_{r_1, r_2}(s) = w_{r_1}(u_1, \alpha) w_{r_2}(u_2, \beta)$ , die in  $\mathfrak{B}$  enthalten ist, ist  $K_1(s)$ .  $\mathfrak{B}$  hat weder eine Basis aus zwei Funktionen von dieser Gestalt  $f_{r_1, r_2}(s)$ , noch auch nur eine Basis aus zwei Produkten von der allgemeineren Gestalt

$$\left( \sum_{r_1=1}^{N_1} C_{1, r_1} w_{r_1}(u_1, \alpha) \right) \left( \sum_{r_2=1}^{N_2} C_{2, r_2} w_{r_2}(u_2, \beta) \right);$$

denn ein in  $\mathfrak{B}$  enthaltenes Produkt von dieser allgemeineren Beschaffenheit ist bis auf einen konstanten Faktor mit  $K_1(s)$  identisch.

2. 5. Das in der Überschrift dieser Arbeit formulierte Problem, dessen Lösung unter 1. angedeutet wurde, bedarf noch einer kurzen Erörterung. Es handelt sich dabei stets um die Dirichlet-Reihen  $D(s)$ , die einer ganzen Modulform (Spitzenform oder nicht) der Stufe  $Q$  entsprechen. Gefragt wird: Es habe  $D(s)$  eine vollständige (d. h. auf alle Primzahlen bezügliche) Eulersche Produktzerlegung. Wie sehen die den Primteilern der Stufe  $Q$  entsprechenden Faktoren dieses Produktes aus?

Um dies zu untersuchen, betrachten wir zunächst diejenigen Dirichlet-Reihen  $D(s)$ , die den ganzen Modulformen der Stufe  $Q$  entsprechen und eine Eulersche Produktentwicklung bezüglich aller Primzahlen  $p$  mit  $(p, Q) = 1$  zulassen. Eine Reihe von dieser Art bezeichnen wir kurz als eine DME-Reihe der Stufe  $Q$ . Eine solche DME-Reihe  $D(s)$  der Stufe  $Q$  gestattet, wie bewiesen, eine Darstellung

$$D(s) = G(s) \cdot P(s; \varepsilon, Q, \mathfrak{o});$$

hier bezeichnet  $P(s; \varepsilon, Q, \mathfrak{o})$  das durch (32) erklärte Produkt, während sich  $G(s)$  additiv aus Bestandteilen verschiedener Herkunft zusammensetzt.

Unter diesen Bestandteilen von  $G(s)$  finden sich zunächst die Beiträge der nachstehend aufgeführten Funktionen zu den Primteilern  $q$  der Stufe  $Q$ :

$$(t')^{-s} L(s, \chi) L(s - r + 1, \chi').$$

( $t|Q, t'|Q$ ;  $\chi$  und  $\chi'$  sind Restcharaktere mod  $\frac{Q}{t}$  bzw. mod  $\frac{Q}{t'}$ .)

Die Beiträge haben, abgesehen von einer  $u$ -Potenz aus dem Faktor  $(t')^{-s}$  entweder die Form  $w_1(u, \alpha)$  oder aber die Form  $(1 - \alpha u)^{-1} (1 - \beta u)^{-1}$  ( $u = q^{-s}$ ,  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ ). Nun enthält  $(t')^{-s}$  im zweiten Falle  $u$  mindestens in der zweiten Potenz; da

$$(51) \quad u(1 - \alpha u)^{-1} (1 - \beta u)^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} (w_1(u, \alpha) - w_1(u, \beta)),$$

bzw.  $= w_2(u, \alpha),$

falls  $\alpha \neq \beta$  bzw.  $\alpha = \beta$ , so ergibt sich für den genannten Bestandteil von  $G(s)$  ein Ausdruck, wie er auch bei den von den Spitzenformen herrührenden Bestandteilen auftreten kann. (Die Umformung (51) muß man im übrigen dann

anwenden, wenn man  $D(s)$  als DME-Reihe der Stufe  $Q^*$  untersucht, wo  $Q|Q^*$ ,  $Q < Q^*$ ,  $q|Q^*$ ,  $(q, Q) = 1$ ; vgl. hierzu auch (K II), § 3.)

Natürlich kann man die in 2. 1, Absatz 3 ausgeführte Überlegung heranziehen, um zu erkennen, daß eine DME-Reihe, die zu einer (mit einem Teiler  $t^*$  versehenen) Linearkombination der Eisenstein-Reihen gehört, eine Produktdarstellung (32) gestattet, in der dann für das dabei auftretende  $K(s)$  die Aussage des Satzes 23 gilt. Indessen ergibt sich die besondere Struktur der so erklärten Funktionen  $K(s)$  gerade aus der Beziehung der Eisenstein-Reihen zu den soeben genannten  $L$ -Reihen-Produkten. Bestimmt man  $K(s)$  aus den  $L$ -Reihen-Produkten, so hat man zu beachten, daß der Faktor  $(tt')^{-s}$  möglicherweise eine höhere oder niedrigere  $u$ -Potenz enthält, als sie der Darstellung (32) nach der allgemeinen Theorie entspricht. Diese  $u$ -Potenzen lassen sich mit Hilfe der Identitäten

$$u w_1(u, \alpha) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} w_1(u, \alpha), u w_2(u, \alpha) = -\frac{1}{\alpha} u w_1(u, \alpha) + \frac{1}{\alpha} w_2(u, \alpha)$$

abbauen und aufbauen. Man gelangt so zu Linearkombinationen der (mit den  $(-s)$ -ten Potenzen der wirklichen Teiler multiplizierten) Ausdrücke (34) der allgemeinen Theorie.

Danach läßt sich  $G(s)$  als eine Linearkombination

$$(52) \quad G(s) = \sum C u_1^{\gamma_1} u_2^{\gamma_2} \dots u_N^{\gamma_N} w_{r_1}(u_1, \alpha_1) w_{r_2}(u_2, \alpha_2) \dots w_{r_N}(u_N, \alpha_N)$$

schreiben. Hier bedeuten  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  die sämtlichen verschiedenen Primteiler von  $Q$ ,  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) die Potenzen  $q_i^{-s}$ ; für jedes  $\alpha_i$  ist eine komplexe Zahl aus einem durch  $t = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_N^{\gamma_N}$  allein bestimmten endlichen Wertevorrat einzusetzen, für jedes  $\gamma_i$  eine ganze Zahl  $\geq 0$ , die bis zu einem durch  $\alpha_i$  und den Teiler  $t = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_N^{\gamma_N}$  allein bestimmten Höchstwert ansteigt.  $w_0(u_i, \alpha_i)$  ist Eins. Die ganzen Zahlen  $\gamma_i \geq 0$  haben als Höchstwert den Exponenten, mit dem  $q_i$  in  $Q$  aufgeht. Die  $C$  bezeichnen Konstante.

Wenn eine DME-Reihe  $D(s)$  eine vollständige Eulersche Produktentwicklung gestattet, so bedeutet dies, daß die zugehörige Funktion  $G(s)$  sich durch ein Produkt

$$(53) \quad G(s) = f_1(u_1) f_2(u_2) f_3(u_3) \dots f_N(u_N)$$

darstellen läßt, dessen  $i$ -ter Faktor  $f_i(u_i)$  eine Potenzreihe in der Variablen  $u_i = q_i^{-s}$  ist ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Wir schreiben

$$G_k(s) = f_1(u_1) f_2(u_2) \dots f_k(u_k) \quad (1 \leq k \leq N).$$

Hier erhält man  $G_{N-1}(s)$  auf folgende Weise: Man entwickle die rechte Seite von (52) nach Potenzen von  $u_N$  und greife eine Potenz  $u_N^{d_N}$  heraus, die in der Reihe für  $f_N(u_N)$  wirklich auftritt. Der Koeffizient von  $u_N^{d_N}$  in der genannten Entwicklung von  $G(s)$  ist bis auf einen konstanten Faktor die gesuchte

Funktion  $G_{N-1}(s)$ . Dieses Vorgehen erweist  $G_{N-1}(s)$  als einen Ausdruck, der aus der rechten Seite von (52) dadurch entsteht, daß man dort überall  $u_N^N w_N(u_N, \alpha_N)$  durch eine passend gewählte Konstante ersetzt (die natürlich von dem zugehörigen Wertesystem  $\alpha_N, v_N, \gamma_N$  abhängt).  $G_{N-1}(s)$  hat also die Gestalt der rechten Seite von (52) mit  $N-1$  an Stelle von  $N$ ; die Werte  $\alpha_i, v_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ) haben ihre frühere Bedeutung behalten. Die fortgesetzte Anwendung des Verfahrens ergibt schließlich

$$f_i(u_i) = \sum C u_i^{\gamma_i} w_i(u_i, \alpha_i),$$

wo die Zahlen  $\alpha_i, v_i, \gamma_i$  in der bei der Erklärung der Darstellung (52) angegebenen Weise zu wählen sind.

Es sei betont, daß im Falle einer Primzahlpotenzstufe  $Q$  jede DME-Reihe automatisch eine vollständige Eulersche Produktentwicklung zuläßt. Ein entsprechendes Resultat im allgemeinen Falle ist nicht zu erwarten. Wenn aber eine Dirichlet-Reihe, die einer ganzen Modulform der Stufe  $Q$  entspricht, eine vollständige Eulersche Produktentwicklung zuläßt, so ist die Struktur der Faktoren, die zu den Primteilern der Stufe gehören, und damit aller Faktoren genau bekannt. Die numerische Bestimmung dieser  $q$ -Faktoren erfordert nur noch die Berechnung der endlich vielen Konstanten  $C$ , von denen der einzelne  $q$ -Faktor linear abhängt.

Das soeben dargestellte Verfahren zur Bestimmung der Faktoren  $f_i(u_i)$  in dem Produkt (53) lehrt in Verbindung mit dem vorher aufgestellten Unabhängigkeitssatz folgendes:

Es sei  $\mathfrak{B}$  die Schar der Signatur  $\{q_1, q_2; 2\}$ , die von den Funktionen (50) für irgendein  $\partial \neq 0$  erzeugt wird. Dann gilt: Eine Funktion aus  $\mathfrak{B}$ , die sich als Produkt  $f_1(u_1) f_2(u_2)$  schreiben läßt, wo  $f_1(u_1)$  und  $f_2(u_2)$  Potenzreihen in  $u_1$  bzw.  $u_2$  darstellen, ist bis auf einen konstanten Faktor mit  $K_1(s)$  identisch.  $\mathfrak{B}$  hat also auch keine Basis, deren Funktionen beide eine Produktzerlegung  $f_1(u_1) f_2(u_2)$  zulassen.

2.6. Wir entwickeln nun noch das eingangs erwähnte Konstruktionsverfahren für die Basisfunktionen einer Schar  $\mathfrak{B}$ , die sich bei Anwendung der Operatoren  $V_r$  nach den gegebenen Matrizen  $A_r$  ( $1 \leq r \leq h$ ) umsetzen. Sei also  $\mathfrak{B}$  eine allgemeine Schar der willkürlich vorgeschriebenen Signatur  $\{q_1, q_2, \dots, q_h; \mu\}$ ,  $\mathfrak{R}(s)$  ein Basisvektor von  $\mathfrak{B}$ ; die Umsetzungsformeln, die dieser Funktionenvektor  $\mathfrak{R}(s)$  bei Anwendung der Operatoren  $V_r$  ( $1 \leq r \leq h$ ) befolgt, haben die Gestalt (46). Nach bekannten Sätzen der linearen Algebra existiert eine konstante umkehrbare Matrix  $Z$  von  $\mu$  Zeilen und Spalten derart, daß die Matrizen  $A_r^* = Z A_r(q_r) Z^{-1}$  ( $1 \leq r \leq h$ ) sämtlich Dreiecksform aufweisen, d. h. oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen als Elemente enthalten. Danach bestehen für den Vektor  $\mathfrak{R}^*(s) = Z \mathfrak{R}(s)$  die Umsetzungsformeln

$$\mathfrak{R}^*(s) | V_r = A_r^* \mathfrak{R}^*(s) \quad (1 \leq r \leq h)$$

Wir lassen nun, um die Bezeichnung zu vereinfachen, die Sterne fort. schreiben also

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}(s) | V_r = A_r \mathfrak{R}(s) \\ \mathfrak{R}(s) = \{K_1(s), K_2(s), \dots, K_h(s)\}, \\ K_j(s) = \sum_{\mathfrak{R}_h} a_{j,m} m^{-s} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1 \leq r \leq h), \\ \\ (1 \leq j \leq \mu), \end{array}$$

$$(55) \quad A_r = (\lambda_{j,k}^{(r)}), \quad \lambda_j^{(r)} = \lambda_{j,j}^{(r)}, \quad \lambda_{j,k}^{(r)} = 0 \text{ für } k > j \\ (j, k = 1, 2, \dots, \mu; \quad 1 \leq r \leq h),$$

$$(56) \quad K_j(s) | V_i = \sum_{\varrho=1}^j \lambda_{j,\varrho}^{(i)} K_{\varrho}(s) \quad (1 \leq j \leq \mu).$$

$$(57) \quad K_j^{(i)}(s) | V_i = \sum_{\varrho=1}^j \lambda_{j,\varrho}^{(i)} K_{\varrho}^{(i)}(s) \quad (1 \leq r \leq i \leq h, \quad 1 \leq j \leq \mu).$$

In diesen Formeln sehen wir die komplexen Konstanten  $\lambda_{j,k}^{(i)}$  ( $1 \leq k \leq j \leq \mu$ ,  $1 \leq r \leq h$ ) als gegeben an und konstruieren nun die Funktionen  $K_j(s)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) auf Grund der Kenntnis dieser  $\lambda_{j,k}^{(i)}$ . Dabei werden wir von der bisher gültigen linearen Unabhängigkeit dieser Funktionen  $K_j(s)$  keinen Gebrauch machen, also nur die Formeln (54), (55), (56), (57) zur Konstruktion benutzen.

Um zunächst  $K_1(s)$  zu bestimmen, bemerken wir, daß aus (55) und (56) folgt

$$(58) \quad a_{1,q^n} = \lambda_1^n a_{1,m} \quad (q = q_h, \lambda_1 = \lambda_1^{(h)}, m \in \mathfrak{R}_h, n \geq 0).$$

Setzt man dies mit  $m \in \mathfrak{R}_{h-1}$  in die Reihe für  $K_1(s)$  ein, so ergibt sich

$$K_1(s) = K_1^{(h-1)}(s) w_1(u_h, \lambda_1^{(h)}).$$

also

$$(59) \quad K_1(s) = C_1 \prod_{n=1}^h w_1(u_n, \lambda_1^{(n)}),$$

wo  $C_1$  eine Konstante bezeichnet, die natürlich nicht verschwindet, wenn  $\mathfrak{R}(s)$  einen Basisvektor von  $\mathfrak{B}$  darstellt. Insbesondere ist für jedes  $i = 1, 2, \dots, h$ :

$$(60) \quad K_1^{(i)}(s) = C_1 \prod_{n=1}^i w_1(u_n, \lambda_1^{(n)}).$$

Zur Bestimmung der Funktion  $K_2(s)$  schreiben wir abkürzend

$$q_h = q, \quad q_h^{-s} = u_h = u, \quad \lambda_{2,1}^{(h)} = \alpha, \quad \lambda_2^{(h)} = \beta, \quad \lambda_1^{(h)} = \alpha'.$$

Aus (56) folgt für  $m \in \mathfrak{R}_h$ :

$$a_{2,mq} = \beta a_{2,m} + \alpha a_{1,m}$$

und daraus mit vollständiger Induktion

$$a_{2,mq^n} = \beta^n a_{2,m} + \alpha \left( \sum_{i=0}^{n-1} \beta^{n-1-i} \alpha'^i \right) a_{1,m} \quad (m \in \mathfrak{R}_h, n \geq 1).$$

Diese Formel ergibt für  $m \in \mathfrak{R}_{h-1}$  durch Einsetzen in die Reihendarstellung von  $K_2(s)$

$$K_2(s) = K_2^{(h-1)}(s) w_1(u_h, \lambda_2^{(h)}) + \lambda_{2,1}^{(h)} u_h K_1^{(h-1)}(s) w_1(u_h, \lambda_1^{(h)}) w_1(u_h, \lambda_2^{(h)}).$$

$$K_2(s) = K_2^{(h-1)}(s) w_1(u_h, \lambda_2^{(h)}) + \lambda_{2,1}^{(h)} u_h K_1(s) w_1(u_h, \lambda_2^{(h)}).$$

Nun läßt sich  $K_2^{(h-1)}(s)$  auf Grund von (57) nach demselben Verfahren durch  $K_2^{(h-2)}(s)$  ausdrücken. Die so erklärte Rekursion liefert schließlich

$$(61) \quad K_2(s) = C_2 \prod_{a=1}^h w_1(u_a, \lambda_2^{(a)}) + \sum_{r=1}^h \lambda_{2,1}^{(r)} u_r K_1^{(r)}(s) \prod_{a=r}^h w_1(u_a, \lambda_2^{(a)})$$

und für  $i = 1, 2, \dots, h$ :

$$(62) \quad K_2^{(i)}(s) = C_2 \prod_{a=1}^i w_1(u_a, \lambda_2^{(a)}) + \sum_{r=1}^i \lambda_{2,1}^{(r)} u_r K_1^{(r)}(s) \prod_{a=r}^i w_1(u_a, \lambda_2^{(a)}).$$

Dabei bezeichnet  $C_2$  eine Konstante.

Die weiteren Funktionen  $K_3(s), K_4(s), \dots, K_\mu(s)$  werden rekursiv konstruiert. Wir nehmen an, es seien  $K_1(s), K_2(s), \dots, K_{g-1}(s)$  bereits dargestellt ( $2 \leq g \leq \mu - 1$ ). Zur Darstellung von  $K_g(s)$  schreiben wir wieder  $q_h = q, u_h = u$  und erhalten aus (56):

$$K_g(s) | V_h = \sum_{\mathfrak{R}_h} a_{g,m} q^m m^{-s} = \sum_{k=1}^g \lambda_{g,k}^{(h)} K_k(s),$$

also

$$a_{g,m} = \sum_{k=1}^g \lambda_{g,k}^{(h)} a_{k,m} \quad (m \in \mathfrak{R}_h).$$

Diese Formel liefert bei Iteration

$$a_{g,m} q^m = \sum_{r=1}^g B_{g,r}^{(h)}(n) a_{r,m} \quad (n \geq 0, m \in \mathfrak{R}_h),$$

$$(63) \quad B_{g,r}^{(h)}(n) = \sum_{r \leq e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_{n-1} \leq g} \lambda_{g,e_{n-1}}^{(h)} \lambda_{e_{n-1},e_{n-2}}^{(h)} \dots \lambda_{e_2,e_1}^{(h)} \lambda_{e_1,r}^{(h)}$$

für  $n \geq 2$  und

$$B_{g,r}^{(h)}(0) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq r \leq g-1, \quad B_{g,g}^{(h)}(0) = 1, \quad B_{g,r}^{(h)}(1) = \lambda_{g,r}^{(h)}.$$

Speziell ist  $B_{g,g}^{(h)}(n) = \lambda_g^{(h)n}$  ( $n \geq 0$ ). Hier findet man zunächst, wenn man diese Formeln für  $m \in \mathfrak{R}_{h-1}$  in die Reihendarstellung von  $K_g(s)$  einsetzt,

$$(64) \quad K_g(s) = K_g^{(h-1)}(s) w_1(u_h, \lambda_g^{(h)}) + \sum_{r=1}^{g-1} M_{g,r}^{(h)}(u_h) K_r^{(h-1)}(s),$$

wo

$$M_{g,r}^{(h)}(u_h) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{g,r}^{(h)}(n) u_h^n \quad (1 \leq r \leq g-1).$$

Die Berechnung der  $B_{g,r}^{(h)}(n)$  für  $n \geq 2$  läßt sich, wie man leicht bestätigt, nach dem folgenden kombinatorischen Schema durchführen: Man faßt

diejenigen Produkte in den Summen auf der rechten Seite von (63) zusammen, in denen die positiven unter den Indextdifferenzen

$$\varrho_1 - \nu, \varrho_2 - \varrho_1, \varrho_3 - \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1} - \varrho_{n-2}, g - \varrho_{n-1}$$

die gleichen Werte haben. Sei also  $l$  eine natürliche Zahl  $\leq g - \nu$ . Man markiere  $l - 1$  natürliche Zahlen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{l-1}$  willkürlich unter den Nebenbedingungen

$$(65) \quad \nu = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{l-2} < \sigma_{l-1} < \sigma_l = g$$

und betrachte alle Produkte

$$(66) \quad \lambda_{g, \varrho_{n-1}}^{(h)} \lambda_{\varrho_{n-1}, \varrho_{n-2}}^{(h)} \dots \lambda_{\varrho_3, \varrho_2}^{(h)} \lambda_{\varrho_2, \varrho_1}^{(h)} \lambda_{\varrho_1, \nu}^{(h)}$$

mit folgenden Eigenschaften: Das  $\varrho_i$  mit kleinstem  $i \geq 1$  und  $\varrho_i > \sigma_0 = \nu$  ist  $\sigma_1$ . Das  $\varrho_i$  mit kleinstem  $i \geq 1$  und  $\varrho_i > \sigma_1$  ist  $\sigma_2$ , usw.: Das  $\varrho_i$  mit kleinstem  $i \geq 1$  und  $\varrho_i > \sigma_b$  ist  $\sigma_{b+1}$  ( $b = 0, 1, 2, 3, \dots, l-1$ ). Die Menge der sämtlichen Produkte (66), die einer Indexkombination dieser Art mit gegebenen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{l-2}, \sigma_{l-1}$  angehören, nennen wir ein System  $\mathfrak{C}$ . Ein Produkt aus  $\mathfrak{C}$  hat die Gestalt

$$\lambda_{\sigma_l, \sigma_{l-1}}^{(h)} \lambda_{\sigma_{l-1}, \sigma_{l-2}}^{(h)} \dots \lambda_{\sigma_2, \sigma_1}^{(h)} \lambda_{\sigma_1, \sigma_0}^{(h)} \lambda_{\sigma_0}^{n_0} \lambda_{\sigma_1}^{n_1} \lambda_{\sigma_2}^{n_2} \dots \lambda_{\sigma_{l-1}}^{n_{l-1}} \lambda_{\sigma_l}^{n_l}$$

mit ganzen  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{l-1}, n_l \geq 0$  ( $n = n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_{l-1} + n_l$ ).

Wir bezeichnen nun mit  $M_{g,r}^{(h)}(\mathfrak{C}, u_h)$  diejenige Teilsumme von  $M_{g,r}^{(h)}(u_h)$ , die aus  $M_{g,r}^{(h)}(u_h)$  entsteht, wenn dort  $B_{g,r}^{(h)}(n)$  durch die (63) entsprechende Summe ersetzt wird, in der nur die Produkte (66) aus dem gegebenen System  $\mathfrak{C}$  auftreten. Dann ergibt sich einerseits

$$(67) \quad M_{g,r}^{(h)}(\mathfrak{C}, u_h) = \lambda_{g, \sigma_{l-1}}^{(h)} \lambda_{\sigma_{l-1}, \sigma_{l-2}}^{(h)} \dots \lambda_{\sigma_2, \sigma_1}^{(h)} \lambda_{\sigma_1, \nu}^{(h)} u_h^l \prod_{\sigma=0}^l w_1(u_h, \lambda_{\sigma}^{(h)})$$

und andererseits

$$(68) \quad M_{g,r}^{(h)}(u_h) = \sum_{\mathfrak{C}} M_{g,r}^{(h)}(\mathfrak{C}, u_h).$$

Hier hat man über alle verschiedenen Systeme  $\mathfrak{C}$  von Indexkombinationen zu summieren. Das einzelne System  $\mathfrak{C}$  ist durch das Schema (65) umkehrbar eindeutig bestimmt.

Damit ist  $M_{g,r}^{(h)}(u_h)$  berechnet. Zur Bestimmung von  $K_r(s)$  bedarf es noch einer weiteren Rekursion, die durch Anwendung der Formel (64) auf die Funktion  $K_g^{(h-1)}(s)$  eingeleitet wird. Dabei entsteht nach (57) zunächst

$$K_g(s) = K_g^{(h-2)}(s) w_1(u_{h-1}, \lambda_g^{(h-1)}) w_1(u_h, \lambda_g^{(h)}) + w_1(u_h, \lambda_g^{(h)}) \sum_{r=1}^{g-1} M_{g,r}^{(h-1)}(u_{h-1}) K_r^{(h-2)}(s) + \sum_{r=1}^{g-1} M_{g,r}^{(h)}(u_h) K_r^{(h-1)}(s).$$

Die Funktionen  $M_{s,v}^{(h-1)}(u_{h-1})$  sind nach demselben Schema zu bilden wie die Funktionen  $M_{s,v}^{(h)}(u_h)$ ; nur hat man  $u_h$  durch  $u_{h-1}$  und in dem Ausdruck (63) der Koeffizienten der Potenzreihe den oberen Index  $h$  durch  $h-1$  zu ersetzen. Die Iteration dieses Verfahrens ergibt schließlich bei entsprechender Erklärung der Funktionen  $M_{s,v}^{(p)}(u_p)$  ( $1 \leq p \leq h$ ) und mit konstantem  $C_g$ :

$$(69) \quad K_g(s) = C_g \prod_{a=1}^h w_1(u_a, \lambda_g^{(a)}) + \sum_{v=1}^{g-1} \sum_{p=1}^h M_{s,v}^{(p)}(u_p) K_v^{(p-1)}(s) \prod_{a=p+1}^h w_1(u_a, \lambda_g^{(a)}).$$

Insbesondere folgt hieraus nach (67), (68) für  $i = 1, 2, 3, \dots, h$ :

$$(70) \quad K_i^{(i)}(s) = C_g \prod_{a=1}^i w_1(u_a, \lambda_g^{(a)}) + \sum_{v=1}^{g-1} \sum_{p=1}^i M_{s,v}^{(p)}(u_p) K_v^{(p-1)}(s) \prod_{a=p+1}^i w_1(u_a, \lambda_g^{(a)}).$$

Wir fassen dieses Ergebnis kurz in dem folgenden Satz zusammen:

**Satz 25.** Es sei ein System von  $\mu$  Dirichlet-Reihen

$$K_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n} n^{-s} \quad (1 \leq j \leq \mu)$$

vorgelegt, in denen  $m$  nur die aus den gegebenen Primzahlen  $q_1, q_2, \dots, q_h$  zusammengesetzten natürlichen Zahlen durchläuft. Diese Dirichlet-Reihen mögen, nach (54) zu einem Funktionenvektor  $\mathfrak{K}(s)$  zusammengefaßt, das in (54), (55), (56) beschriebene Verhalten gegenüber den Operatoren  $V_r$  ( $1 \leq v \leq h$ ) aufweisen. Dann gelten für diese Funktionen  $K_j(s)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) die rekursiven Darstellungen (59), (61), (69) und für die zugehörigen reduzierten Funktionen  $K_j^{(i)}(s)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ,  $1 \leq i \leq h$ ) die rekursiven Darstellungen (60), (62), (70). Dabei hat man für die Funktionen  $M_{s,v}^{(h)}(u_h)$  die durch (67), (68) erklärten Ausdrücke einzutragen.

Die Funktionen  $M_{s,v}^{(p)}(u_p)$  ( $1 \leq v \leq g-1$ ,  $1 \leq p \leq h$ ) werden aus diesen Formeln erhalten, indem dort  $u_h$  durch  $u_p$  und der obere Index  $h$  an den  $\lambda_{j,z}^{(h)}$  überall durch den oberen Index  $p$  ersetzt wird. Wenn die Matrizen  $A_v$  ( $1 \leq v \leq h$ ) sämtlich Diagonalform haben, so verschwinden in den Ausdrücken (61), (62), (69), (70) die auf der rechten Seite stehenden Summen, wie dies den Konsequenzen des Hauptsatzentheorems bei Modulformen entspricht. Die Aussage des Satzes 25 trifft auch dann zu, wenn die Funktionen  $K_j(s)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) nicht linear-unabhängig sind.

(Eingegangen am 6. 10. 1939.)

# Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet.

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Darstellung und Erörterung der Ungleichungen und ihre Umgestaltung . . . . .	301
§ 2. Die Hardy-Littlewoodsche und die Wirtingersche Ungleichung als Spezialfälle . . . . .	307
§ 3. Diskussion der in den Ungleichungen auftretenden Zahlenfaktoren als Funktionen der Exponenten . . . . .	308
§ 4. Grenzfälle . . . . .	310
§ 5. Beweis der Ungleichungen . . . . .	313
§ 6. Erweiterung der die Existenz der Ableitung betreffenden Voraussetzungen . . . . .	324

## § 1.

### Darstellung und Erörterung der Ungleichungen und ihrer Umgestaltungen.

Es bezeichne  $\xi(t)$  eine für  $0 \leq t \leq l$  definierte stetige Funktion und es sei

$$(1) \quad \xi(0) = \xi(l), \quad (2) \quad \text{Max } \xi + \text{Min } \xi = 0.$$

- (3) Die Ableitung sei bis auf höchstens endlich viele Stellen bestimmt und stetig; sie sei ferner absolut integabel.

Diese Voraussetzungen über die Ableitung sind hier lediglich im Interesse der Durchsichtigkeit gewählt worden; sie werden im § 6 durch allgemeinere ersetzt werden. Was insbesondere die getroffene Voraussetzung der absoluten Integrabilität der Ableitung anlangt, so verlieren, wenn sie nicht erfüllt ist, die in der Folge entwickelten Ungleichungen nicht die Gültigkeit, sondern nur den Inhalt, indem die majorisierenden Seiten unendlich werden.

Unter den gemachten Voraussetzungen gilt für beliebige reelle Exponenten  $a > 0$  und  $b \geq 1$

$$(4) \quad \left( \frac{1}{l} \int_0^l |\xi|^a dt \right)^{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{4} H \left( \frac{1}{a}, \frac{b-1}{b} \right) \left\{ l^{b-1} \int_0^l \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}},$$

$$(5) \quad \frac{1}{l} \int_0^l \log |\xi| dt \leq \log \left[ \frac{1}{4 G \left( \frac{b-1}{b} \right)} \left\{ l^{b-1} \int_0^l \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}} \right]$$

Dabei sind die Funktionen  $H(u, v)$  und  $G(u)$  definiert durch die Gleichungen

$$(6) \quad G(u) = e^u u^{-u} \Gamma(1+u), \quad G(0) = 1; \quad H(u, v) = \frac{G(u+v)}{G(u) G(v)}.$$

$G(u)$  ist also für alle positiven Werte von  $u$  einschließlich der Null stetig.

Die in diesen Ungleichungen auftretenden Potenzen von  $l$  sind lediglich Maßstabfaktoren, welche bei der Substitution  $t = l\tau$  in Fortfall kommen. Abgesehen vom trivialen Fall  $b = 1$  gilt das Gleichheitszeichen in (4) nur für die Funktion

$$(7) \quad \xi = c_1 S_{a,b} \left( \frac{t}{l} + c_2 \right)$$

und in (5) nur für die Funktion

$$(8) \quad \xi = c_1 L_b \left( \frac{t}{l} + c_2 \right).$$

Dabei bedeuten  $c_1$  und  $c_2$  willkürliche Konstanten und

$$S_{a,b}(\tau) \quad \text{und} \quad L_b(\tau)$$

bezeichnen bestimmte im § 5 erklärte periodische Funktionen mit der Periode 1 und den Extremalwerten  $\pm 1$ . Diese Funktionen haben für alle Werte von  $\tau$  das Vorzeichen von  $\sin 2\pi\tau$ ; sie verschwinden und erreichen ihre Extremalwerte an denselben Stellen wie  $\sin 2\pi\tau$ ; sie stimmen endlich noch mit  $\sin 2\pi\tau$  überein in den Symmetrieeigenschaften

$$(9) \quad \begin{cases} S_{a,b}(\tau) = S_{a,b}(\frac{1}{2} - \tau) = -S_{a,b}(\frac{1}{2} + \tau) = -S_{a,b}(-\tau) = S_{a,b}(1 + \tau), \\ L_b(\tau) = L_b(\frac{1}{2} - \tau) = -L_b(\frac{1}{2} + \tau) = -L_b(-\tau) = L_b(1 + \tau), \\ S_{a,b}(0) = S_{a,b}(\frac{1}{2}) = S_{a,b}(1) = L_b(0) = L_b(\frac{1}{2}) = L_b(1) = 0. \end{cases}$$

Die Ableitungen dieser Funktionen haben natürlich auch die Periode 1. Die Extremalwerte der Ableitung von  $S_{a,b}(\tau)$  sind von entgegengesetztem Vorzeichen und gleichem endlichem Betrage; die Extremalwerte der Ableitung von  $L_b(\tau)$  sind  $\pm \infty$ ; die Ableitungen haben für alle Werte von  $\tau$  das Vorzeichen von  $\cos 2\pi\tau$  und verschwinden und erreichen ihre Extremalwerte an denselben Stellen wie  $\cos 2\pi\tau$ . Endlich stimmen sie noch mit  $\cos 2\pi\tau$  in den Symmetrieeigenschaften überein, welche sich aus (9) durch Differentiation ergeben.

Für  $b = 1$  wird der Zahlenfaktor auf den rechten Seiten von (4) und (5) gleich  $\frac{1}{4}$ . Die Ungleichungen sind in diesem Fall trivial. Denn ist etwa  $\xi(0) = \xi(l) = \alpha$ ,  $\xi(\sigma) = M$ ,  $\xi(\sigma') = -M$ , wobei  $\pm M$  die Extremalwerte von  $\xi$  bedeuten, so kann man, da es freisteht,  $\xi$  durch  $-\xi$  zu ersetzen,  $\sigma' > \sigma$  annehmen. Dann ist

$$(10) \quad \int_0^\sigma \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt \geq M - \alpha, \quad \int_\sigma^l \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt \geq 2M, \quad \int_{\sigma'}^l \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt \geq \alpha + M,$$

$$\text{also } \int_0^l \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt \geq 4M.$$

$$\left( \frac{1}{l} \int_0^l |\xi|^a dt \right)^{\frac{1}{a}} < M, \quad \frac{1}{l} \int_0^l \log |\xi| dt < \log M,$$

und hieraus folgen unmittelbar die Ungleichungen (4) und (5). Wenn es auch mithin keine Funktion gibt, für welche das Gleichheitszeichen gilt, so bleiben die Ungleichungen doch genau, indem der Faktor  $\frac{1}{4}$  nicht verkleinert werden kann. Das zeigt bei gegen Null strebendem positivem  $\varepsilon$  die Funktion, welche in der  $(t, \xi)$ -Ebene durch den Geradenzug dargestellt wird, der durch die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(\varepsilon, M)$ ,  $(\frac{l}{2} - \varepsilon, M)$ ,  $(\frac{l}{2} + \varepsilon, -M)$ ,  $(l - \varepsilon, -M)$ ,  $(l, 0)$  dargestellt wird.

Die Ungleichungen (4) und (5) lassen sich auch in der folgenden Gestalt fassen: Es bezeichne  $x(t)$  eine für  $0 \leq t \leq l$  definierte stetige Funktion, deren Ableitung den Voraussetzungen (3) genügt. Es sei

$$x(0) = x(l).$$

Die Funktion

$$\xi(t) = x(t) - \frac{m + \mu}{2},$$

wobei  $m$  und  $\mu$  das Maximum und das Minimum von  $x(t)$  bezeichnen, genügt dann den Voraussetzungen (1), (2), (3). Es gelten mithin für diese Funktion die Ungleichungen (4) und (5), d. h. es ist

$$(11) \quad \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \left| x - \frac{m + \mu}{2} \right|^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{4} H \left( \frac{1}{a}, \frac{b-1}{b} \right) \left\{ l^{b-1} \int_0^l \left| \frac{dx}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}},$$

$$(12) \quad \frac{1}{l} \int_0^l \log \left| x - \frac{m + \mu}{2} \right| dt \leq \log \left[ \frac{1}{4 G \left( \frac{b-1}{b} \right)} \left\{ l^{b-1} \int_0^l \left| \frac{dx}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}} \right].$$

Jetzt kommen wir zu einigen weiteren Ungleichungen, die auf Grund von (4) und (5) leicht bewiesen werden können.

Es bezeichne  $y(t)$  eine für  $0 \leq t \leq s$  definierte stetige Funktion, deren Ableitung den Voraussetzungen (3) genügt. Es sei ferner

$$(1') \quad y(0) = y(s).$$

An Stelle der Voraussetzung (2) aber sei die erweiterte Voraussetzung gemacht, daß  $y(t)$  im Definitionsintervall mindestens einmal verschwindet.

Dann ist für beliebige reelle Exponenten  $a > 0$ ,  $b \geq 1$

$$(13) \quad \left\{ \frac{1}{s} \int_0^s |y|^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) \left\{ s^{b-1} \int_0^s \left| \frac{dy}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}}$$

und für den beliebigen reellen Exponenten  $b \geq 1$

$$(14) \quad \frac{1}{s} \int_0^s \log |y| dt \leq \log \left[ \frac{1}{2 G\left(\frac{b-1}{b}\right)} \left\{ s^{b-1} \int_0^s \left| \frac{dy}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}} \right].$$

Abgesehen vom trivialen Fall  $b = 1$  gilt das Gleichheitszeichen in (13) nur für die Funktion

$$(15) \quad y(t) = c_1 \left| S_{a,b} \left( \frac{t}{2s} + c_2 \right) \right|, \quad 0 \leq t \leq s$$

und in (14) nur für die Funktion

$$(16) \quad y(t) = c_1 \left| L_x \left( \frac{t}{2s} + c_2 \right) \right|, \quad 0 \leq t \leq s,$$

wobei  $c_1, c_2$  willkürliche Konstanten bedeuten und die Funktionen auf der rechten Seite oben unter (7), (8), (9) diskutiert worden sind.

Für  $b = 1$  werden (13) und (14) ebenso trivial wie (4) und (5), und es ergibt sich ebenso wie dort, daß der Zahlenfaktor auf der rechten Seite, der gleich  $\frac{1}{2}$  wird, genau ist, d. h. nicht verkleinert werden kann, wenn es auch keine Funktion gibt, für welche das Gleichheitszeichen gilt.

**Beweis.** Wir beweisen die obigen Sätze nur für die Ungleichung (13), da der Beweis für (14) in gleicher Weise verläuft.

Wir ergänzen die zunächst nur für  $0 \leq t \leq s$  definierte Funktion  $y(t)$  zu einer für alle Werte von  $t$  definierten periodischen stetigen Funktion mit der Periode  $s$ . Das ist wegen (1') möglich. Nunmehr ändern sich die in den Ungleichungen vorkommenden Integrale nicht, wenn sie anstatt von 0 bis  $s$  von  $t_0$  bis  $t_0 + s$  erstreckt werden, wobei  $t_0$  eine Nullstelle von  $y(t)$  ist. Setzt man also

$$y^*(t) = y(t_0 + t),$$

so darf in (13)  $y(t)$  durch  $y^*(t)$  ersetzt werden, und es wird

$$(1'') \quad y^*(0) = y^*(s) = 0.$$

Nunmehr setzen wir

$$(17) \quad \begin{cases} \xi(t) = y^*(t) \\ \xi(t) = -y^*(t-s) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq s, \\ s \leq t \leq 2s. \end{matrix}$$

Dann genügt  $\xi(t)$  für  $l = 2s$  den Voraussetzungen der Ungleichung (4). Diese ergibt bei Berücksichtigung der Gleichungen

$$\int_0^{2s} |\xi|^a dt = 2 \int_0^s |y^*|^a dt, \quad \int_0^{2s} \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt = 2 \int_0^s \left| \frac{dy^*}{dt} \right|^b dt$$

die zu beweisende Ungleichung (13).

Daß ferner in (13) das Gleichheitszeichen für die Funktion

$$(18) \quad y^*(t) = c_1 S_{a,b} \left( \frac{t}{2s} \right), \quad l = 2s, \quad 0 \leq t \leq s,$$

gilt, folgt aus der gemäß (7) bestehenden Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (4) für

$$\xi = c_1 S_{a,b} \left( \frac{t}{2s} \right), \quad l = 2s.$$

Denn für die so definierte Funktion  $\xi(t)$  ergeben die Symmetrieeigenschaften (9) die Gleichungen

$$(19) \quad \begin{aligned} \int_0^{2s} |\xi|^a dt &= 2 \int_0^s |\xi|^a dt = 2 \int_0^s |y^*|^a dt; \\ \int_0^{2s} \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt &= 2 \int_0^s \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt = 2 \int_0^s \left| \frac{dy^*}{dt} \right|^b dt. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen in (13) gilt unter der Voraussetzung (1'') nur für die Funktion (18). Denn gälte es noch für eine in (18) nicht enthaltene Funktion, so würde aus dieser die Konstruktion (17) eine in (7) nicht enthaltene Funktion liefern, für welche in (4) das Gleichheitszeichen gilt — gegen die hier als bewiesen vorauszusetzenden oben angegebenen Sätze über die Ungleichung (4). Um endlich alle Funktionen zu erhalten, für welche unter der Voraussetzung (1') in (13) das Gleichheitszeichen gilt, muß die Funktion (18) zu einer für alle Werte von  $t$  definierten periodischen stetigen Funktion mit der Periode  $s$  ergänzt werden. Diese wird wegen (9)

$$y^*(t) = c_1 \left| S_{a,b} \left( \frac{t}{2s} \right) \right|.$$

Damit ist auch bewiesen, daß alle Funktionen, für welche in (13) das Gleichheitszeichen gilt, durch (15) dargestellt werden.

Es bezeichne endlich  $z(t)$  eine für  $0 \leq t \leq \lambda$  definierte stetige Funktion, deren Ableitung den Voraussetzungen (3) genügt; sie besitze im Definitionsbereich mindestens eine Nullstelle. Dann ist

$$(20) \quad \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda |z|^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} \leq H \left( \frac{1}{a}, \frac{b-1}{b} \right) \left\{ \lambda^{b-1} \int_0^\lambda \left| \frac{dz}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}},$$

$$(21) \quad \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \log |z| dt \leq \log \left[ \frac{1}{a \left( \frac{b-1}{b} \right)} \left\{ \lambda^{b-1} \int_0^\lambda \left| \frac{dz}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}} \right].$$

Abgesehen vom trivialen Fall  $b = 1$  gilt das Gleichheitszeichen in (20) nur für die Funktionen

$$(22) \quad z = c S_{a,b} \left( \frac{t}{4\lambda} \right), \quad z = c S_{a,b} \left( \frac{t}{4\lambda} + \frac{1}{4} \right), \quad 0 \leq t \leq \lambda$$

und in (21) nur für die Funktion

$$(23) \quad z = c L_b \left( \frac{t}{4\lambda} \right), \quad z = c L_b \left( \frac{t}{4\lambda} + \frac{1}{4} \right), \quad 0 \leq t \leq \lambda.$$

Für den Fall  $b = 1$  ergibt sich wie oben, daß der Zahlenfaktor auf der rechten Seite, der gleich 1 wird, genau ist, wenn es auch keine Funktion gibt, für welche das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis. Setzt man

$$(17') \quad \begin{cases} y(t) = z(t), & 0 \leq t \leq \lambda, \\ y(t) = z(2\lambda - t), & \lambda \leq t \leq 2\lambda, \end{cases}$$

so genügt  $y(t)$  für  $s = 2\lambda$  den Voraussetzungen von (13) und (14). Auf Grund von (17') ergeben sich jetzt (20) und (21) aus (13) und (14) genau so wie (13) und (14) sich auf Grund von (17) aus (4) und (5) ergaben. Das Gleichheitszeichen in (13) kann wegen (15) nur gelten, wenn

$$y(t) = c_1 \left| S_{a,b} \left( \frac{t}{4\lambda} + c_2 \right) \right|$$

wird. Da aber wegen (17')

$$y(t) = y(2\lambda - t)$$

sein muß, so folgt

$$\left| S_{a,b} \left( \frac{1}{2} + c_2 - \frac{t}{4\lambda} \right) \right| = \left| S_{a,b} \left( c_2 + \frac{t}{4\lambda} \right) \right|, \quad 0 \leq t \leq 2\lambda,$$

und wegen (9)

$$(24) \quad |S_{a,b}(c_2 - \tau)| = |S_{a,b}(c_2 + \tau)|.$$

Bei Berücksichtigung der oben durchgeführten Diskussion der Funktion  $S_{a,b}(\tau)$  ergibt sich hieraus  $c_2 = 0$  oder  $c_2 = \frac{1}{4}$ . Damit ist die Behauptung (22) bewiesen. Genau so beweist man die Behauptung (23).

§ 2.

Die Hardy-Littlewoodsche und die Wirtingersche Ungleichung als Spezialfälle.

Man betrachte jetzt den Spezialfall  $a = b$ . Man erhält gemäß (6)

$$H\left(\frac{1}{b}, \frac{b-1}{b}\right) = \frac{G(1)}{G\left(\frac{1}{b}\right) G\left(\frac{b-1}{b}\right)} = \frac{e}{G\left(\frac{1}{b}\right) G\left(\frac{b-1}{b}\right)},$$

$$G\left(\frac{1}{b}\right) = e^{\frac{1}{b}} \left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) = e^{\frac{1}{b}} b^{\frac{1}{b}-1} \Gamma\left(\frac{1}{b}\right),$$

$$G\left(\frac{b-1}{b}\right) = e^{\frac{b-1}{b}} \left(\frac{b-1}{b}\right)^{-\frac{b-1}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{b-1}{b}\right) = e^{\frac{b-1}{b}} \left(\frac{b-1}{b}\right)^{\frac{1}{b}} \Gamma\left(\frac{b-1}{b}\right),$$

$$G\left(\frac{1}{b}\right) G\left(\frac{b-1}{b}\right) = e b^{-1} (b-1)^{\frac{1}{b}} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{b}},$$

$$H\left(\frac{1}{b}, \frac{b-1}{b}\right) = (b-1)^{-\frac{1}{b}} \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi}{b}.$$

Der Satz (11) ergibt für diesen Fall:

Es sei  $x(t)$  eine für  $0 \leq t \leq l$  definierte Funktion, deren Ableitung den Voraussetzungen (3) genügt: Das Maximum und das Minimum von  $x(t)$  seien  $m$  und  $\mu$  und es sei

$$x(0) = x(l).$$

Dann gilt für einen beliebigen reellen Exponenten  $b \geq 1$

$$(25) \quad \int_0^l \left| x - \frac{m+\mu}{2} \right|^b dt \leq \frac{1}{b-1} \left( \frac{b}{4\pi} \sin \frac{\pi}{b} \right)^b l^b \int_0^l \left| \frac{dx}{dt} \right|^b dt.$$

Ebenso ergibt der Satz (20):

Es bezeichne  $z(t)$  eine für  $0 \leq t \leq \lambda$  definierte stetige Funktion, deren Ableitung den Voraussetzungen (3) genügt, und die im Definitionsintervall mindestens eine Nullstelle besitzt. Dann gilt für den beliebigen reellen Exponenten  $b \geq 1$

$$(26) \quad \int_0^\lambda |z|^b dt \leq \frac{1}{b-1} \left( \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi}{b} \right)^b \lambda^b \int_0^\lambda \left| \frac{dz}{dt} \right|^b dt.$$

Diese letzte Ungleichung ist für den Fall, daß  $b$  eine positive ganze gerade Zahl ist, unter Feststellung derjenigen Funktionen, für welche das Gleichheitszeichen gilt, von Hardy und Littlewood<sup>1)</sup> hergeleitet worden.

<sup>1)</sup> Some integral inequalities connected with the calculus of variations. Quarterly Journ. of Mathematics, Oxf. Ser. 3 (1932), S. 241–262.

Setzt man endlich  $b = 2$ , so liefert (25)

$$(27) \quad \int_0^l \left(x - \frac{m+\mu}{2}\right)^2 dt \leq \frac{l^3}{4\pi^2} \int_0^l \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt.$$

Macht man jetzt die Voraussetzung

$$(28) \quad \int_0^l x(t) dt = 0,$$

so wird

$$(29) \quad \int_0^l \left(x - \frac{m+\mu}{2}\right)^2 dt = \int_0^l x^2 dt + l \left(\frac{m+\mu}{2}\right)^2.$$

Unter der Voraussetzung (28) läßt sich daher die Ungleichung (27) auch in der folgenden Gestalt schreiben

$$(30) \quad \int_0^l x^2 dt \leq \frac{l^3}{4\pi^2} \int_0^l \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt - l \left(\frac{m+\mu}{2}\right)^2.$$

Verzichtet man hier auf den verschärfenden Subtrahendus auf der rechten Seite, so entsteht die wohlbekannte Wirtingersche<sup>2)</sup> Ungleichung.

### § 3.

#### Diskussion der in den Ungleichungen auftretenden Zahlenfaktoren als Funktionen der Exponenten.

Wegen bekannter Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion gelten gemäß den Definitionen (6) folgende Beziehungen:

$$(31) \quad G(0) = 1, \quad G(1) = e,$$

$$(32) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} (u^{-\frac{1}{2}} G(u)) = \lim_{u \rightarrow \infty} (u^{\frac{1}{2}} e^u u^{-u} \Gamma(u)) = \sqrt{2\pi},$$

$$(33) \quad \frac{d^2}{du^2} \log G(u) < 0 \quad \text{für } u > 0.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} \log G(u) &= \frac{d^2}{du^2} (u - u \log u) + \frac{d^2}{du^2} \log \Gamma(1+u) \\ &= -\frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(u+n)^2} < -\frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{u+n-1} - \frac{1}{u+n} \right) = 0. \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Einen sehr einfachen Beweis für diese Wirtingersche Ungleichung hat Dinghas gegeben; Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper, Abhandl. d. Preuß. Akad. der Wissensch. 1939, Math.-naturwiss. Klasse Nr. 11.

Ferner ist

$$(34) \quad \frac{d}{du} \log G(u) > 0 \text{ und mithin auch } \frac{d}{du} G(u) > 0.$$

Denn gäbe es einen Wert von  $u \geq 0$ , für welchen der erstere dieser beiden Differentialquotienten Null oder negativ ist, so müßte er von dieser Stelle ab wegen (33) negativ bleiben. Die Funktion  $G(u)$  müßte dann von dieser Stelle ab monoton abnehmen, was wegen (32) unmöglich ist.

Weiter gilt gemäß (6)

$$(35) \quad H(u, v) = H(v, u),$$

$$(36) \quad H(0, v) = H(v, 0) = 1,$$

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial u} H(u, v) < 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} H(u, v) < 0 \text{ für } u > 0 \text{ und } v > 0.$$

Denn es ist bei Berücksichtigung von (33)

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial u} H(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \log G(u+v) - \frac{\partial}{\partial u} \log G(u) < 0.$$

Ferner gilt

$$(39) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} H(u, v) = \frac{1}{G(v)}.$$

Denn es ist wegen (32)

$$(40) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} H(u, v) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{u+v}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(u+v)^{-\frac{1}{2}} G(u+v)}{u^{-\frac{1}{2}} G(u)} \cdot \frac{1}{G(v)} \right] = \frac{1}{G(v)}.$$

Endlich ist

$$(41) \quad H(u, 1) = \frac{e^{1+u} (1+u)^{-(1+u)} \Gamma(2+u)}{e^u u^{-u} \Gamma(1+u) e} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u}.$$

Sowohl aus (41) wie aus (39) folgt

$$(42) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} H(u, 1) = \frac{1}{e}.$$

Aus (37) folgt für  $a > 0, b > 1$

$$(43) \quad \frac{\partial}{\partial a} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) < 0.$$

Aus (36) folgt

$$(44) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) = 1$$

und aus (39)

$$(45) \quad \lim_{a \rightarrow 0} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) = \frac{1}{G\left(\frac{b-1}{b}\right)},$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite, wenn  $b$  von 1 bis  $\infty$  läuft, wegen (34) von 1 bis  $\frac{1}{e}$  abnimmt.

Aus (36) und (41) folgt ferner

$$(46) \quad \lim_{b \rightarrow 1} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) = 1, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) = \frac{1}{(1+a)^{\frac{1}{a}}},$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung, wenn  $a$  von 0 bis  $\infty$  läuft, wegen (37) monoton von  $\frac{1}{e}$  bis 1 zunimmt.

Aus (43), (44), (45), (46) ergibt sich endlich für  $a > 0$ ,  $b \geq 1$

$$(47) \quad 1 \geq H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) \geq \frac{1}{G\left(\frac{b-1}{b}\right)} > \frac{1}{e},$$

$$(48) \quad 1 \geq H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) > \frac{1}{(1+a)^{\frac{1}{a}}} > \frac{1}{e},$$

$$(49) \quad 1 \geq H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right) > \frac{1}{e}.$$

#### § 4.

##### Grenzfälle.

Bezeichnet  $M'$  die obere Grenze von  $\left|\frac{d\xi}{dt}\right|$ , so ist

$$(50) \quad \left\{b-1 \int_0^1 \left|\frac{d\xi}{dt}\right|^b dt\right\}^{\frac{1}{b}} \leq M' l.$$

Man darf also den Ausdruck auf der linken Seite dieser Ungleichung in den Ungleichungen (4), (5), wo er auf der rechten Seite auftritt, durch  $M'l$  ersetzen. Läßt man dann bei festgehaltenem  $a$  und  $\xi(t)$   $b$  unendlich werden, so ergibt sich wegen (46)

$$(51) \quad \left\{\frac{1}{l} \int_0^1 |\xi|^a dt\right\}^{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{(1+a)^{\frac{1}{a}}} M' l$$

und wegen (31)

$$(52) \quad \frac{1}{l} \int_0^1 \log |\xi| dt \leq \log \left[ \frac{1}{4e} M' l \right].$$

Das Gleichheitszeichen in diesen beiden nicht tief liegenden Ungleichungen gilt, wie man leicht nachprüft, für die Funktion

$$(53) \quad \xi = c_1 S\left(\frac{t}{l} + c_2\right),$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  willkürliche Konstanten bedeuten und  $S(\tau)$  die periodische Funktion mit der Periode 1 bezeichnet, welche im Intervall  $0 \leq \tau \leq 1$  in

der  $(\tau, \xi)$ -Ebene durch den Geradenzug dargestellt wird, der durch die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(\frac{1}{2}, -1)$ ,  $(1, 0)$  geht.

Daß das Gleichheitszeichen nur für diese Funktion gilt, wird aus einem anderen Beweise der Ungleichungen hervorgehen, der im § 5 folgt.

Ehe wir weitergehen, sei an die folgenden beiden bekannten Grenzbeziehungen erinnert, die im Interesse der Durchsichtigkeit des gesamten Sachverhalts hier noch mit Beweisen versehen sein sollen:

Es sei  $f(t)$ ,  $0 \leq t \leq p$ , eine stetige nicht negative Funktion mit dem Maximum  $M$ . Dann ist

$$(54) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p f(t)^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} = M,$$

$$(55) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p f(t)^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} = e^{\left\{ \frac{1}{p} \int_0^p \log f(t) dt \right\}}$$

Dabei ist, da  $\log f(t)$  nach oben beschränkt ist, das Integral über  $\log f(t)$ , falls es nicht konvergiert, als negativ unendlich zu betrachten, so daß die rechte Seite verschwindet.

Beweis der Gleichung (54). Es ist zunächst

$$(56) \quad \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p f(t)^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} \leq M.$$

Ist andererseits  $M_1 < M$ , so muß es ein Intervall  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha < \beta$ , geben, in welchem  $f(t) \geq M_1$  ist.

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_0^p f(t)^a dt &\geq \int_{\alpha}^{\beta} M_1^a dt = (\beta - \alpha) M_1^a, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p f(t)^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} &\geq \lim_{a \rightarrow \infty} (\beta - \alpha)^{\frac{1}{a}} M_1 = M_1. \end{aligned}$$

Da das für jedes  $M_1 < M$  gilt, so folgt

$$(57) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p f(t)^a dt \right\}^{\frac{1}{a}} \geq M.$$

(56) und (57) ergeben die zu beweisende Gleichung (54).

Beweis der Gleichung (55). Wird  $f(t)$  mit einem konstanten Faktor versehen, so multiplizieren sich beide Seiten der Gleichung (55) mit demselben.

Wir dürfen also annehmen, daß  $M = 1$  ist. Setzt man jetzt

$$(58) \quad \varphi(t) = -\log f(t), \quad f(t) = e^{-\varphi(t)},$$

so ist also  $\varphi \geq 0$ . Man definiere nun die Funktion  $\varphi_0(t)$  durch die Gleichungen

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) \quad \text{für} \quad \varphi(t) \leq c, \quad \varphi_0(t) = c \quad \text{für} \quad \varphi(t) \geq c.$$

Dann gilt gemäß der Lagrangeschen Restgliedabschätzung nach dem zweiten Gliede der Taylorentwicklung von  $e^{-a\varphi}$  und  $e^{-a\varphi_0}$

$$\begin{aligned} 1 - a\varphi &< 1 - a\varphi + \frac{1}{2}a^2\varphi^2 e^{-\theta a\varphi} = e^{-a\varphi} \leq e^{-a\varphi_0} = \\ &= 1 - a\varphi_0 + \frac{1}{2}a^2\varphi_0^2 e^{-\theta' a\varphi_0} \leq 1 - a\varphi_0 + \frac{c^2}{2}a^2, \end{aligned}$$

$$1 - \frac{a}{p} \int_0^p \varphi dt \leq \frac{1}{p} \int_0^p e^{-a\varphi} dt \leq 1 - \frac{a}{p} \int_0^p \varphi_0 dt + \frac{c^2}{2}a^2,$$

$$(59) \quad \overline{\lim}_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p e^{-a\varphi} dt \right\}^{\frac{1}{a}} \leq \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{p} \int_0^p \varphi_0 dt \right) a + \frac{c^2}{2}a^2 \right\}^{\frac{1}{a}} = e^{-\left(\frac{1}{p} \int_0^p \varphi_0 dt\right)}$$

$$(60) \quad \underline{\lim}_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p e^{-a\varphi} dt \right\}^{\frac{1}{a}} \geq \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ 1 - \left( \frac{a}{p} \int_0^p \varphi dt \right) a \right\}^{\frac{1}{a}} = e^{-\frac{1}{p} \int_0^p \varphi dt}$$

Da

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^p \varphi_0 dt = \int_0^p \varphi dt$$

ist, so folgt aus (59) und (60) die mit der zu beweisenden Gleichung (55) gleichbedeutende Gleichung

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^p e^{-a\varphi} dt \right\}^{\frac{1}{a}} = e^{-\frac{1}{p} \int_0^p \varphi dt}$$

Lassen wir jetzt in der Ungleichung (4) bei festgehaltenem  $b$  und  $\xi(t)$   $a$  unendlich werden, so folgt aus (54) und (44), wenn die Extreme von  $\xi(t)$  mit  $\pm M$  bezeichnet werden,

$$(61) \quad M \leq \frac{1}{4} \left\{ p^{-1} \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}}.$$

Ebenso folgt aus (51) bei unendlich werdendem  $a$

$$(62) \quad M \leq \frac{1}{4} M' l.$$

Das Gleichheitszeichen in diesen beiden übrigens ziemlich trivialen Ungleichungen gilt, wie man leicht nachprüft, ebenfalls für die durch (53) definierte

Funktion. Daß es für  $b > 1$  nur für diese gilt, wird aus einem anderen Beweise der Ungleichungen hervorgehen, der im § 5 folgt.

Läßt man endlich in der Ungleichung (4) bei festgehaltenem  $b$  und  $\xi(t)$   $a$  gegen Null konvergieren, so folgt aus (55) und (45) die Ungleichung (5). Auf diesem Wege ergibt sich jedoch nicht die Feststellung derjenigen Funktionen, für welche in (5) das Gleichheitszeichen gilt. Das wird aus einem anderen Beweis der Ungleichung (5) hervorgehen, der im § 5 folgt.

Zum Schluß sei noch ergänzt, daß unter den Voraussetzungen der Ungleichungen (11), (12); (13), (14); (20), (21) die Ungleichungen (51), (52), (61), (62) dieselben Abwandlungen erfahren, welche die Ungleichungen (4), (5) in die Ungleichungen (11), (12); (13), (14); (20), (21) überführen.

### § 5.

#### Beweis der Ungleichungen.

Da ein konstanter Faktor von  $\xi$  sich in den Ungleichungen weghebt und da durch die Substitution  $t = lt'$   $l$  in 1 übergeht, so kann von vornherein angenommen werden, daß die Extrema von  $\xi(t)$  gleich  $\pm 1$  sind und daß auch  $l$  gleich 1 ist. Die jetzt für  $0 \leq t \leq 1$  definierte Funktion  $\xi(t)$  ergänzen wir zu einer für alle Werte von  $t$  definierten stetigen periodischen Funktion mit der Periode 1. Das ist wegen der Voraussetzung  $\xi(0) = \xi(1)$  möglich. Da nunmehr die in den Ungleichungen vorkommenden Integrale sich nicht ändern, wenn sie anstatt von 0 bis 1 von einem beliebigen  $t_0$  bis  $t_0 + 1$  erstreckt werden, so können wir zum Koordinatenanfangspunkt der  $t$ -Achse eine Nullstelle der Funktion  $\xi(t)$  wählen und dann wieder alle Integrale von 0 bis 1 erstrecken.  $\xi(t)$  kann natürlich die Werte 0, +1, -1 innerhalb einer Periode unbeschränkt oft annehmen. Es sei nun  $\sigma$  eine zwischen 0 und 1 gelegene Stelle, an welcher  $\xi = +1$ ,  $\sigma'$  eine zwischen 0 und 1 gelegene Stelle, an welcher  $\xi = -1$  und  $\sigma_0$  eine zwischen  $\sigma$  und  $\sigma'$  gelegene Stelle, an welcher  $\xi = 0$  wird. Da man  $\xi$  durch  $-\xi$  ersetzen darf, so kann angenommen werden, daß  $\sigma < \sigma'$  ist. Es darf daher vorausgesetzt werden, daß

$$(63) \quad \xi(0) = 0, \quad \xi(\sigma) = 1, \quad \xi(\sigma_0) = 0, \quad \xi(\sigma') = -1, \quad \xi(1) = 0, \\ 0 < \sigma < \sigma_0 < \sigma' < 1$$

ist. Diese die Allgemeinheit nicht beschränkenden Voraussetzungen sollen diesem Paragraphen durchweg zugrunde gelegt werden.

Beweis der Ungleichung (4). Man betrachte in der  $(\xi, \eta)$ -Ebene das Flächenstück, das von der Kurve

$$(64) \quad |\xi|^a + \eta^{\frac{b}{b-1}} = 1, \quad a > 0, \quad b > 1, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad \eta \geq 0$$

und der  $\xi$ -Achse begrenzt wird. Durch die  $\eta$ -Achse wird es in zwei symmetrische Hälften zerlegt, deren Flächeninhalt mit  $F_{a,b}$  bezeichnet werde. Wegen (63) ist dann

$$(65) \quad F_{a,b} = \int_0^a \eta \frac{d\xi}{dt} dt \leq \int_0^a \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt, \quad F_{a,b} = \int_{a_0}^a \eta \frac{d\xi}{dt} dt \leq \int_a^{a_0} \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt,$$

$$(66) \quad F_{a,b} = \int_{a'}^{a_0} \eta \frac{d\xi}{dt} dt \leq \int_{a_0}^{a'} \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt, \quad F_{a,b} = \int_{a'}^1 \eta \frac{d\xi}{dt} dt \leq \int_{a'}^1 \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt.$$

Die Addition dieser vier Ungleichungen ergibt

$$(67) \quad 4F_{a,b} \leq \int_0^1 \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt.$$

Nun ist gemäß der Hölderschen Ungleichung

$$(68) \quad \int_0^1 \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt \leq \left\{ \int_0^1 \eta^{\frac{b}{b-1}} dt \right\}^{\frac{b-1}{b}} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}}.$$

Also ist

$$(69) \quad 4F_{a,b} \leq \left\{ \int_0^1 \eta^{\frac{b}{b-1}} dt \right\}^{\frac{b-1}{b}} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right\}^{\frac{1}{b}}.$$

Man setze jetzt

$$(70) \quad \int_0^1 |\xi|^a dt = A, \quad \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt = B.$$

Dann ist wegen (64)

$$A < 1$$

und (69) ergibt bei Einführung von (64)

$$(71) \quad 1 \leq \frac{1}{4F_{a,b}} (1-A)^{\frac{b-1}{b}} B^{\frac{1}{b}}.$$

Also ist

$$(72) \quad A^{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{4F_{a,b}} (1-A)^{\frac{b-1}{b}} A^{\frac{1}{a}} B^{\frac{1}{b}}.$$

Es bezeichne nun  $M_{a,b}$  das Maximum der Funktion

$$(73) \quad (1-u)^{\frac{b-1}{b}} u^{\frac{1}{a}} \quad \text{für } 0 \leq u \leq 1.$$

Dann folgt aus (72)

$$(74) \quad A^{\frac{1}{a}} \leq \frac{M_{a,b}}{4F_{a,b}} B^{\frac{1}{b}}.$$

Das ist, wie die Ausrechnung von  $M_{a,b}$  und  $F_{a,b}$  ergeben wird, die zu beweisende Ungleichung (4).

Das Gleichheitszeichen in (74) ist an folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen gebunden:

Erstens das Bestehen des Gleichheitszeichens in den Ungleichungen (65), (66).

Zweitens das Bestehen des Gleichheitszeichens in der Hölderschen Ungleichung (68).

Drittens und schließlich muß die Funktion (73) ihr Maximum an der Stelle  $u = A$  annehmen, d. h. es muß die das Verschwinden der logarithmischen Ableitung der Funktion ausdrückende Gleichung

$$(75) \quad \frac{1}{a} \frac{1}{u} - \frac{b-1}{b} \frac{1}{1-u} = 0$$

für  $u = A$  erfüllt sein, also

$$(76) \quad A = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}}$$

sein.

Das Gleichheitszeichen in (65), (66) gilt wegen (63) dann und nur dann, wenn

$$(77) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} \geq 0 \text{ für } 0 < t < \sigma, \quad \frac{d\xi}{dt} \leq 0 \text{ für } \sigma < t < \sigma_0, \\ \frac{d\xi}{dt} \leq 0 \text{ für } \sigma_0 < t < \sigma', \quad \frac{d\xi}{dt} \geq 0 \text{ für } \sigma' < t < 1 \end{aligned}$$

ist. Das Gleichheitszeichen in (68) gilt nach einer bekannten Eigenschaft der Hölderschen Ungleichung dann und nur dann, wenn

$$(78) \quad \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b = \text{Const } \eta^{\frac{b}{b-1}}$$

ist, oder in anderer Form, wenn

$$(79) \quad \left| \frac{dt}{d\xi} \right| = \kappa \eta^{-\frac{1}{b-1}}$$

ist, wobei  $\kappa$  eine positive Konstante bedeutet. Hieraus folgt wegen (77)

$$(80) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{d\xi} = \kappa \eta^{-\frac{1}{b-1}} \text{ für } 0 < t < \sigma, \quad \frac{dt}{d\xi} = -\kappa \eta^{-\frac{1}{b-1}} \text{ für } \sigma < t < \sigma_0, \\ \frac{dt}{d\xi} = -\kappa \eta^{-\frac{1}{b-1}} \text{ für } \sigma_0 < t < \sigma', \quad \frac{dt}{d\xi} = \kappa \eta^{-\frac{1}{b-1}} \text{ für } \sigma' < t < 1. \end{aligned}$$

Wegen (63) folgt jetzt

$$(81) \quad \int_0^1 \kappa \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi = \sigma = \sigma_0 - \sigma, \quad \int_{-1}^0 \kappa \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi = \sigma' - \sigma_0 = 1 - \sigma'.$$

Da  $\eta$  eine gerade Funktion ist, so folgt

$$(82) \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}, \quad \sigma' = \frac{1}{2},$$

$$(83) \quad \int_0^1 x \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi = \frac{1}{2}.$$

Durch diese letzte Gleichung wird  $x$  bestimmt.

Nun ist wegen (70) und (80)

$$(84) \quad A = \int_0^{\sigma} |\xi|^a dt + \int_{\sigma}^{\sigma_0} |\xi|^a dt + \int_{\sigma_0}^{\sigma'} |\xi|^a dt + \int_{\sigma'}^1 |\xi|^a dt = \int_0^1 |\xi|^a x \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi + \\ + \int_1^0 -|\xi|^a x \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi + \int_0^{-1} -|\xi|^a x \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi + \int_{-1}^0 |\xi|^a x \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi.$$

Also ist bei Berücksichtigung von (64) und (83)

$$(85) \quad A = 4x \int_0^1 |\xi|^a \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi = 4x \int_0^1 (1 - \eta^{\frac{b}{b-1}}) \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi = 1 - 4x \int_0^1 \eta d\xi.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$A = 1 + 4x \int_0^1 \xi \frac{d\eta}{d\xi} d\xi = 1 - 4x \int_0^1 \xi \frac{a \xi^{a-1}}{\frac{b}{b-1} \eta^{\frac{1}{b-1}}} d\xi \\ = 1 - \frac{a(b-1)}{b} 4x \int_0^1 \xi^a \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi.$$

Wegen (85) ist also

$$(86) \quad A = 1 - \frac{a(b-1)}{b} A$$

und hieraus folgt die Gleichung (76) in Übereinstimmung mit der Gleichung (75), deren Nachweis allein noch erübrigte, um das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (74) zu sichern.

Bezeichnet man jetzt die durch (64) und (80) definierte Funktion  $\xi(t)$  mit  $S_{a,b}(t)$ , so leuchtet unmittelbar ein, daß diese Funktion für alle Werte von  $t$  dasselbe Vorzeichen hat wie  $\sin 2\pi t$ , daß sie an denselben Stellen die Werte 0, +1, -1 annimmt und die Symmetrieeigenschaften (9) besitzt.

Aus (64) und (79) folgt ferner

$$(87) \quad |S_{a,b}(t)|^a + x^b \left| \frac{dS_{a,b}(t)}{dt} \right|^b = 1.$$

Bei Berücksichtigung von (79), (80), (82) folgt unmittelbar, daß  $\frac{dS_{a,b}(t)}{dt}$  dasselbe Vorzeichen hat wie  $\cos 2\pi t$ , an denselben Stellen verschwindet und die Extremalwerte  $\pm \frac{1}{x}$  annimmt, und die durch Differentiation von (9) sich ergebenden Symmetrieeigenschaften mit  $\cos 2\pi t$  gemein hat.

Wenn wir endlich die am Anfang dieses Paragraphen gemachten normierenden Voraussetzungen über  $\xi(t)$  wieder aufheben, so stellt sich die Gesamtheit der Funktionen, für welche in der Ungleichung (74) das Gleichheitszeichen besteht, in der Tat in der Form (7) dar

$$(88) \quad \xi(t) = c_1 S_{a,b} \left( \frac{t}{T} + c_2 \right),$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  willkürliche Konstanten bedeuten.

Jetzt erübrigt nur noch die Ausrechnung von  $F_{a,b}$  und  $M_{a,b}$ .

$$F_{a,b} = \int_0^1 \eta d\xi = \int_0^1 (1 - \xi^a)^{\frac{b-1}{b}} d\xi = \frac{1}{a} \int_0^1 (1-w)^{\frac{b-1}{b}} w^{\frac{1}{a}-1} dw.$$

Auf der rechten Seite steht jetzt das Produkt von  $\frac{1}{a}$  mit dem Eulerschen Integral erster Gattung

$$B\left(1 + \frac{b-1}{b}, \frac{1}{a}\right) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{b-1}{b}\right) \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{b-1}{b} + \frac{1}{a}\right)}.$$

Also erhält man

$$(89) \quad F_{a,b} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \Gamma\left(1 + \frac{b-1}{b}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}\right)}.$$

Um  $M_{a,b}$  zu berechnen, haben wir den aus (75) sich ergebenden Wert

$$u = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}}$$

in (73) einzusetzen

$$(90) \quad M_{a,b} = \left(1 - \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}}\right)^{\frac{b-1}{b}} \left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}}\right)^{\frac{1}{a}} \\ = \left(\frac{b-1}{b}\right)^{\frac{b-1}{b}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}\right)^{-\left(\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}\right)}$$

$$(91) \quad \frac{M_{a,b}}{4 F_{a,b}} = \frac{1}{4} \frac{e^{-\left(\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}\right)} G\left(\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}\right)}{e^{-\frac{1}{a}} G\left(\frac{1}{a}\right) e^{-\frac{b-1}{b}} G\left(\frac{b-1}{b}\right)} = \frac{1}{4} \frac{G\left(\frac{1}{a} + \frac{b-1}{b}\right)}{G\left(\frac{1}{a}\right) G\left(\frac{b-1}{b}\right)} = \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right),$$

wobei die Funktionen  $G(u)$  und  $H(u, v)$  durch (6) definiert sind.

Damit ist die Ungleichung (4) nebst allen im § 1 sich an sie schließenden Sätzen bewiesen.

Beweis der Ungleichung (5). Man betrachte das Flächenstück, das in der  $(\xi, \eta)$ -Ebene von der Kurve

$$(92) \quad \log |\xi| + \eta^{\frac{b}{b-1}} = 0, \quad b > 1, \quad \eta \geq 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

und der  $\xi$ -Achse begrenzt wird. Durch die  $\eta$ -Achse wird es in zwei symmetrische Hälften zerlegt, deren Flächeninhalt mit  $F_b$  bezeichnet werde. Dann ergeben sich genau so wie oben, wenn man nur  $F_{a,b}$  durch  $F_b$  ersetzt, die Gleichungen (65), (66), (67), (68), (69). Die Gleichung (69) lautet jetzt

$$(93) \quad 4F_b \leq \left( \int_0^1 \eta^{\frac{b}{b-1}} dt \right)^{\frac{b-1}{b}} \left( \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right)^{\frac{1}{b}}.$$

Man setze jetzt

$$(94) \quad - \int_0^1 \log |\xi| dt = D, \quad \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt = B.$$

Dann ist wegen  $|\xi| \leq 1$

$$(95) \quad D > 0$$

und (93) ergibt mit Rücksicht auf (92)

$$(96) \quad 1 \leq \frac{1}{4F_b} D^{\frac{b-1}{b}} B^{\frac{1}{b}}$$

$$(97) \quad e^{-D} \leq \frac{1}{4F_b} D^{\frac{b-1}{b}} e^{-D} B^{\frac{1}{b}}.$$

Es sei nun  $M_b$  das Maximum der Funktion

$$(98) \quad u^{\frac{b-1}{b}} e^{-u} \quad \text{für} \quad 0 \leq u.$$

Dann folgt aus (97)

$$(99) \quad -D \leq \log \left( \frac{M_b}{4F_b} B^{\frac{1}{b}} \right).$$

Das ist, wie die Ausrechnung von  $M_b$  und  $F_b$  ergeben wird, die zu beweisende Ungleichung (5). Wie oben folgt, daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Gleichungen (77), (78), (79) bestehen, und wenn die Funktion (98) ihr Maximum an der Stelle  $u = D$  annimmt, d. h. wenn die das Verschwinden der logarithmischen Ableitung der Funktion ausdrückende Gleichung

$$\frac{b-1}{b} \frac{1}{u} - 1 = 0$$

für  $u = D$  erfüllt ist, also wenn

$$(100) \quad D = \frac{b-1}{b}$$

ist. Nun folgen aus (77) und (79) ganz wie oben die Gleichungen (80), (81), (82), (83).

Auch die Gleichungen (84), (85) bleiben bestehen, wenn in ihnen  $A$  durch  $D$  und  $|\xi|^*$  durch  $-\log|\xi|$  ersetzt werden. (85) lautet jetzt

$$D = 4\pi \int_0^1 -\log|\xi| \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi.$$

Bei Berücksichtigung von (92) ergibt sich

$$(101) \quad D = 4\pi \int_0^1 \eta d\xi$$

und durch partielle Integration mit Rücksicht auf (83)

$$D = -4\pi \int_0^1 \xi \frac{d\eta}{d\xi} d\xi = 4\pi \int_0^1 \xi \frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{b}{b-1} \eta^{\frac{1}{b-1}}} d\xi = \frac{b-1}{b} 4\pi \int_0^1 \eta^{-\frac{1}{b-1}} d\xi = \frac{b-1}{b}.$$

Das ist die Gleichung (100), deren Nachweis allein noch erübrigte, um das Gleichheitszeichen in (99) sicherzustellen.

Bezeichnet man jetzt die durch (92) und (80) definierte Funktion  $\xi(t)$  mit  $L_b(t)$ , so leuchtet unmittelbar ein, daß diese Funktion dasselbe Vorzeichen hat  $\sin 2\pi t$ , daß sie an denselben Stellen verschwindet und ihre Extremalwerte  $\pm 1$  annimmt, und daß sie die Symmetrieeigenschaften (9) mit  $\sin 2\pi t$  gemein hat. Aus (79) und (92) folgt ferner:

$$\log |L_b(t)| + x^b \left| \frac{dL_b(t)}{dt} \right|^b = 0.$$

Bei Berücksichtigung von (79), (80), (82) folgt jetzt unmittelbar, daß  $\frac{dL_b(t)}{dt}$  dasselbe Vorzeichen hat wie  $\cos 2\pi t$ , an denselben Stellen verschwindet und die Extremalwerte annimmt, welche gleich  $\pm \infty$  werden, und die durch Differentiation sich aus (9) ergebenden Symmetrieeigenschaften mit  $\cos 2\pi t$  gemein hat.

Heben wir jetzt die am Anfang dieses Paragraphen über  $\xi(t)$  gemachten normierenden Voraussetzungen auf, so ergibt sich die Gesamtheit der Funktionen, für welche in der Ungleichung (99) das Gleichheitszeichen gilt in der Form (8)

$$\xi(t) = c_1 L_b\left(\frac{t}{T} + c_2\right),$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  willkürliche Konstanten bezeichnen.

Jetzt erübrigt nur noch die Ausrechnung von  $F_b$  und  $M_b$ .

$$F_b = \int_0^1 (-\log \xi)^{\frac{b-1}{b}} d\xi = \int_0^\infty w^{\frac{b-1}{b}} e^{-w} dw = \Gamma\left(1 + \frac{b-1}{b}\right).$$

Durch Einsetzen von (100) in (98) ergibt sich

$$M_b = \left(\frac{b-1}{b}\right)^{\frac{b-1}{b}} e^{-\frac{b-1}{b}}.$$

Also erhält man

$$(102) \quad \frac{M_b}{4F_b} = \frac{1}{4e^{\frac{b-1}{b}} \left(\frac{b-1}{b}\right)^{-\frac{b-1}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{b-1}{b}\right)} = \frac{1}{4G\left(\frac{b-1}{b}\right)},$$

wobei die Funktion  $G(u)$  durch (6) definiert ist.

Damit ist die Ungleichung (5) nebst allen im § 1 an sie geknüpften Behauptungen bewiesen.

Beweis der Ungleichungen (51), (52), (61), (62). Man betrachte in der  $(\xi, \eta)$ -Ebene die Flächenstücke, welche von den Kurven

$$(103) \quad |\xi|^a + \eta = 1, \quad a > 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1;$$

$$(104) \quad \log |\xi| + \eta = 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

und der  $\xi$ -Achse begrenzt werden, und das Rechteck, welches von den Geraden

$$(105) \quad \eta = 1, \quad \xi = 1, \quad \xi = -1$$

und der  $\xi$ -Achse begrenzt wird. Jedes dieser drei Flächenstücke wird durch die  $\eta$ -Achse in zwei symmetrische Hälften zerlegt, deren Flächeninhalte  $\Phi_a$ ,  $\Phi$  und 1 seien. Dann ergeben sich genau wie oben, wenn man nur  $F_a$ ,  $\Phi$ , und 1 ersetzt, die Gleichungen (65), (66), (67).

Aus der Gleichung (67) wird

$$(106) \quad 4\Phi_a \leq \int_0^1 \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt;$$

$$(107) \quad 4\Phi \leq \int_0^1 \eta \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt;$$

$$(108) \quad 4 \leq \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt.$$

Dabei ist  $\eta$  in (106) durch (103) definiert und in (107) durch (104). Bezeichnet  $M'$  die obere Grenze von  $\left| \frac{d\xi}{dt} \right|$ , so folgt wegen (106)

$$(109) \quad 4\Phi_a \leq M' \int_0^1 \eta dt = M'(1-A),$$

wobei  $A$  wie früher durch (70) definiert ist. Also ergibt sich

$$(110) \quad A^{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{4\Phi_a} (1-A) A^{\frac{1}{a}} M'.$$

Es sei nun  $M_a$  das Maximum der Funktion

$$(111) \quad (1-u)u^{\frac{1}{a}} \quad \text{für } 0 \leq u \leq 1.$$

Dann folgt

$$(112) \quad A^{\frac{1}{a}} \leq \frac{M_a}{4\Phi_a} M'.$$

Das ist, wie die Ausrechnung von  $\Phi_a$  und  $M_a$  ergeben wird, die zu beweisende Ungleichung (51).

Das Gleichheitszeichen besteht dann und nur dann, wenn (77) gilt, wenn

$$(113) \quad \left| \frac{d\xi}{dt} \right| = M'$$

ist, und wenn die Funktion (111) ihr Maximum an der Stelle  $u = A$  annimmt. Aus den beiden ersten Tatsachen folgt, daß

$$(114) \quad M' = 4$$

ist, und daß  $\xi(t)$  mit der unter (53) definierten Funktion  $S(t)$  übereinstimmt. Für  $A$  erhält man in diesem Falle

$$(115) \quad A = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} (4t)^a dt = \int_0^1 w^a dw = \frac{1}{a+1}.$$

Da die Funktion (111) ihr Maximum in der Tat an der Stelle

$$u = \frac{1}{a+1}$$

annimmt, so ist die Geltung des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (112) für die Funktion

$$(116) \quad \xi = S(t)$$

sichergestellt.

Man erhält

$$(117) \quad \Phi_a = \int_0^1 (1 - \xi^a) d\xi = \frac{a}{a+1}, \quad M_a = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) \left(\frac{1}{a+1}\right)^{\frac{1}{a}},$$

$$\frac{M_a}{4\Phi_a} = \frac{1}{4(1+a)^{\frac{1}{a}}}.$$

Die Einführung dieses Resultats in (112) ergibt die Ungleichung (51). Damit ist die Ungleichung (51) mit allen im § 4 an sie geknüpften Aussagen bewiesen.

Aus (107) folgt bei Berücksichtigung von (104) und (94)

$$(118) \quad 4\Phi \leq M' \int_0^1 \eta dt = M' D,$$

$$e^{-D} \leq \frac{1}{4\Phi} D e^{-D} M',$$

$$(119) \quad -D \leq \log \left( \frac{1}{4\Phi} D e^{-D} M' \right).$$

Nun ist das Maximum der Funktion

$$(120) \quad u e^{-u} \quad \text{für } u \geq 0$$

gleich  $\frac{1}{e}$ . Aus (119) folgt daher a fortiori

$$(121) \quad -D \leq \log \left( \frac{1}{4\Phi} M' \right).$$

Das ist, da  $\Phi$  sich als gleich 1 ergeben wird, die zu beweisende Ungleichung (52).

Das Gleichheitszeichen besteht auch hier dann und nur dann, wenn (77) gilt, wenn

$$\left| \frac{d\xi}{dt} \right| = M'$$

ist, und die Funktion (120) ihr Maximum an der Stelle  $u = D$  annimmt, d. h. wenn

$$D = 1$$

wird.

Aus den beiden ersten Tatsachen folgt wieder, daß

$$M' = 4$$

ist, und daß  $\xi(t)$  mit der unter (53) definierten Funktion  $S(t)$  übereinstimmt. Für  $D$  erhält man in diesem Falle in der Tat

$$(122) \quad D = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} -\log(4t) dt = \int_0^1 -\log w dw = 1.$$

Damit ist die Geltung des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (121) für die Funktion (116) sichergestellt.

Man erhält für  $\Phi$

$$\Phi = \int_0^1 -\log \xi \, d\xi = 1.$$

Durch Einführung dieses Resultats in (121) ergibt sich die Ungleichung (52). Damit ist die Ungleichung (52) mit allen im § 4 an sie geknüpften Aussagen bewiesen.

Aus (108) folgt

$$(123) \quad 1 \leq \frac{1}{4} M'.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier ebenfalls dann und nur dann, wenn (77) besteht und wenn

$$\left| \frac{d\xi}{dt} \right| \equiv M'$$

ist, d. h. nur für die Funktion (116).

Damit ist die Gleichung (62) mit allen im § 4 an sie geknüpften Aussagen bewiesen.

Aus (108) folgt für  $b > 1$  ferner nach der Hölderschen Ungleichung

$$(124) \quad 4 \leq \left( \int_0^1 t^{\frac{b}{b-1}} dt \right)^{\frac{b-1}{b}} \left( \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right)^{\frac{1}{b}},$$

$$1 \leq \frac{1}{4} \left( \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^b dt \right)^{\frac{1}{b}}.$$

Das Gleichheitszeichen besteht auch hier dann und nur dann, wenn (77) gilt, und wenn

$$\left| \frac{d\xi}{dt} \right| = \text{Const}$$

ist, d. h. ebenfalls nur für die Funktion (116).

Für  $b = 1$  liefert (108) unmittelbar

$$1 \leq \frac{1}{4} \int_0^1 \left| \frac{d\xi}{dt} \right| dt,$$

wobei das Gleichheitszeichen für diejenigen und nur für diejenigen Funktionen gilt, für welche die Bedingungen (77) bei beliebigen  $\sigma, \sigma_0, \sigma'$  erfüllt sind.

Damit ist auch die letzte Ungleichung (61) mit allen im § 4 an sie geknüpften Aussagen bewiesen.

## § 6.

## Erweiterung der Voraussetzungen.

Wie bekannt und mit den üblichen Beweismethoden dieser Ungleichung leicht festzustellen, behält die für die Funktionen

$$f(t) \geq 0, \quad g(t) \geq 0$$

bestehende Höldersche Ungleichung

$$\int_0^t f(t) g(t) dt \leq \left\{ \int_0^t f(t)^{\frac{b}{b-1}} dt \right\}^{\frac{b-1}{b}} \left\{ \int_0^t g(t)^b dt \right\}^{\frac{1}{b}}$$

auch für den Fall ihre Gültigkeit, daß  $f(t)$  und  $g(t)$  meßbare Funktionen sind, wobei dann die Integrale im Lebesgueschen Sinne zu nehmen sind. Das Gleichheitszeichen gilt bei dieser Erweiterung dann und nur dann, wenn bis auf eine Punktmenge vom Maße Null

$$g(t)^b = \text{Const } f(t)^{\frac{b}{b-1}}$$

ist.

Dieses vorausgeschickt, soll jetzt gezeigt werden, daß alle in den vorigen Paragraphen entwickelten Sätze und Beweise unverändert bestehen bleiben, wenn die Voraussetzungen (3) über die Ableitung von  $\xi(t)$  durch folgende Voraussetzungen ersetzt werden:

I. Die Ableitung  $\xi'$  von  $\xi(t)$  ist bis auf eine Punktmenge vom Maße Null bestimmt und endlich.

II. Das Lebesguesche Integral

$$\int_0^t |\xi'(t)| dt$$

ist endlich.

III. Es ist für alle Werte von  $t$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \xi'(\tau) d\tau,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite im Lebesgueschen Sinne zu nehmen ist.

Wir betrachten etwa den Beweis der Ungleichung (4).

Es handelt sich zunächst darum, auf Grund der Gleichung (64) die Ungleichungen (65), (66) sicherzustellen, wobei hier wie in der Folge alle Integrale im Lebesgueschen Sinne zu nehmen sind.

Durch (64) wird  $\eta$  eine Funktion von  $\xi$ , die durch  $\eta(\xi)$  bezeichnet werde. Es bezeichne ferner  $J(u)$  den Flächeninhalt des von der  $\xi$ -Achse, der  $\eta$ -Achse, der Geraden  $\xi = u$  und der Kurve (64) begrenzten Gebietes. Es seien nun

$$t_0 = 0, \quad t_1, t_2, \dots, t_n = \sigma, \quad t_{r-1} < t_r$$

Teilpunkte. Dann wird

$$F_{a,b} = J(1) = J(1) - J(0) = J(\xi(\sigma)) - J(\xi(0)) \\ = \sum_1^n |J(\xi(t_r)) - J(\xi(t_{r-1}))| = \sum_1^n \eta(\vartheta_r) \{ \xi(t_r) - \xi(t_{r-1}) \},$$

wobei  $\vartheta_r$  einen Wert zwischen  $\xi(t_{r-1})$  und  $\xi(t_r)$  bezeichnet. Wegen der Stetigkeit von  $\xi(t)$  gibt es zu jedem  $\vartheta_r$  einen Wert  $\Theta_r$  zwischen  $t_{r-1}$  und  $t_r$ , so daß

$$\xi(\Theta_r) = \vartheta_r$$

ist. Man erhält

$$F_{a,b} = \sum_1^n \eta(\xi(\Theta_r)) \cdot \{ \xi(t_r) - \xi(t_{r-1}) \},$$

und wegen der Voraussetzung III

$$F_{a,b} = \sum_1^n \eta(\xi(\Theta_r)) \cdot \int_{t_{r-1}}^{t_r} \xi'(t) dt = \sum_1^n \int_{t_{r-1}}^{t_r} \eta(\xi(\Theta_r)) \cdot \xi'(t) dt.$$

Nun ist

$$\int_0^a \eta(\xi(t)) \cdot \xi'(t) dt = \sum_1^n \int_{t_{r-1}}^{t_r} \eta(\xi(t)) \cdot \xi'(t) dt.$$

Folglich ist

$$\left| F_{a,b} - \int_0^a \eta(\xi(t)) \cdot \xi'(t) dt \right| \leq \sum_1^n \int_{t_{r-1}}^{t_r} | \eta(\xi(\Theta_r)) - \eta(\xi(t)) | \cdot | \xi'(t) | dt.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion  $\eta(\xi(t))$  kann bei vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  die Intervalleinteilung so dicht gewählt werden, daß in jedem Intervall

$$| \eta(\xi(\Theta_r)) - \eta(\xi(t)) | \leq \varepsilon$$

bleibt. Dann folgt bei Berücksichtigung der Voraussetzung II

$$| F_{a,b} - \int_0^a \eta(\xi(t)) \cdot \xi'(t) dt | \leq \varepsilon \int_0^a | \xi'(t) | dt.$$

Mithin ist

$$F_{a,b} = \int_0^a \eta(\xi(t)) \cdot \xi'(t) dt \leq \int_0^a \eta \cdot | \xi'(t) | dt.$$

Das ist die erste der Ungleichungen (65), (66); die übrigen ergeben sich ebenso. Nun läuft der Beweis genau so weiter wie im § 5. Nur können wir aus dem Bestehen des Gleichheitszeichens in der Hölderschen Ungleichung (68) zu-

nächst nur auf das Bestehen der Gleichungen (78), (79), (80) bis auf eine Punktmenge vom Maße Null schließen. Wegen der Voraussetzung III folgt nun aber aus (80)

$$\xi(t) = \int_0^t \frac{1}{\pi} \eta(\xi(\tau))^{\frac{1}{p-1}} d\tau.$$

Aus dieser Gleichung folgt jetzt, daß für *alle* Werte von  $t$

$$\xi'(t) = \frac{1}{\pi} \eta(\xi(t))^{\frac{1}{p-1}}$$

ist.

Von nun ab verläuft der Beweis genau so wie im § 5.

Die Voraussetzung III ist in der Tat unerlässlich. Denn es gibt bekanntlich stetige Funktionen, welche nicht konstant sind, im besonderen auch monoton wachsen können, während ihre Ableitung bis auf eine Punktmenge vom Maße Null verschwindet. Bezeichnet  $\chi(t)$  eine solche und setzt man

$$z(t) = \chi(t) - \chi(0), \text{ also } z(0) = 0,$$

so treffen für diese Funktion die Ungleichungen (20), (21) offenbar nicht zu, da die rechte Seite verschwindet, während die linke größer als Null wird.

(Eingegangen am 15. 1. 1940.)

## Über die meßbaren Funktionen.

Von

Bedřich Pospíšil in Brünn.

Nach Stone kann ein beliebiger Mengenkörper als ein (algebraischer) Ring angesehen werden, indem man unter dem *Produkt* einer endlichen Anzahl von Mengen ihren Durchschnitt und unter ihrer *Summe* die Menge derjenigen Dinge versteht, die einer ungeraden Anzahl von Summanden angehören. Summen und Produkte von Mengen werden wir immer in diesem Sinne verstehen! Jeder Mengenkörper ist also ein Boolescher Ring, d. h. ein Ring mit lauter idempotenten Elementen. Solche Ringe sind immer kommutativ und die Addition ist modulo 2<sup>1)</sup>.

Für eine Menge von Elementen  $a_i$  in einem Booleschen Ringe  $A$  möge es ein  $a \in A$  derart geben, daß  $a_i = aa_i$ , bzw.  $a = aa_i$  für alle  $i$  und  $a = ax$ , bzw.  $x = ax$ , falls  $x \in A$  und  $a_i = a_i x$ , bzw.  $x = a_i x$  für alle  $i$  gilt. Dann möge das eindeutig bestimmte Element  $a$  die *Vereinigung*, bzw. der *Durchschnitt* der Elemente  $a_i$ , genannt werden. Ein Element von  $A$  heißt *leer*, falls es gleich Null ist. Mit  $e_A$  wird immer das Einselement von  $A$  bezeichnet werden.

Die Elemente aller Mengen, die einem Mengenkörper  $A$  angehören, mögen *Punkte* von  $A$  heißen. Ist ein Element  $e_A$  vorhanden, so ist es offenbar der Menge aller Punkte von  $A$  gleich. Nach etwaigen Zusammenziehungen von Punkten kann man annehmen (was wir immer tun wollen), daß es für je zwei verschiedene Punkte immer eine zum Körper gehörige Menge gibt, die genau einen unserer Punkte enthält.

Mit  $j$  (mit Indizes oder nicht) werden wir immer Intervalle bezeichnen. Eine auf der Menge aller Punkte von  $A$  erklärte Funktion  $f$ <sup>2)</sup> heißt in  $A$  *meßbar*, wenn jede Menge  $f^{-1}(j)$  zu  $A$  gehört. Das Vorhandensein einer solchen Funktion zieht insbesondere das Vorhandensein von  $e_A$  mit sich. Schreibt man  $\varphi(j) = f^{-1}(j)$ , so gilt offenbar:

$$(1) \quad \varphi(j_1 + j_2) = \varphi(j_1) + \varphi(j_2), \quad \varphi(j_1 j_2) = \varphi(j_1) \varphi(j_2),$$

$$(2) \quad \varphi(j) = e_A \text{ für ein passendes } j,$$

<sup>1)</sup> Ich setze eine algebraische Theorie der Booleschen Ringe, die von M. H. Stone in Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), S. 37ff. entwickelt wurde, als bekannt voraus. Mit St. 16 (z. B.) wird Theorem 16 dieser Abhandlung bezeichnet.

<sup>2)</sup> Alle unsere Funktionen sind reell und endlich.

(3) ist  $j_n$  eine abzählbare Folge von Intervallen mit einem leeren Durchschnitt, so besitzen die zugehörigen  $\varphi(j_n)$  auch einen leeren Durchschnitt.

Ist  $f$  beschränkt, so kann (2) wie folgt verschärft werden:

$$(2^*) \quad \varphi(j) = \varepsilon_A$$

für ein passendes kompaktes  $j$ .

Es sei nun  $g$  eine stetige Funktion von  $N$  reellen Veränderlichen.  $f_0, f_1, \dots, f_N$  seien in  $A$  meßbar,  $\varphi_n = f_n^{-1}$ ,  $j_0 = g(j_1, j_2, \dots, j_N)$ . Dann ist offensichtlich  $f_0 = g(f_1, f_2, \dots, f_N)$  mit der in den  $j_n$  identischen Inklusion  $\varphi_1(j_1) \dots \varphi_N(j_N) \subset \varphi_0(j_0)$  gleichbedeutend. Dies kann auch in der Form

$$(4) \quad \varphi_0(j_0) \varphi_1(j_1) \varphi_2(j_2) \dots \varphi_N(j_N) = \varphi_1(j_1) \varphi_2(j_2) \dots \varphi_N(j_N)$$

geschrieben werden.

Es sei nun allgemeiner  $A$  irgendein (abstrakter) Boolescher Ring. Wir werden uns mit den den obigen Bedingungen genügenden Abbildungen  $\varphi$ , deren Bereich alle Intervalle durchläuft und deren Nachbereich in  $A$  enthalten ist, beschäftigen. Da jedes in  $A$  meßbare  $f$  durch sein zugeordnetes  $\varphi = f^{-1}$  vollständig erklärt ist (falls  $A$  ein Mengenkörper ist), bilden die  $\varphi$  eine Verallgemeinerung der meßbaren Funktionen. Es wird sich u. a. zeigen, inwiefern unsere  $\varphi$  auf dem beschriebenen Wege aus den in einem mit  $A$  isomorphen Mengenkörper meßbaren Funktionen wirklich alle entstehen. Jede Abbildung  $\varphi$  von Intervallen  $j$  auf Elemente  $\varphi(j)$  eines (abstrakten) Booleschen Ringes  $A$ , die der Bedingung (1) genügt, heiße eine *Verteilung in  $A$* ; bzw. *auf  $A$* , falls sie noch (2) erfüllt. Gilt noch (2\*) bzw. (3), so möge  $\varphi$  *beschränkt* bzw. *stetig* genannt werden.

Ich bemerke ein für allemal, daß die Werte der Verteilungen für das leere Intervall sämtlich leer sind. Es sei noch bemerkt, daß die Stetigkeit wie folgt erklärt werden kann:

*Eine Verteilung  $\varphi$  ist dann und nur dann stetig, wenn folgendes gilt: Ist  $j$  die Vereinigung bzw. der Durchschnitt von abzählbar vielen  $j_n$ , so ist  $\varphi(j)$  die Vereinigung bzw. der Durchschnitt der zugehörigen  $\varphi(j_n)$ .*

**Beweis.** Die Menge  $j + j_n$  zerfällt in zwei Intervalle  $j_n^1$  und  $j_n^2$ , die auch leer sein dürfen.  $j_n^1$  möge kleinere Zahlen enthalten als  $j_n^2$ . Bei festem  $i$  ist der Durchschnitt aller  $j_n^i$  leer. Es sei ferner  $c f_n = c \in A$  für alle  $n$ ,  $f_n = \varphi(j_n^1) + \varphi(j_n^2)$ ,  $c^i = c \varphi(j_n^i)$ . Dann ist  $c = c^1 + c^2$  und  $c^i = c^i \varphi(j_n^i)$  für alle  $n$ . Ist also  $\varphi$  stetig angenommen, so hat man  $c^i = 0$ , also  $c = 0$ .

Man setze  $a = \varphi(j)$ ,  $a_n = \varphi(j_n)$ . Da  $j_n = j j_n$  bzw.  $j = j j_n$  ist, so hat man  $a_n = a a_n$  bzw.  $a = a a_n$ . Es sei nun ein  $x \in A$  mit  $a_n = a_n x$  bzw.  $x = a_n x$  für alle  $n$  gegeben. Es ist zu zeigen, daß  $a = a x$  bzw.  $x = a x$  gilt. Es sei also  $c = a + a x$  bzw.  $c = x + a x$ . Man hat nur zu zeigen, daß  $c$

leer ist, also daß  $c/f_n = c$  für alle  $n$  gilt. Da im ersten Falle  $a/f_n = f_n$  und im zweiten  $a/f_n = a a_n/f_n = 0$  ist, bekommt man so

$$c/f_n = f_n + f_n x \quad \text{bzw.} \quad c/f_n = f_n x.$$

Ferner ist

$$0 = a_n + a_n x \quad \text{bzw.} \quad 0 = a_n x + x.$$

Addiert man die letzten Gleichungen, so ergibt sich, da  $f_n + a_n = a$  ist, die zu beweisende Gleichung  $c/f_n = c$ .

Da umgekehrt jede unseren Bedingungen genügende Verteilung offenbar stetig ist, ist die Gleichwertigkeit unserer beiden Definitionen völlig bewiesen.

In Kapitel I bis III studiere ich einen Homomorphiebegriff („Charakter“) von meßbaren Funktionen und sein Analogon für Verteilungen. Es handelt sich um eine unmittelbare und natürliche Übertragung der in der Algebra üblichen Begriffsbildung, die sich fürs Weitere von methodisch grundlegender Wichtigkeit zeigt. Im Spezialfalle der Zahlenfolge bieten unsere Charaktere alle Möglichkeiten dar, den Limesbegriff auszudehnen, indem man jeder beschränkten Folge eine einzige Häufungsstelle derart zuordnet, daß für alle stetigen Funktionen immer „der Limes dem Werte gleich ist“. Wenn man zwei (z. B. im Lebesgueschen Sinne) meßbare Funktionen, die sich nur auf einer „Nullmenge“ unterscheiden, als einander gleich ansieht, so hat es keinen Sinn mehr, von den Funktionswerten zu reden; in diesem Falle sind unsere Charaktere der passende Ersatz dafür, woraus ihre methodische Wichtigkeit sich ergibt.

Im vierten Kapitel werden die Mächtigkeitsfragen für Charaktere erörtert.

Die obenerwähnte Frage, ob alle stetigen Verteilungen durch meßbare Funktionen erzeugt werden können, wird in Kapitel V für die wichtigsten Fälle negativ beantwortet. Andererseits zeigt es sich in Kapitel VI, daß dies aber immer dann möglich ist, wenn man so mit den Funktionen rechnet, daß ihre Gleichheit nur die Gleichheit der Werte „fast überall“ mit sich zieht. Dies ermöglicht einige algebraische und metrische Eigenschaften von Verteilungen zu erläutern, insbesondere die stetigen Verteilungen auf gewissen Ringen zu Banachschen Räumen zu erfassen, die nach Kapitel VIII lineare Bilder gewisser Räume von Zahlenfolgen sind. Ist  $A$  der Ring aller im Lebesgueschen Sinne meßbaren Mengen (die Nullmengen werden als gleich Null angesehen), so ist jede beschränkte stetige Verteilung auf  $A$  einer meßbaren Funktion zugeordnet (und umgekehrt), wie aus Kapitel IX hervorgeht.

Mit  $c$  soll immer die Mächtigkeit des Kontinuums bezeichnet werden.

Aus der zweiten Definition der Stetigkeit folgt nun ohne weiteres, daß die stetigen Verteilungen durch ihre Werte für rationale Intervalle vollständig bestimmt sind. Daraus ergibt sich insbesondere:

*In einem Booleschen Ringe, dessen Mächtigkeit  $c$  nicht übertrifft, ist die Anzahl der stetigen Verteilungen höchstens  $c$  gleich.*

### I. Hilfssätze.

**Grundhilfssatz.**  $\pi$  sei ein Primideal in einem Booleschen Ring  $A$ .  $A_\pi$  sei die Menge derjenigen Verteilungen  $\varphi$  in  $A$ , für die es eine reelle Zahl  $h_\pi \varphi$  von folgender Beschaffenheit gibt: Ist  $j$  offen und  $h_\pi \varphi \in j$ , so ist  $\varphi(j)$  nicht durch  $\pi$  teilbar. Dann enthält  $A_\pi$  alle Verteilungen  $\varphi$  in  $A$ , für die es ein kompaktes  $j_0$  mit  $\varphi(j_0) \in \pi$  gibt, insbesondere alle beschränkten Verteilungen; man hat  $h_\pi \varphi \in j_0$ . Die in dieser Weise erklärte Funktion  $h_\pi$  auf  $A_\pi$  ist eindeutig.

**Beweis.** Ich setze voraus, man habe schon eine Folge von  $n+1$  kompakten Intervallen  $j_0, j_1, \dots, j_n$ , deren jedes eine Hälfte des vorangehenden und in diesem enthalten ist, derart gefunden, daß kein  $\varphi(j_k)$  durch  $\pi$  teilbar ist. Wir zerspalten nun  $j_n$  in zwei Hälften  $j'$  und  $j''$ , die nur den Mittelpunkt von  $j_n$  gemeinsam haben:  $j_n = j' + j'j'' + j''$ . Also ist  $\varphi(j') + \varphi(j')\varphi(j'') + \varphi(j'') = \varphi(j_n)$  non  $\in \pi$ . Also kann  $\pi$  nicht gleichzeitig  $\varphi(j')$  und  $\varphi(j'')$  teilen. Es möge  $\pi$  z. B. in  $\varphi(j')$  nicht aufgehen. Setzen wir also  $j_{n+1}$  gleich  $j'$ , so erhalten wir eine um ein Glied längere Folge von Intervallen  $j_k$ . Also kann man die erwähnte Folge mit Festhalten der obigen Bedingungen ins Unendliche fortsetzen. Unsere unendlich vielen  $j_n$  haben dann bekanntlich genau eine reelle Zahl  $h_\pi \varphi$  gemeinsam, die offenbar die zu erhaltende Eigenschaft hat. In der Tat sei  $j$  ein offenes Intervall mit  $h_\pi \varphi \in j$ . Dann gibt es ein  $n$  mit  $j_n \subset j$ , d. h.  $j j_n = j_n$ . Wäre nun  $\varphi(j)$  durch  $\pi$  teilbar, so würde  $\pi$  auch in  $\varphi(j)\varphi(j_n) = \varphi(j_n)$  aufgehen, was laut Konstruktion nicht der Fall ist.

Würden nun zwei verschiedene Zahlen die Bedingungen für  $h_\pi \varphi$  erfüllen, so wäre es möglich, sie in zwei punktfremde offene Intervalle  $j'$  und  $j''$  einzuschließen und man hätte  $\varphi(j')\varphi(j'') = \varphi(j'j'') = 0 \in \pi$ . Also wäre entweder  $\varphi(j')$  oder  $\varphi(j'')$  durch  $\pi$  teilbar, was der Definition widerspricht.

**Hilfssatz 1.**  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  seien zwei Verteilungen in einem Booleschen Ring  $A$ ,  $\varphi_1$  stetig. Es gelte  $\varphi_1(j) \neq \varphi_1(j)\varphi_2(j)$  für ein passendes  $j$ ; ist  $j$  nicht offen, so sei auch  $\varphi_2$  stetig. Dann gibt es Primideale  $\pi$  in  $A$  mit  $\varphi_1 \in A_\pi$  und  $h_\pi \varphi_2 \neq h_\pi \varphi_1$ , falls überhaupt ein  $h_\pi \varphi_2$  vorhanden ist, d. h. falls  $\varphi_2 \in A_\pi$ . Die Zahlen  $h_\pi \varphi_1$  haben Häufungsstellen in  $j$ .

**Beweis.** Ist  $j$  offen, so schreibe ich  $j = j_0$ . Ist dies nicht der Fall, so will ich folgendes zeigen (vorausgesetzt, daß  $\varphi_2$  stetig ist): Zu jeder Umgebung  $u$  von  $j$  gibt es ein offenes  $j_0$  mit  $j \subset j_0 \subset u$  und  $\varphi_1(j_0) \neq \varphi_1(j_0)\varphi_2(j_0)$ . Und unser  $\pi$  wird immer so gewählt werden, daß  $h_\pi \varphi_1 \in j_0$ , also  $\in u$  ist, woraus man die Aussage über Häufungsstellen zieht.

Setzen wir also voraus, daß kein  $j_0$  die obigen Bedingungen erfüllt. Wir lassen  $j_0$  eine abzählbare Folge von offenen Intervallen mit Durchschnitt  $j$  durchlaufen. Man habe immer  $j_0 \subset u$  und  $\varphi_1(j_0) = \varphi_1(j_0) \varphi_2(j_0)$ . Andererseits ist  $j j_0 = j$ , d. h.  $\varphi_1(j) \varphi_1(j_0) = \varphi_1(j)$ , also  $\varphi_1(j) \varphi_1(j_0) \varphi_2(j_0) = \varphi_1(j)$ , d. h.  $\varphi_1(j) \varphi_2(j_0) = \varphi_1(j)$ . Die Stetigkeit von  $\varphi_2$  ergibt also, da  $\varphi_2(j)$  der Durchschnitt aller  $\varphi_2(j_0)$  ist, die falsche Gleichung  $\varphi_1(j) \varphi_2(j) = \varphi_1(j)$ .

Es sei also für jedes  $n \leq N$  ein offenes  $j_n$  mit  $\varphi_1(j_n) \neq \varphi_1(j_n) \varphi_2(j_0)$  und  $\bar{j}_n \subset j_{n-1}$  gegeben. Dabei ist  $\bar{j}_n$  das kleinste  $j_n$  enthaltende abgeschlossene Intervall. Ferner sei  $j_n$  kürzer als  $1/n$ . Dann kann  $j_N$  als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener  $j'$ , die sämtlich kürzer als  $1/2(N+1)$  sind, geschrieben werden. Nun ist  $\varphi_1(j_N)$  der Vereinigung der Elemente  $\varphi_1(j')$  gleich. Wäre also  $\varphi_1(j') = \varphi_1(j') \varphi_2(j_0)$  für alle  $j'$ , so wäre auch  $\varphi_1(j_N) = \varphi_1(j_N) \varphi_2(j_0)$ , was unserer Annahme widerspricht.

Es gibt also ein  $j'$  mit  $\varphi_1(j') \neq \varphi_1(j') \varphi_2(j_0)$ . Es sei  $j_{N+1}$  offen und kürzer als  $1/N$  und es gelte  $j' \subset j_{N+1} \subset \bar{j}_{N+1} \subset j_N$ . Wäre nun  $\varphi_1(j_{N+1}) = \varphi_1(j_{N+1}) \varphi_2(j_0)$ , so ergäbe sich durch Multiplikation mit  $\varphi_1(j')$  ein Widerspruch mit unserer letztbewiesenen Ungleichung. Also sind unsere Induktionsannahmen für  $n \leq N+1$  erfüllt. Die Folge  $j_n$  kann also unendlich angenommen werden.

Es sei  $x$  die einzige in allen  $j_n$  enthaltene reelle Zahl. Ihr Vorhandensein ist durch  $\bar{j}_n \subset j_{n-1}$  gesichert. Ferner sei  $a_n = e_A + \varphi_1(j_n) + \varphi_1(j_n) \varphi_2(j_0)$ . Die Vielfachen unserer  $a_n$  bilden ein Ideal  $\alpha$  in  $A$ . (In der Tat sei  $v = v_1 a_m + v_2 a_n$ ,  $n > m$ ; dann ist  $a_m = a_n a_m$ , wie man leicht nachrechnet; also ist  $v = (v_1 a_m + v_2) a_n$  ein Vielfaches von  $a_n$ .) Da  $e_A$  kein Vielfaches von  $a_n$  sein kann, ist  $\alpha$  von  $A$  verschieden. Laut St. 63 geht also in  $\alpha$  ein Primideal  $\pi$  auf.

Man hat  $h_\pi \varphi_1 = x$ . In der Tat sei  $j$  offen und enthalte  $x$ . Dann ist ein  $j_n$  in  $j$  enthalten:  $j_n = j j_n$ , d. h.  $\varphi(j_n) = \varphi(j) \varphi(j_n)$ . Wäre  $\varphi(j)$  durch  $\pi$  teilbar, so ginge  $\pi$  auch in  $\varphi(j_n)$  auf, also auch in  $e_A = a_n + \varphi_1(j_n) + \varphi_1(j_n) \varphi_2(j_0)$ , was nicht der Fall sein kann.

Andererseits ist  $h_\pi \varphi_2 = x$  falsch. Denn  $\pi$  geht in  $\varphi_2(j_0)$  auf. Es gilt in der Tat  $\varphi_2(j_0) = a_0 \varphi_2(j_0) \in \alpha \subset \pi$ . Damit ist alles bewiesen.

Der Beweis ergibt folgende später anzuwendende

**Verschärfung.** Es gibt ein von  $A$  verschiedenes Ideal  $\alpha$  in  $A$ , das aus den Vielfachen gewisser  $a_n = e_A + \varphi_1(j_n) + \varphi_1(j_n) \varphi_2(j_0)$  mit abnehmenden  $j_n$  von Längen  $\rightarrow 0$  besteht, derart, daß jeder Primteiler  $\pi$  von  $\alpha$  Hilfssatz 1 erfüllt.

**Hilfssatz 2.** Jede stetige Verteilung  $\varphi$  ist durch sämtliche  $h_\pi \varphi$  eindeutig bestimmt.

Beweis.  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  seien zwei solche Verteilungen. Dann gibt es ein  $j$  mit  $\varphi_1(j) \neq \varphi_2(j)$ , also z. B.  $\varphi_1(j) \neq \varphi_1(j) \varphi_2(j)$ . Also sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt, woraus sich für ein passendes  $\pi$  die Gleichung  $h_\pi \varphi_1 = h_\pi \varphi_2$  als unmöglich ergibt.

Hilfssatz 3.  $g$  sei eine stetige Funktion von  $N$  reellen Veränderlichen,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  Verteilungen in einem Booleschen Ring  $A$ . Es sei ferner  $\varphi_1 \in A_\pi, \dots, \varphi_N \in A_\pi$  für ein Primideal  $\pi$  in  $A$ .  $\varphi_0$  sei eine Verteilung auf  $A$ , die die Gleichung (4) der Einleitung identisch erfüllt. Dann ist  $\varphi_0 \in A_\pi$  und  $h_\pi \varphi_0 = g(h_\pi \varphi_1, h_\pi \varphi_2, \dots, h_\pi \varphi_N)$ .

Beweis. Also sei  $j$  offen und enthalte  $x = g(h_\pi \varphi_1, h_\pi \varphi_2, \dots, h_\pi \varphi_N)$ . Man hat nur zu zeigen, daß  $\pi$  in  $\varphi_0(j)$  nicht aufgeht. Ginge nun  $\pi$  in  $\varphi_0(j)$  auf, so wäre dies für jedes  $\varphi_0(j_0)$  mit  $j_0 \subset j$  der Fall. Denn  $j_0 = jj_0$ , also ist  $\varphi_0(j_0) = \varphi_0(j) \varphi_0(j_0)$  ein Vielfaches von  $\varphi_0(j)$ . Die Stetigkeit von  $g$  zieht nun das Vorhandensein solcher offener Umgebungen  $j_n$  von  $h_\pi \varphi_n$  mit sich, daß ihr Bild  $j_0 = g(j_1, j_2, \dots, j_N)$  in  $j$  enthalten ist. Also wäre kraft unserer falschen Annahme  $\varphi_0(j_0)$ , also laut (4) auch  $\varphi_1(j_1) \varphi_2(j_2) \dots \varphi_N(j_N)$  durch  $\pi$  teilbar. Da aber  $\pi$  prim ist, müßte es in einem  $\varphi_n(j_n)$  mit  $n > 0$  aufgehen, was der Definition von  $h_\pi \varphi_n$  widerspricht.

Hilfssatz 4. Sind in obigen Bezeichnungen die  $\varphi_n$  mit  $n > 0$  beschränkt, so ist dies auch für  $\varphi_0$  der Fall.

Beweis. Um ein  $j_0$  mit  $\varphi_0(j_0) = e_A$  anzugeben, genügt es offenbar, jedes  $j_n$  mit  $n > 0$  der Bedingung  $\varphi_n(j_n) = e_A$  zu unterwerfen.

## II. Charaktere.

Es sei  $g$  irgendeine stetige Funktion von  $N$  reellen Veränderlichen. Es seien  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  Verteilungen in einem Booleschen Ringe. Es sei  $\varphi_0$  eine Verteilung, für die die Gleichung (4) der Einleitung identisch gilt. Ich schreibe dann  $\varphi_0 \in g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ . Ist insbesondere  $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  bzw.  $x_1 x_2$ , so sage ich,  $\varphi_0 \in \varphi_1 + \varphi_2$  bzw.  $\varphi_0 \in \varphi_1 \varphi_2$  ist eine *Summe* bzw. ein *Produkt* von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ .

Bemerkung 1. Sind die  $\varphi_n$  mit  $n > 0$  beschränkt, so ist es auch für  $\varphi_0$  der Fall (vgl. I Hilfssatz 4).

Bemerkung 2. Im Bereich beschränkter stetiger Verteilungen sind die Summen und Produkte und allgemeiner die Verteilungen  $\varphi_0 \in g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  eindeutig bestimmt (falls es überhaupt solche gibt).

Beweis. Laut Bemerkung 1 ist  $\varphi_0$  beschränkt, also gehören alle unsere  $\varphi_n$  laut I Grundhilfssatz zu jedem  $A_\pi$ . Ferner ist jedes  $h_\pi \varphi_0$ , wie I Hilfssatz 3 zeigt, völlig bestimmt, also laut I Hilfssatz 2 auch die Verteilung  $\varphi_0$ .

Jetzt gehe ich zu einem Begriff über, der für alle unsere Untersuchungen von grundlegender Wichtigkeit ist.  $\Phi$  sei eine Menge von Verteilungen in

einem Booleschen Ringe,  $h$  eine auf  $\Phi$  erklärte Funktion derart, daß für keine offene Umgebung  $j$  von  $h\varphi$  das Element  $\varphi(j)$  verschwindet und  $h(\varphi_1 + \varphi_2) = h\varphi_1 + h\varphi_2$  und  $h(\varphi_1 \varphi_2) = h\varphi_1 h\varphi_2$  ist. Dann möge  $h$  ein Charakter von  $\Phi$  heißen. Ist noch  $hg(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = g(h\varphi_1, h\varphi_2, \dots, h\varphi_N)$  für alle stetigen  $g$ , so heiße  $h$  stetig.

Diese Begriffsbildung ist auch an sich selbst von Interesse. Es sei nämlich ein Mengenkörper mit Einselement gegeben, dessen Elemente meßbare Mengen heißen mögen und den ich als einen Ring auffassen will. Unter den meßbaren Mengen seien sogenannte Nullmengen ausgezeichnet, die ein Ideal bilden. Die in unserem Mengenkörper meßbaren Funktionen mögen meßbar schlechthin genannt werden. Je zwei solche Funktionen, die sich höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden, sollen als einander gleich angesehen und voneinander nicht unterschieden werden. Setzt man alle Nullmengen gleich Null, d. h. übt man auf den Ring der meßbaren Mengen einen Homomorphismus aus, dessen Kern das Ideal aller Nullmengen ist, so wird jede Menge  $f^{-1}(j)$  ( $f$  meßbar) auf ein Element  $\varphi(j)$  abgebildet; gleichen Funktionen  $f$  entsprechen gleiche  $\varphi$ . Und diese  $\varphi$  sind ja Verteilungen auf dem nach dem Ideal aller Nullmengen reduzierten Ringe der meßbaren Mengen, der weiter immer mit  $A$  bezeichnet wird. Die Zuordnung  $f \rightarrow \varphi$  muß der Leser immer gut im Auge behalten!

$F$  sei eine Menge von meßbaren Funktionen,  $k$  eine auf  $F$  erklärte Funktion derart, daß für offene Umgebungen  $j$  von  $kf$  die  $f^{-1}(j)$  keine Nullmengen sind und  $k(f_1 + f_2) = kf_1 + kf_2$  und  $k(f_1 f_2) = kf_1 kf_2$  gilt. Dann möge  $k$  ein Charakter von  $F$  heißen. Ist noch  $kg(f_1, f_2, \dots, f_N) = g(kf_1, kf_2, \dots, kf_N)$  für alle stetigen  $g$ , so heiße  $k$  stetig<sup>3)</sup>.

Laut St. 63 ist jeder (abstrakte) Boolesche Ring einem Mengenkörper isomorph. Wählt man also für meßbare Mengen die zum erwähnten Mengenkörper gehörigen und die einzige Nullmenge leer, so sind in allen folgenden Sätzen, die über Verteilungen im Ring  $A$  Aussagen enthalten, schon von selbst die entsprechenden Aussagen über Verteilungen in abstrakten Booleschen Ringen enthalten. Die Spezialisierung ist also nur scheinbar und ihr Grund besteht darin, daß man so gleichzeitig Entsprechendes über meßbare Funktionen und ihren Zusammenhang mit Verteilungen aussagen kann.

Im weiteren enthalte  $\Phi$  bzw.  $F$  alle beschränkten stetigen Verteilungen auf  $A$ , bzw. alle beschränkten meßbaren Funktionen und alle Summen und Produkte ihrer Elemente. Wir wollen zeigen, daß es eine eindeutige Zu-

<sup>3)</sup> Mit den Charakteren („concentrated homomorphisms“) meßbarer Funktionen habe ich mich in der Abhandlung „On homomorphic mappings of functional rings“ beschäftigt. Das Schicksal meines nach Warschau geschickten Manuskripts während des Krieges ist mir unbekannt, so daß der vorliegende Aufsatz davon unabhängig geschrieben ist.

ordnung zwischen den  $h$  und  $k$  derart gibt, daß, falls  $\varphi$  der Funktion  $f$  entspricht,  $h\varphi = kf$  gilt. Es gilt nämlich folgender

**Satz.** *Es sei  $\pi$  irgendein Primideal in  $A$ ,  $h_\pi$  laut I Grundhilfssatz auf  $\Phi$  erklärt,  $\Phi \subset A_\pi$ . Es sei  $h\varphi = h_\pi\varphi$  bzw.  $kf = h_\pi\varphi$  für jede Verteilung  $\varphi$  auf  $A$ , bzw. für jede meßbare  $f$ , der  $\varphi$  zugeordnet ist. Dann ist  $h$  bzw.  $k$  ein stetiger Charakter von  $\Phi$  bzw.  $F$ . Und jeder Charakter  $k$  bzw.  $h$  auf  $\Phi$  bzw.  $F$  kann auf diesem Wege erhalten werden. Also ist jeder Charakter auf  $\Phi$  und  $F$  stetig.*

$F$  muß freilich derart gewählt werden, daß die den Funktionen aus  $F$  entsprechenden Verteilungen zu  $\Phi$  gehören.

**Beweis.** Erstens ist  $h$  ein stetiger Charakter laut I Hilfssatz 3. Also ist es auch für  $k$  der Fall. Denn ist  $f_0 = g(f_1, f_2, \dots, f_N)$  ( $g$  stetig,  $f_n$  meßbar), so gilt offensichtlich für die zugehörigen  $\varphi_n$ :  $\varphi_0 \in g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ , also  $kf_0 = h\varphi_0 = g(h\varphi_1, \dots, h\varphi_N) = g(kf_1, \dots, kf_N)$ .

Andererseits sei  $k$  gegeben. Man hat nur ein  $\pi$  aufzufinden. (Ist  $h$  gegeben, so bestimme man  $k$  durch die Identität  $kf = h\varphi$ .) Es sei  $\alpha'$  das System der meßbaren Mengen, deren charakteristische Funktionen durch  $k$  auf Null abgebildet werden. Es ist leicht zu sehen, daß  $\alpha'$  ein Ideal ist. Durch Nullsetzen der Nullmengen wird  $\alpha'$  auf ein Ideal  $\alpha$  in  $A$  abgebildet.  $\alpha$  ist von  $A$  verschieden. Enthielte es nämlich  $e_A$ , so wäre die größte meßbare Menge bis auf eine Nullmenge in  $\alpha'$  enthalten, also ihre charakteristische Funktion würde durch  $k$  auf Null abgebildet, was offenbar unmöglich ist. Also gibt es in  $A$  ein Primideal  $\pi$ , das in  $\alpha$  aufgeht, vgl. St. 63.

Man hat nur zu zeigen, daß  $h\varphi = h_\pi\varphi$  identisch gilt. Es sei also  $j$  eine offene Umgebung von  $kf$  bzw. von  $h\varphi$ . Es ist zu beweisen, daß  $\pi$  in  $\varphi(j)$  nicht aufgeht. Es sei  $\alpha = e_A + \varphi(j)$  und  $\varphi_0(j') = \alpha\varphi(j')$  bzw.  $\alpha\varphi(j') + \varphi(j)$ , falls  $0 \text{ non } \in j'$  bzw.  $0 \in j'$  gilt. Es sei  $+ \sqrt{j'}$  bzw.  $- \sqrt{j'}$  die Menge derjenigen positiven bzw. negativen Zahlen, deren Quadrat in  $j'$  enthalten ist.  $j'_0$  sei der Durchschnitt von  $j'$  mit der Menge, die nur Null enthält. Dann setze ich  $\varphi_2(j') = \varphi_0(j'_0) + \varphi_0(+ \sqrt{j'}) + \varphi_0(- \sqrt{j'})$ . Eine leichte Diskussion ergibt dann  $\varphi_2 \in \varphi\varphi_0$  und  $\varphi_2 \in \varphi_0\varphi_0$ , also  $h\varphi_2 = h\varphi h\varphi_0 = h\varphi_0 h\varphi_0$ . Es sei zuerst  $h\varphi$  von Null verschieden, also entweder  $h\varphi_0 = h\varphi$  oder  $h\varphi_0 = 0$ . Die erstere Annahme ist aber unmöglich, vorausgesetzt (was ja erlaubt ist), daß  $j$  so kurz ist, daß es Null nicht enthält. Denn  $\varphi_0(j) = 0$ .

Also ist  $h\varphi_0 = 0$ . Es sei nun  $\varphi_1(j') = \varphi(j)\varphi(j')$  bzw.  $\varphi(j)\varphi(j') + \alpha$ , je nachdem ob  $0 \text{ non } \in j'$  oder  $0 \in j'$  gilt. Ferner sei  $\varphi'(j') = \alpha$  bzw.  $\varphi(j)$ , wenn  $j'$  die Zahl 1 bzw. 0 enthält, ohne 0 bzw. 1 zu enthalten; enthält  $j'$  weder 0 noch 1, so sei  $\varphi'(j')$  gleich Null. Vertauscht man die Rolle von  $\alpha$  und  $\varphi(j)$ , so bekommt man die Verteilung  $\varphi''$ . Man rechnet leicht nach, daß  $\varphi_0 \in \varphi\varphi'$  und  $\varphi_1 \in \varphi\varphi''$  ist. Ferner sei  $\varphi'''(j') = e_A$  bzw. 0 je nachdem,

ob  $j'$  die Zahl 1 enthält oder nicht. Dann gilt offenbar  $\varphi''' \in \varphi' + \varphi''$ . Also gelten folgende Gleichungen  $h\varphi_0 = h\varphi h\varphi'$ ,  $h\varphi_1 = h\varphi h\varphi''$ ,  $h\varphi''' = h\varphi' + h\varphi''$ . Wäre nun  $h\varphi_1$  gleich Null, so würde auch  $h\varphi'''$  verschwinden (man hat nämlich  $h\varphi_0 = 0$  und  $h\varphi \neq 0$ ), was ja unmöglich ist.

Es sei nun  $\varphi'''(j') = e_A$  bzw. 0, je nachdem, ob  $j$  die Null enthält oder nicht. Man hat offenbar  $\varphi''' \in \varphi_1\varphi'$ , also  $0 = h\varphi''' = h\varphi_1 h\varphi'$ , d. h.  $h\varphi' = 0$ . Daraus folgert man schon unsere zu beweisende Behauptung  $\varphi(j)$  non  $\in \pi$ . Es sei nämlich  $a'$  eine meßbare Menge, die durch Nullsetzen der Nullmengen in  $a$  übergeht,  $f'$  ihre charakteristische Funktion. Dann gehört offenbar  $\varphi'$  zu  $f'$  und  $a' \in \alpha'$ , also  $a \in \alpha$ . Also geht  $\pi$  in  $a$  auf. Ginge es auch in  $\varphi(j)$  auf, so wäre  $e_A = a + \varphi(j)$  durch  $\pi$  teilbar, was nicht der Fall ist.

Es sei nun  $h\varphi = 0$ .  $j''$  sei die Menge aller  $x - 1$  mit  $x \in j'$ ,  $\varphi_3(j'') = \varphi(j'')$ . Dann ist offensichtlich  $\varphi_3 \in \varphi + \varphi'''$ , also  $0 = h\varphi + h\varphi''' = h\varphi_3 = h_\pi\varphi_3 = h_\pi\varphi + h_\pi\varphi''' = h_\pi\varphi + h\varphi'''$ , also  $h\varphi = h_\pi\varphi = 0$ .

Die mit Strichen versehenen  $\varphi$  sind sämtlich stetig, woraus folgt, daß alle betrachteten Verteilungen wirklich zu  $\Phi$  gehören.

Ferner sei ein  $k$  gegeben. Man ersetze in der obigen Überlegung (mit Berücksichtigung von Indizes!) jedes  $h\varphi$  durch  $kf$ , jedes  $\varphi(j)$  durch  $f^{-1}(j)$  und  $e_A$  durch die größte meßbare Menge  $E$ . Schreibt man noch  $a'$  statt  $a$ , also  $a' = E + f^{-1}(j)$ , so ist  $f'$  die charakteristische Funktion von  $a'$  und man hat  $kf' = 0$ , d. h.  $a'$  gehört zu  $\alpha'$ . Ist  $a$  in  $A$  der Menge  $a'$  zugeordnet, so ist  $a$  durch  $\alpha$ , also auch durch  $\pi$  teilbar. Man sieht wie früher, daß  $\pi$  in  $\varphi(j)$  nicht aufgeht. Das Obige bleibt also in den neuen Bezeichnungen bestehen und zeigt, daß auch  $kf = h_\pi\varphi$  gilt, w. z. b. w.

**Zusatz.** Die Korrespondenz zwischen den  $\pi$ ,  $h_\pi$ ,  $h$  und  $k$  ist eineindeutig.

**Beweis.**  $\varrho$  und  $\sigma$  seien zwei verschiedene Primideale in  $A$ . Man hat nur eine beschränkte stetige Verteilung  $\varphi$  bzw. eine meßbare  $f$ , der  $\varphi$  zugeordnet ist, mit  $h_\varrho\varphi \neq h_\sigma\varphi$  aufzufinden. Es sei also  $r \in \varrho$ ,  $r$  non  $\in \sigma$ ,  $f$  die charakteristische Funktion von  $r$ . Man hat offenbar  $h_\varrho\varphi = 0$  und  $h_\sigma\varphi = 1$ .

Also sind die Charaktere von Verteilungen nur Ausdehnungen der Charaktere meßbarer Funktionen auf einen breiteren Bereich. Und darin liegt ein Teil ihrer Wichtigkeit. Man kann in der Tat für meßbare Mengen und Nullmengen wichtige, aus der Analysis bekannte Mengenklassen wählen. Ich will hier ein überaus wichtiges Beispiel angeben. Für die meßbaren Mengen sollen alle Mengen von Indizes (d. h. ganzen nicht negativen Zahlen) genommen werden; die Nullmengen werden mit den endlichen Mengen übereinstimmen. Dann stimmen die meßbaren Funktionen mit den Zahlenfolgen überein, und es wird zwischen zwei Folgen, die nur in endlich vielen Gliedern voneinander abweichen, kein Unterschied bestehen. Offenbar ordnet jeder Charakter den konvergenten Folgen ihre Grenzwerte zu und allgemeiner jeder Folge eine ihrer Häufungszahlen. So kann der Limesbegriff auf alle

beschränkten Zahlenfolgen ausgedehnt werden mit der *Festhaltung des Satzes*, daß für die stetigen Funktionen die Werte den Grenzwerten gleich sind. Zwei Zahlenfolgen  $a_n$  und  $b_n$  mögen *gleichwertig* heißen, falls für jedes  $j$  die Menge derjenigen  $n$ , für die genau eine der Inklusionen  $a_n \in j$  und  $b_n \in j$  gilt, endlich ist. Man hat dann folgenden

**Nebensatz 1.** *Jeder Charakter ordnet gleichwertigen Folgen denselben Wert zu.*

**Beweis.** Nach dem vorigen Satz ist der Wert  $kf$  unseres Charakters  $k$  für die Folge  $f$  gleich  $h_x \varphi$ . Ersetzt man  $f$  durch eine gleichwertige Folge, so bleibt offenbar  $\varphi$  ungeändert, woraus unsere Behauptung sich ergibt.

Es gibt also voneinander verschiedene beschränkte Zahlenfolgen, deren Charaktere miteinander völlig übereinstimmen. Dies steht mit dem Sachverhalt in Zusammenhang, daß zu verschiedenen Folgen dieselbe Verteilung gehören kann. Laut I Hilfssatz 2 und 3 ist es unmöglich, falls verschiedenen meßbaren Funktionen verschiedene und stetige Verteilungen zugeordnet sind. Und dies gilt, wie ich zeigen will, falls jede Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen selbst eine Nullmenge ist.

**Hilfssatz 1.** *Ist jede Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine solche, so entsprechen verschiedenen meßbaren Funktionen verschiedene und immer stetige Verteilungen auf  $A$ .*

**Beweis.** Sind die zu  $f_1$  und  $f_2$ -gehörigen Verteilungen einander gleich, so ist immer  $f_1^{-1}(j) + f_2^{-1}(j) = o$  eine Nullmenge. Läßt man  $j$  alle Intervalle mit rationalen Anfangs- und Endpunkten durchlaufen, so ist die Vereinigung  $\omega$  aller entsprechenden  $o$  eine Nullmenge und man sieht leicht, daß die Werte unserer Funktionen bis auf  $\omega$  dieselben sind. Ist nämlich  $f_1(x) \neq f_2(x)$ , so kann man  $f_1(x)$  in ein  $f_2(x)$  nicht enthaltendes  $j$  einschließen und man hat offenbar  $x \in o$ , also  $x \in \omega$ . Also sind unsere Funktionen in unserem Sinne gleich.

Nun sei  $\varphi$  die zu  $f$  gehörige Verteilung. Wir lassen  $j$  eine abzählbare Folge mit leerem Durchschnitt durchlaufen. Ferner sei  $a \varphi(j) = a \in A$  für alle unsere  $j$ . Es sei  $a'$  eine meßbare Menge, der  $a$  in  $A$  entspricht. Also ist  $a' + a' f^{-1}(j) = o$  eine Nullmenge. Da nun der Durchschnitt aller  $f^{-1}(j)$  leer ist, ergibt die de Morgansche Regel, daß  $a'$  die Vereinigung (im mengentheoretischen Sinne) aller  $o$ , also eine Nullmenge ist. Also ist  $a$  gleich Null, d. h.  $\varphi$  stetig. Da nun  $a'$  meßbar war, erhält man gleichzeitig folgenden

**Zusatz.** *Ist jede meßbare Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge, so entsprechen den meßbaren Funktionen lauter stetige Verteilungen auf  $A$ .*

**Folgesatz 1.** *Ist jede Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine solche, so können für zwei verschiedene beschränkte meßbare Funktionen unmöglich alle Charaktere übereinstimmen.*

Die wichtigsten Beispiele genügen unseren Bedingungen. Man kann z. B. für die einzige Nullmenge die leere Menge nehmen und für meßbar (i) die Borelschen bzw. (ii) die projektiven Mengen. Dabei ist das System der projektiven Mengen die kleinste Mengenkategorie, die alle offenen Mengen enthält, abzählbare Vereinigungen zuläßt und mit irgendeiner Menge auch ihr Komplement und alle ihre stetigen Bilder (im selben Raume) enthält. Dasselbe erhielt man, indem man die übliche projektive Klassifikation ins Transfinite fortsetzen würde, was ja so vermieden werden kann. Will man sich auf Klassen mit endlichen Indizes beschränken, so ist es notwendig, als Verteilungen  $\varphi$  bzw. meßbare Funktionen  $f$  nur solche zuzulassen, für die die Klassen von  $\varphi(j)$  bzw.  $f^{-1}(j)$  bei veränderlichem  $j$  beschränkt bleiben. Ähnlich kann man für meßbar (iii) die nach Lebesgue meßbaren Mengen, bzw. (iv) die Mengen mit der Baireschen Eigenschaft<sup>4)</sup>, und für Nullmengen (iii) die Mengen vom Lebesgueschen Maße Null, bzw. (iv) die Mengen der ersten Kategorie wählen. Wählt man (v) für meßbar die Mengen mit nirgendsdichten Begrenzungen und für Nullmengen die nirgendsdichten Mengen, so sind unsere Annahmen nicht erfüllt und ich weiß nicht, ob unser Folgesatz gilt oder nicht. Trotzdem kann man eine schwächere Behauptung angeben, die in Folgesatz 2 enthalten ist.

Hilfssatz 2. Ist jede meßbare Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge, so entspricht jeder von Null verschiedenen meßbaren Funktion eine von Null verschiedene Verteilung auf  $A$ .

Dabei heißt eine Verteilung von Null verschieden, falls sie der wie folgt erklärten Nullverteilung  $\nu$  nicht gleich ist. Dabei ist  $\nu(j) = e_A$  bzw. 0, falls  $j$  die Zahl 0 enthält oder nicht.

Beweis. Lassen wir  $j$  alle abgeschlossenen die Null nicht enthaltenden Intervalle mit rationalen Anfangs- und Endpunkten durchlaufen. Ist  $f$  die betrachtete Funktion und sind alle  $f^{-1}(j)$  Nullmengen, so ist ihre Vereinigung der Menge aller  $x$  mit  $f(x) \neq 0$  gleich, also meßbar. Da nun  $f$  von Null verschieden ist, kann sie unmöglich eine Nullmenge sein. Also gibt es kraft unserer Annahme ein  $j$  derart, daß  $f^{-1}(j)$  keine Nullmenge ist. Also ist für die zugehörige Verteilung  $\varphi$   $\varphi(j)$  von Null verschieden und  $j$  enthält nicht die Zahl Null, d. h.  $\varphi \neq \nu$ , w. z. b. w.

Folgesatz 2. Ist jede meßbare Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge, so können die Charaktere einer von Null verschiedenen beschränkten meßbaren Funktion unmöglich sämtlich verschwinden.

<sup>4)</sup> Eine Menge hat die Bairesche Eigenschaft, falls sie Summe einer offenen Menge und einer Menge der ersten Kategorie ist; vgl. K. Kuratowski, Topologie I, S. 49ff. Nötige Belehrung über Mengen mit nirgendsdichten Begrenzungen (ensembles dont la frontière est non-dense) findet man in demselben Buche, S. 33f. Dabei ist „somme“ mit „Vereinigungsmenge“ gleichbedeutend.

**Beweis.** Die Nullverteilung ist ja stetig. Ihre sämtlichen Charaktere sind laut Satz 1 gleich Null. Einer von Null verschiedenen beschränkten meßbaren Funktion  $f$  entspricht laut Hilfssatz 2 und Zusatz zu Hilfssatz 1 eine von Null verschiedene stetige Verteilung auf  $A$ , deren Charaktere denjenigen von  $f$  laut Satz 1 nebst Zusatz entsprechen. Also können laut Satz 1 und I Hilfssatz 2 unmöglich sämtliche Charaktere von  $f$  wie für  $\nu$  verschwinden.

Unser Beispiel (v) genügt nun unseren Annahmen. Denn jede Vereinigung von abzählbar vielen nirgendsdichten Mengen, d. h. jede Menge der ersten Kategorie, ist nirgendsdicht, vorausgesetzt, daß ihre Begrenzung nirgendsdicht ist. Denn man weiß, daß sie in ihrer Begrenzung enthalten ist. Dabei wird der grundlegende Raum als vollständig angenommen.

Heißen zwei meßbare Funktionen  $f_1, f_2$  gleichwertig, wenn immer  $f_1^{-1}(j) + f_2^{-1}(j)$  eine Nullmenge ist, so ist diese Gleichwertigkeit mit der Gleichheit der zugehörigen Verteilungen gleichbedeutend. Also ergibt sich aus I Hilfssatz 2 und Zusatz zu Hilfssatz 1 folgende Behauptung:

*Nebensatz 2. Ist jede meßbare Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen selbst eine solche, so ist die Gleichwertigkeit zweier beschränkter meßbarer Funktionen mit der Gleichheit all ihrer Charaktere gleichwertig.*

### III. Vollständige Charaktere.

Nach II Satz sind die Charaktere von stetigen Verteilungen in  $A$ , falls sie für alle beschränkten Argumente erklärt sind, den Primidealen in  $A$  eindeutig zugeordnet. Sie sind also durch ihre Werte für beschränkte Argumente völlig bestimmt. Jeder Charakter soll also immer wenigstens für alle beschränkten stetigen Verteilungen, bzw. alle beschränkten meßbaren Funktionen als erklärt angenommen werden. Kann man nun seinen Definitionsbereich so wählen, daß er alle stetigen Verteilungen bzw. alle meßbaren Funktionen überhaupt, seien sie beschränkt oder nicht, enthält, so soll unser Charakter *vollständig* genannt werden. Wir wollen diese Vollständigkeit mit Hilfe der Eigenschaften der zugehörigen Primideale ausdrücken. Dazu brauchen wir folgenden

Hilfssatz 1.  $\alpha_n$  sei eine Folge von Elementen in einem Booleschen Ringe mit der Vereinigung  $a$ . Dann gibt es Elemente  $a_{n,l}$  zu je zweien fremd, (d. h.  $a_k a_l$  ist gleich Null, falls die Indizes  $k$  und  $l$  verschieden sind) mit der Vereinigung  $a$ . Und ein Ideal geht in allen  $a_n$  dann und nur dann auf, wenn es für alle  $\alpha_n$  der Fall ist.

Dasselbe gilt, falls die  $\alpha_n$ , also auch die  $a_n$ , meßbare Mengen und Vereinigungen im üblichen mengentheoretischen Sinne sind.

**Beweis.** Man setze  $a_1 = \alpha_1 = \omega_1$ ,  $\omega_{n+1} = \alpha_{n+1} + \omega_n \alpha_{n+1} + \omega_n$ ,  $a_{n+1} = \omega_{n+1} + \omega_n \omega_{n+1}$ . Die Fremdheit der so erklärten  $a_n$  ergibt sich

durch leichte Rechnung. Um zu zeigen, daß  $a$  die Vereinigung unserer  $a_n$  ist, genügt es zu beweisen, daß  $a_n = xa_n$  für alle  $n < N$  dann und nur dann gilt, wenn  $\alpha_n = x\alpha_n$  für alle  $n < N$ . Im Falle eines abstrakten Booleschen Ringes gilt dann nämlich  $a_n = aa_n$  für alle  $n$ , und aus  $a_n = xa_n$  folgt man  $\alpha_n = x\alpha_n$ , d. h.  $a = xa$ . Und für meßbare Mengen kann man für  $x$  zuerst die Vereinigung aller  $a_n$  mit  $n < N$  und dann diejenige aller  $\alpha_n$  mit  $n < N$  wählen, und man sieht, daß die erste alle  $\alpha_n$  mit  $n < N$  und die zweite alle  $a_n$  mit  $n < N$  enthält; also sind beide Vereinigungen einander gleich, also auch die Vereinigungen für alle  $n$ .

Es sei also  $\omega_n = x\omega_n$  und  $\alpha_{n+1} = x_{n+1}$ . Man hat offenbar  $\omega_{n+1} = x\omega_{n+1}$  und dann  $\alpha_{n+1} = x\alpha_{n+1}$ . Umgekehrt sei  $\alpha_n = x\alpha_n$ ,  $n < N$ ; man hat  $\alpha_n = \alpha_n\omega_n = \alpha_n \sum a_k$ ,  $k \leq n$ , also  $\alpha_n = x\alpha_n$ . Also ist  $a_n = xa_n$  mit  $\alpha_n = x\alpha_n$ ,  $n < N$ , wirklich gleichbedeutend.

Geht ein Ideal in allen  $\alpha_n$  auf, so ergibt sich mittels Induktion, daß dies auch für alle  $\omega_n$ , also für alle  $a_n$  der Fall ist. Da aber  $\alpha_n = \alpha_n \sum a_k$ ,  $k \leq n$ , wie oben ist, gilt auch die Umkehrung davon.

Ein Ideal in einem Booleschen Ring möge ein  $\sigma$ -Ideal heißen, falls es in jeder Vereinigung abzählbar vieler von seinen Elementen aufgeht. Ist  $A$  wie früher erklärt (vgl. II), so sage ich, ein Ideal in  $A$  gehe in einer meßbaren Menge auf, wenn es das zu ihr gehörige Element in  $A$  teilt. Das System aller meßbaren Mengen, in denen ein Ideal in  $A$  aufgeht, ist ja erblich und endlich additiv, also selbst ein Ideal. Ein Ideal in  $A$  möge nun ein  $\sigma'$ -Ideal genannt werden, falls es folgende Beschaffenheit besitzt: Geht es in abzählbar vielen meßbaren Mengen auf, so gilt dasselbe für ihre mengentheoretische Vereinigung, vorausgesetzt, daß die letztere meßbar ist. In den Bezeichnungen von II Satz nebst Zusatz gilt

Hilfssatz 2. Ein Charakter  $h$  bzw.  $k$  ist dann und nur dann vollständig, wenn das zugehörige Primideal  $\pi$  ein  $\sigma$ - bzw.  $\sigma'$ -Ideal ist.

Beweis.  $\pi$  sei also ein  $\sigma$ -Primideal in  $A$ .  $j$  möge alle abgeschlossenen Intervalle mit rationalen Anfangs- und Endpunkten durchlaufen; also ist jedes  $j$  kompakt.  $\varphi$  sei eine stetige Verteilung auf  $A$ . Also ist  $e = e_A$  der Vereinigung aller  $\varphi(j)$  gleich, also  $\pi$  geht in einem gewissen  $\varphi(j)$  nicht auf und laut I Grundhilfssatz ist  $\varphi \in A_\pi$ . Also enthält  $A_\pi$  alle stetigen Verteilungen.

Ist  $\pi$  ein  $\sigma'$ -Primideal, so sieht man ebenso, daß für jede meßbare  $f$   $\pi$  in einem gewissen  $f^{-1}(j)$  nicht aufgeht, d. h.  $\varphi(j) \text{ non } \in \pi$ , wo  $\varphi$  zu  $f$  gehört. Also ist ein  $k/f$  wirklich vorhanden.

Andererseits sei  $\pi$  kein  $\sigma$ -Ideal. Dann gibt es eine Folge  $a_n \in \pi$ ,  $n > 0$ , deren Vereinigung  $a$  existiert und durch  $\pi$  nicht teilbar ist. Da  $(e + a)a = 0 \in \pi$  ist, geht  $\pi$  in  $a_0 = e + a$  auf und  $e$  ist die Vereinigung aller  $a_n$ ,  $n \geq 0$ . Denn aus  $a_n = xa_n$ ,  $n \geq 0$ , ergibt sich unmittelbar  $a = xa$

und  $a_0 = xa_0$ , also durch Addition  $e = xe = x$ . Laut Hilfssatz 1 kann man alle  $a_n$  zu je zwei fremd annehmen. Enthält nun  $j$  nur endlich viele ganze Zahlen  $n \geq 0$ , so sei  $\varphi(j)$  der Summe der zugehörigen  $a_n$  gleich. Enthält es alle ganzen nicht negativen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen  $n$ , so sei  $\varphi(j) = e + \sum a_n$ , wo man über die Ausnahmeindizes zu summieren hat. Man sieht dann leicht, daß  $\varphi$  eine stetige Verteilung auf  $A$  ist. Haben z. B. die  $j_n$  einen leeren Durchschnitt und ist immer  $x = x\varphi(j_n)$ , so gibt es zu jedem  $n$  ein  $m$  mit  $n \text{ non } \in j_m$ , d. h.  $\varphi(j_m)a_n = 0$ , also  $xa_n = 0$ , oder anders geschrieben  $(e + x)a_n = a_n$ . Da nun  $e$  die Vereinigung unserer  $a_n$  ist, folgt daraus  $(e + x)e = e$ , d. h.  $x$  ist leer, w. z. b. w. Und man sieht, daß für jede Umgebung  $j$  einer beliebigen Zahl  $\varphi(j) \in \pi$  gilt, wenn nur  $j$  eine endliche Länge hat. Also ist wirklich  $\varphi \text{ non } \in A_\pi$ .

Ersetzt man  $\sigma$  durch  $\sigma'$ , d. h. geht  $\pi$  in den meßbaren Mengen  $a_n$ ,  $n > 0$ , auf, ohne in ihrer meßbaren Vereinigung  $a$  (im mengentheoretischen Sinne) aufzugehen, ist ferner  $a_0$  das Komplement von  $a$  in der größten meßbaren Menge, die ja statt  $e = e_A$  aufzusetzen ist, sind noch die  $a_n$  zu je zwei elemente-fremd angenommen, was ja nach Hilfssatz 1 möglich ist, und setzt man  $f^{-1}(j)$  statt  $\varphi(j)$ , so ist  $f$  eine meßbare Funktion, deren zugehörige Verteilung in  $A_\pi$  nicht enthalten ist, für die also kein  $k/f$  vorhanden ist.

**Folgesatz.** *Es gibt keine vollständigen Charaktere von Zahlenfolgen.*

**Beweis:** Für meßbar wählen wir alle Mengen von Indizes  $n$ . Jede Menge, die ein  $n$  als ihr einziges Element enthält, ist eine Nullmenge, also jedes Ideal in  $A$  geht in ihr auf, ohne aber in der Vereinigung aller solchen Mengen aufzugehen. Also ist  $A$  das einzige  $\sigma'$ -Ideal in  $A$ , woraus kraft Hilfssatz 2 unsere Behauptung folgt.

**Hilfssatz 3.** In den Beispielen (i) bis (v) gibt es für jedes Primideal  $\pi$  in  $A$  eine solche zunehmende Folge von meßbaren Mengen  $p_n$ , in denen  $\pi$  aufgeht, deren Vereinigung alle Punkte des Raumes mit Ausnahme höchstens eines einzigen enthält.

Dieser Ausnahmepunkt möge  $p$  heißen. Der betrachtete Raum soll Euklidisch angenommen werden.  $N$  sei seine Dimension.

**Beweis.** Jeder Folge  $k = \{k_1, k_2, \dots, k_N\}$  von  $N$  ganzen Zahlen mit  $|k_i| \leq n^2$  sei die Menge  $\delta_k$  aller Punkte  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  mit  $k_1 - 1 < nx_1 \leq k_1$  zugeordnet. Bei festem  $n$  möge  $d_n$  alle Mengen  $\delta_k$  und das Komplement ihrer Vereinigung durchlaufen; es gibt also insgesamt endlich viele Mengen  $d_n$  und sie sind zu je zwei punktfremd und überdecken den ganzen Raum. Ferner enthält jeder Durchschnitt, dessen  $n$ -ter Faktor ein  $d_n$  ist, höchstens einen Punkt. Da  $\pi$  in der Summe aller  $d_1$ , die ja dem ganzen Raum gleich ist, nicht aufgeht, geht es in einem  $d_1$ , etwa  $q_1$ , nicht auf. Ist nun ein  $d_n$ , etwa  $q_n$ , durch  $\pi$  nicht teilbar, so kann  $\pi$  in allen  $d_{n+1}$  nicht aufgehen. Denn es ginge in allen  $q_n d_{n+1}$ , also in ihrer Summe  $q_n$  auf. Also gibt es ein

$\dot{d}_{n+1}$ , etwa  $q_{n+1}$ , in dem  $\pi$  nicht aufgeht. Es sei nun  $p_n$  das Komplement von  $q_n$ . Da  $p_n q_n = 0$  durch  $\pi$  teilbar ist, muß  $\pi$  in  $p_n$  aufgehen. Und die Vereinigung aller  $p_n$  enthält alle Punkte höchstens mit Ausnahme des einzigen, der in allen  $q_n$  liegt.

In den Fällen (i) und (ii) hat es keinen Sinn, von den stetigen Verteilungen zu sprechen. Denn jedes solche  $\varphi$  ist einer meßbaren Funktion,  $f$  zugeordnet. In der Tat bilden für einen jeden Punkt  $x$  des Raumes diejenigen meßbaren Mengen, die  $x$  nicht enthalten, ein  $\sigma$ -Primideal  $\pi$  und man setze  $f(x) = h_\pi \varphi$  (vgl. Hilfssatz 2). Man hat zu zeigen, daß immer  $f^{-1}(j) = \varphi(j)$  ist; dabei kann man sich auf offene  $j$  beschränken. Dies folgt aber aus

Hilfssatz 4. Ist  $\varphi$  eine stetige Verteilung und  $\pi$  ein  $\sigma$ -Primideal in einem Booleschen Ring, so ist  $h_\pi \varphi$  wie folgt gekennzeichnet: Für jedes offene  $j$  ist  $h_\pi \varphi \in j$  mit  $\varphi(j)$  non  $\in \pi$  gleichbedeutend.

Beweis. Man hat nur zu zeigen, daß aus  $h_\pi \varphi$  non  $\in j$  die Inklusion  $\varphi(j) \in \pi$  hervorgeht.  $j_n$  sei eine abnehmende Folge offener Intervalle, deren Durchschnitt nur  $h_\pi \varphi$  enthält. Also sind die  $j + jj_n$  zunehmende Intervalle mit der Vereinigung  $j$ . Ferner ist die Vereinigung  $\varphi(j)$  aller  $\varphi(j + jj_n)$  in  $\pi$  enthalten.

Ein Charakter  $k$  von meßbaren Funktionen möge *trivial* heißen, falls es einen Punkt  $x$  gibt mit  $kf = f(x)$  für alle betrachteten  $f$ .

Satz. In den Fällen (i) und (ii) gibt es nur triviale und in den Fällen (iii), (iv) und (v) überhaupt keine vollständigen Charaktere.

Dabei handelt es sich ebenso um Charaktere von Verteilungen, als auch um meßbare Funktionen.

Beweis. Es genügt, dies für die meßbaren Funktionen zu erläutern. Denn jeder vollständige Charakter von stetigen Verteilungen bestimmt laut II Zusatz zu Hilfssatz 1 einen solchen für meßbare Funktionen. Im Falle (i) oder (ii) geht entweder  $\pi$  in  $(p)$  — vgl. Hilfssatz 3 — auf, woraus folgt, daß der zugehörige Charakter unmöglich vollständig sein kann. Denn  $\pi$  geht in der Vereinigung der Mengen  $p_n$  und  $(p)$  nicht auf; wäre der betrachtete Charakter  $k$  vollständig, so müßte dagegen laut Hilfssatz 2  $\pi$  ein  $\sigma'$ -Ideal sein, was nicht der Fall ist. Oder es geht  $\pi$  in  $(p)$  nicht auf, und dann geht es genau in denjenigen meßbaren Mengen auf, die  $p$  nicht enthalten. Daraus folgt, daß, falls  $k$  zu  $\pi$  gehört,  $kf = f(x)$  wirklich gilt.

In den übrigen Fällen geht  $\pi$  in allen  $p_n$  und  $(p)$  auf, ohne in ihrer Vereinigung aufzugehen, woraus man wie früher schließt, daß  $k$  unvollständig ist.

#### IV. Universalringe nebst Anwendungen.

Jeder unendlichen Kardinalzahl  $\alpha$  sei ein „universal“ Boolescher Ring  $U(\alpha)$  wie folgt zugeordnet.  $c$  sei irgendeine Menge der Mächtigkeit  $\alpha$ ,  $e$  das System aller Teilmengen von  $c$ . Für jedes  $x \in c$  sei  $\bar{x}$  die Klasse aller

Teilmengen von  $c$ , die  $x$  enthalten. Dann ist  $U(a)$  der kleinste Mengenkörper (also Boolescher Ring), der  $e$  und alle  $\bar{x}$  als Elemente enthält.  $e$  ist dessen Einheit.

Hilfssatz 1. Jeder Boolesche Ring von der Mächtigkeit  $\leq a$  mit Eins-element ist zu  $U(a)$  homomorph.

Beweis. Dies ist der zweite Teil eines Stoneschen Satzes<sup>5)</sup>.

Hilfssatz 2.  $U(\exp s)$  ist mit einem Mengenkörper, dessen Elemente Mengen von Mächtigkeiten  $s$  sind, isomorph.

Beweis.  $d$  sei irgendeine Menge der Mächtigkeit  $s$ .  $c$  sei das System aller Teilmengen von  $d$ .  $U = U(a)$  mit  $a = \exp s$  möge wie oben erklärt werden. Jedem geordneten Paare  $d_1$  und  $d_2$  von elementefremden endlichen Teilmengen von  $d$  sei das System  $(d_1, d_2)$  aller Teilmengen von  $d$  zugeordnet, die  $d_1$  enthalten und zu  $d_2$  fremd sind. Es gibt offenbar  $s$  solche Systeme, und sie sind Teilmengen von  $c$ .  $h$  sei die Menge aller Vereinigungen endlich vieler  $(d_1, d_2)$ ; dies ist eine Teilmenge von  $c$  von der Mächtigkeit  $s$ .

Jedem  $a \in U$ , d. h.  $a \subset e$ , sei dessen Durchschnitt  $ha$  mit  $h$  zugeordnet. Man kann  $h$  als ein Operationszeichen ansehen, das jedem  $a$  das zugehörige  $ha$  zuordnet. Die Abbildung  $h$ , d. h.  $a \rightarrow ha$ , ist offensichtlich eine homomorphe. Um unseren Beweis zu Ende zu führen, genügt es also zu zeigen, daß für jedes nicht leere  $a$  die Menge  $ha$   $s$  Elemente enthält. Dann ist nämlich insbesondere  $ha$  von Null verschieden, also  $h$  eine isomorphe Abbildung.

Jede Vereinigung  $v$  endlich vieler Durchschnitte endlich vieler Mengen  $\bar{x}$  und  $e + \bar{x}$  gehört ja zu  $U$ . Und eine leichte Rechnung ergibt, daß jedes  $e + v$  in derselben Weise, wie für  $v$  beschrieben worden ist, erhalten werden kann. Also bilden die  $v$  mit  $e$  einen Mengenkörper; der ja gleich  $U$  sein muß. Also genügt es zu zeigen,  $ha$  enthalte  $s$  Elemente, falls  $a$  ein Durchschnitt endlich vieler  $\bar{x}$  und  $e + \bar{x}$  ist.

Es seien also  $x_r$  und  $y_r$  endlich viele Elemente von  $c$  derart, daß  $a$  der Durchschnitt aller  $\bar{x}_r$  und  $e + \bar{y}_r$  ist. Es möge nun  $x$  alle  $x_r$  und  $y$ , durchlaufen. Alle  $x$  können zu je zwei voneinander verschieden angenommen werden. Wäre es nämlich nicht der Fall, so hätte man z. B.  $x_1 = y_1$ , also  $a \subset \bar{x}_1 (e + \bar{y}_1) = 0$ , d. h.  $a = 0$  entgegen unserer Annahme. Unsere  $x$  sind ja Teilmengen von  $d$ . Es gibt also eine endliche Teilmenge  $t$  von  $d$  derart, daß alle  $tx$  zu je zwei voneinander verschieden ausfallen. Jedem  $x$  sei nun ein  $x^* = (d_1, d_2)$  wie folgt zugeordnet:  $d_1 = tx$ ,  $d_2 = t + tx$ . Also ist  $x \in x^*$  und je zwei  $x^*$  sind zueinander fremd.

Entweder  $x_1$  oder  $d + x_1$  enthält  $s$  Elemente. Ist dies für  $x_1$  bzw.  $d + x_1$  der Fall, so gibt es  $s$  endliche Teilmengen  $d'_1$ , bzw.  $d'_2$  von  $x_1$ , bzw.  $d + x_1$ , die  $tx_1$  bzw.  $t + tx_1$  enthalten. Es sei  $x' = (d'_1, d'_2)$ ; dies sind Teilsysteme

<sup>5)</sup> M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), S. 389, Theorem 10.

von  $x_r^*$ , und deren Anzahl ist  $s$ . Ferner sei  $v$  die Vereinigung eines gewissen  $x'$  mit allen  $x_r^*$ ,  $r > 1$ . Also ist  $v \in h$ , und  $v$  nimmt  $s$  verschiedene Werte an. Es genügt also zu zeigen, daß jedes  $v$  in  $a$ , d. h. in jeder Menge  $\bar{x}_r$  und  $e + \bar{y}_s$  als Element enthalten ist.

Dies ist aber richtig. Denn  $x_1 \in x'$ ,  $x_r \in x_r^*$ ,  $r > 1$ , und  $y_s \in y_s^*$ , d. h.  $y$ , non  $\in x_r^*$  laut Konstruktion. Und dies ist kraft der Erklärung von  $U = U(a)$  mit unserer zu beweisenden Tatsache gleichbedeutend.

**Verschärfung.**  $B$  sei der Ring (Mengenkörper) aller Teilmengen einer unendlichen Menge von der Mächtigkeit  $s$ .  $\beta$  sei ein Ideal in  $B$ , das nur Mengen von Mächtigkeiten  $< s$  als Elemente enthält. Dann ist  $U(\exp s)$  mit einem Unterring von  $B/\beta$  isomorph, der die Einheit von  $B/\beta$  enthält.

**Beweis.** Laut Hilfssatz 2 ist  $U(\exp s)$  mit einem Unterring  $U$  von  $B$  isomorph, der lauter Mengen von der Mächtigkeit  $s$  enthält. Unsere Homomorphie  $B \rightarrow A = B/\beta$  mit dem Kern  $\beta$  bildet  $U$  auf einen Unterring von  $B/\beta$  ab. Es genügt zu zeigen, daß diese Abbildung von  $U$  eine isomorphe ist. Dies liegt aber nahe, da keine zu  $U$  gehörige nicht leere Menge in  $\beta$  enthalten ist.

In diesem Kapitel werden für (i) bis (v) alle abzählbaren, meßbaren Mengen als Nullmengen angesehen; unsere Ergebnisse können dann bequemer formuliert werden.

Es sei  $t$  die Anzahl aller Mengen reeller Zahlen, d. h.  $t = \exp c$ .

**Hilfssatz 3.** Das in I Verschärfung zu Hilfssatz 1 erklärte Ideal  $\alpha$  besitzt in unseren Beispielen (i) bis (v) immer  $t$  Primteiler.

**Beweis.** Zuerst erwähne ich folgendes:

Ist die Vereinigung abzählbar vieler meßbarer zu je zwei fremder  $b'_n$  meßbar, so ist es auch für die Vereinigung jeder Unterfolge von  $b'_n$  der Fall.

Es genügt offenbar, diese Tatsache im Falle (v) herzustellen. Man kann bekanntlich  $b'_n = g_n + o_n$  mit einem offenen  $g_n \subset b'_n$  und nirgendsdichten  $o_n$  schreiben. Dann sieht man, daß jede Vereinigung einiger  $b'_n$  der offenen Vereinigung der zugehörigen  $g_n$  mit der der zugehörigen  $o_n$  gleich ist. Es genügt also zu zeigen, daß jede Vereinigung von  $o_n$  nirgendsdicht ist, was man ja nur für die Vereinigung  $o$  aller  $o_n$  zu beweisen hat. Es sei  $g$  die Vereinigung aller  $g_n$ . Die Vereinigung  $g + o$  aller  $b'_n$  ist meßbar, also  $g + o = v_1 + n_1$  ( $v$  bzw.  $n$  mit etwaigen Indizes sei immer offen bzw. nirgendsdicht). Ferner gilt  $v_1 + g = v_2 + n_2$ , also  $v_1 + n_1 = g + o = v_1 + v_2 + n_2 + o$ , d. h.  $o = v_1 + v_2 + n_1 + n_2$ . Man habe  $v_1 + v_2 = v_3 + n_3$ , also  $o = v_3 + n_1 + n_2 + n_3$ . Da aber  $o$  von der ersten Kategorie ist, muß  $v_3$  leer ausfallen, also ist  $o = n_1 + n_2 + n_3$  nirgendsdicht.

Es sei  $a'_n$  eine Folge meßbarer Mengen derart, daß  $a_n$  in  $A$  der Menge  $a'_n$  entspricht; die  $a_n$  wurden l. c. erklärt. Man kann annehmen, daß  $a'_n$  mit

wachsendem  $n$  zunimmt. Es sei  $b_0 = a_0$ ,  $b_n = a_n + a_{n+1}$ ,  $b'_0 = a'_0$ ,  $b'_n = a'_n + a'_{n+1}$ . Ist  $d$  der Durchschnitt aller  $j_n$  (vgl. I. c.), so ist, da  $\varphi_1$  stetig ist,  $a = e_A + \varphi_1(d) + \varphi_1(d) \varphi_2(j_0)$  die Vereinigung aller  $a_n$ , also auch aller  $b_n$ .

Im Falle (v) sei  $a'$  eine offene Menge, der in  $A$   $a$  zugeordnet ist. Man kann  $a'_n \subset a'$  annehmen (d. h.  $a'a'_n$  statt  $a'_n$  betrachten). Es sei  $v$  die Vereinigung aller  $a'_n$ . Dann ist  $v = g + n$ , wo  $g$  der offene Kern von  $v$  und  $n$  von der ersten Kategorie ist. Man hat ferner  $v \subset a'$ , und  $a' + g$  enthält keine nicht leere offene Menge. Denn ihr zugeordnetes  $m$  in  $A$  wäre von Null verschieden und  $ma_n$  gleich Null für jedes  $n$ , also hätte man für  $x = a + m$  immer  $a_n = xa_n$  und  $a \neq ax = x$ , was ja nicht geht, da  $a$  die Vereinigung der  $a_n$  ist. Also ist  $a' + g$  nirgendsdicht. Und  $v = g + n = a' + a' + g + n = a' + o$ , wo die Menge  $o = a' + g + n$  von der ersten Kategorie ist. Andererseits ist  $o + n = g + a' = v_4 + n_4$  mit offenem  $v_4$  und nirgendsdichtem  $n_4$ . Da aber  $o + n$  keine offene Menge enthält, ist  $v$  leer, also  $o + n$  nirgendsdicht. Also ergibt sich aus  $no = na' + ng + nn = n + 0 + n = 0$ , d. h.  $n \subset o + n$ , daß auch  $n$  nirgendsdicht ist. In jedem Falle ist also die Vereinigung aller  $a'_n$ , also auch diejenige aller  $b'_n$ , eine meßbare Menge.

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist  $\varphi_1(d) = c$  von Null verschieden.  $c$  sei der meßbaren Menge  $c'$  zugeordnet.  $c'_n$  seien zu je zwei fremde meßbare Mengen, deren Vereinigung  $c'$  gleich ist. Oder es ist  $\varphi_1(d)$  gleich Null, also  $a = e_A$ . Dann sind unendlich viele  $b'_n$  — seien es  $c'_n$  — keine Nullmengen. Denn sonst wäre  $a = e_A = a_n$  für ein gewisses  $n$  entgegen der Wahl von  $a_n$ .  $c_n$  gehöre zu  $c'_n$  in  $A$ . In jedem Falle ist die Vereinigung aller  $c'_n$  meßbar, also nach dem Vorhergesagten auch die Vereinigung jeder Teilfolge von  $c'_n$ .

Daraus folgert man, daß jede Folge von Elementen  $c_n$  eine Vereinigung besitzt. In der Tat —  $n$  möge irgendeine Menge von Indizes durchlaufen — ist die Vereinigung  $a'$  der zugehörigen  $c'_n$  eine meßbare Menge. Es sei ihr in  $A$  das Element  $a$  zugeordnet. Ich zeige, daß  $a$  die Vereinigung unserer  $c_n$  ist. Die Gleichungen  $c_n = ac_n$  sind naheliegend. Es sei nun  $c_n = xc_n$  für alle unsere  $n$ , d. h.  $c'_n = x'c'_n + o_n$ , wo  $o_n$  Nullmengen sind, deren Vereinigung mit  $o$  bezeichnet werden möge. Durch Vereinigungsbildung ergibt sich  $a' = a'x' + o$ . Also ist  $o = a' + a'x'$  meßbar, also eine Nullmenge, woraus die zu beweisende Gleichung  $a = ax$  folgt.

Die Vereinigungen unendlich vieler  $c_n$  können aber unmöglich durch  $\alpha$  teilbar sein. Im ersten Falle, wo nämlich  $c = \varphi_1(d) \neq 0$  galt, kann man mehr behaupten, nämlich, daß  $\alpha$  in keinem  $c_n$  aufgeht. Denn wäre  $c_n$  ein Vielfaches von  $a_m$ , also  $c_n = xa_m$ , so wäre  $c_n = c_n a_m = 0$ . Im zweiten Falle gibt es zu jedem  $a_m$  ein  $c_n$ , das in der betrachteten Vereinigung vorkommt, mit  $n > m$ , also  $c_n a_m = 0$ . Wäre nun unsere Vereinigung ein Vielfaches von  $a_m$ , so wäre dies auch für  $c_n$  der Fall, und man hätte  $c_n = 0$  wie früher.

Mit den Vereinigungen der  $c_n$  rechnet man ebenso wie mit denen der  $c'_n$ . Und diese Rechnung entspricht treu der mit den Mengen von Indizes. Also ist der Ring unserer Vereinigungen mit dem Ring  $B$  von der Verschärfung von Hilfssatz 2 mit abzählbarem  $s$  isomorph und wird also mit  $B$  bezeichnet werden.  $\beta$  sei der Durchschnitt von  $B$  mit  $\alpha$ . Da nach dem Obigen keine Vereinigung unendlich vieler  $c_n$  zu  $\alpha$  gehört, genügt  $\beta$  den Annahmen l. c. Also gibt es einen Unterring  $U$  von  $B/\beta$ , der zu  $U(c)$  isomorph ist.

In der Definition von  $U$  hat nun  $e$  die Mächtigkeit  $t$ . Ist  $\xi \in e$ , so sei  $\alpha(\xi)$  das Ideal derjenigen Mengen in  $U$ , die  $\xi$  nicht enthalten. Es sei  $\xi \neq \eta \in e$ . Dann gibt es z. B. ein  $x \in \xi$ ,  $x \notin \eta$ . Und  $\bar{x} \in \alpha(\eta)$ ,  $e + \bar{x} \in \alpha(\xi)$ . Da nun  $\bar{x} + (e + \bar{x}) = e$  die Einheit von  $U$  ist, sind die Ideale  $\alpha(\xi)$  und  $\alpha(\eta)$  in  $U$  teilerfremd. Die von den  $\alpha(\xi)$  erzeugten Ideale  $\beta(\xi)$  in  $B/\beta$  sind es auch, da  $e$  die Einheit von  $B/\beta$  ist.

Rechnet man zu den  $c'_n$  auch das Komplement ihrer Vereinigung, so ist die Vereinigung aller  $c_n$  gleich  $e_A$  und man hat  $e_A \in B$ . Das zu  $e_A$  gehörige Element in  $B/\beta$  ist  $e$  und es ist auch in  $A/\alpha$  der Einheit  $e$  zugeordnet. Also sind die von den  $\beta(\xi)$  erzeugten Ideale  $\iota(\xi)$  in  $A/\alpha$  zu je zwei teilerfremd. Jedes  $\iota(\xi)$  besitzt nun laut St. 63 einen Primteiler  $\omega(\xi)$  in  $A/\alpha$ , und je zwei  $\omega(\xi)$  sind ja voneinander verschieden.

$\pi(\xi)$  sei die Menge aller Elemente von  $A$ , die durch  $A \rightarrow A/\alpha$  in  $\omega(\xi)$  abgebildet werden. Offenbar sind dies verschiedene Primideale in  $A$ , deren Anzahl  $t$  ist und die laut St. 48 in  $\alpha$  aufgehen.

Man hat nebenbei in  $B/\beta$   $t$  zueinander teilerfremde Ideale  $\beta(\xi)$  gefunden. Wählt man zu jedem laut St. 63 einen Primteiler, so bekommt man, falls  $s$  abzählbar ist,

Hilfssatz 4. Im Ringe  $B/\beta$  der Verschärfung zu Hilfssatz 2 gibt es genau  $t$  Primideale \*).

Denn unser Ring hat höchstens  $c$  Elemente, also höchstens  $t$  Teilmengen überhaupt, zu denen ja die Ideale zu zählen sind.

Satz. In den Beispielen (i) bis (v) gibt es für je zwei stetige beschränkte Verteilungen genau  $t$  Charaktere, die für unsere Verteilungen verschiedene Werte annehmen.

Verschärfung.  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  seien zwei Verteilungen,  $\varphi_1$  stetig. Es gelte  $\varphi_1(j) \neq \varphi_1(j) \varphi_2(j)$  für ein passendes  $j$ ; ist  $j$  nicht offen, so sei auch  $\varphi_2$  stetig. Dann gibt es genau  $t$  Charaktere  $h$ , für die  $h \varphi_1$  erklärt ist und  $h \varphi_2 \neq h \varphi_1$ , falls überhaupt ein  $h \varphi_2$  vorhanden ist. Die Zahlen  $h \varphi_1$  haben Häufungsstellen in  $j$ .

Beweis. Dies folgt aus dem vorigen Hilfssatz mit Rücksicht auf I Hilfssatz 1 nebst Verschärfung, II Satz nebst Zusatz und I Grundhilfssatz. Denn

\*) Dies ist ein Spezialfall meines in Fund. Math. 33 (1939), S. 67 veröffentlichten Satzes. Es ist da auch andere Literatur zu ähnlichen Fragen angegeben.

es kann nicht mehr als  $t$  Charaktere überhaupt geben. In der Tat gibt es laut II Satz höchstens so viel Charaktere wie Primideale in  $A$ , deren Anzahl ja nicht  $t$  übertrifft.

Kraft II Hilfssatz 2, II Nebensatz 2 und II Satz ergibt sich daraus

**Folgesatz 1.** *In den Fällen (i) bis (iv) gibt es für je zwei voneinander verschiedene meßbare Funktionen genau  $t$  Charaktere, die für unsere Funktionen nie dieselben Werte annehmen.*

*Im Falle (v) gibt es für jede von Null verschiedene meßbare Funktion genau  $t$  Charaktere, die für unsere Funktion von Null verschiedene Werte annehmen.*

Aus Hilfssatz 4 und II Satz nebst Zusatz folgert man

**Folgesatz 2.** *Es gibt genau  $t$  Charaktere von Zahlenfolgen.*

## V. Darstellung von Verteilungen.

Wir wollen uns nun der anfangs erwähnten Frage widmen, inwieweit die Verteilungen durch meßbare Funktionen dargestellt werden können, wozu sich die obigen Überlegungen von Nutzen zeigen. Es handelt sich nun darum, unter welchen Bedingungen die Verteilungen  $\varphi$  auf  $A$  am anfangs beschriebenen Wege aus in einem mit  $A$  isomorphen Mengenkörper meßbaren Funktionen  $f$  wirklich entstehen. Zuerst muß offenbar jede darzustellende Verteilung stetig sein. Also lassen die mittels Zahlenfolgen bestimmten Verteilungen keine Darstellung zu. (Z. B. ist die zur Folge  $1/n$  gehörige Verteilung  $\varphi$  nicht stetig. Ist nämlich  $j_n$  offen mit dem Anfangspunkt 0 und Endpunkt  $1/n$ , so sind alle  $\varphi(j_n)$  gleich Eins, obwohl der Durchschnitt der  $j_n$  leer ist.) Andererseits besitzt  $A$  in allen Beispielen (i) bis (v) die Eigenschaft, ein  $\sigma$ -Ring zu sein, d. h. mit jeder abzählbaren Folge von Elementen auch eine Vereinigung davon zu enthalten. Also will ich mich in diesem Kapitel auf stetige Verteilungen auf  $\sigma$ -Ringem beschränken.

**Hilfssatz 1.**  *$A$  sei ein beliebiger Boolescher Ring,  $E$  eine Menge von Primidealen darin. Zu jedem  $a \in A$  sei  $la$  die Menge der Ideale aus  $E$ , die in  $a$  nicht aufgehen. Dann ist  $l$ , d. h.  $a \rightarrow la$ , eine homomorphe Abbildung von  $A$ , und jede homomorphe Abbildung von  $A$  kann so bis auf Isomorphie erhalten werden.  $l$  ist freilich dann und nur dann eine Isomorphie, wenn  $E$  dicht ist, d. h. für jedes von Null verschiedene  $a \in A$  ein Ideal enthält, das in  $a$  nicht aufgeht.*

**Beweis.** Vgl. St. 63.

**Hilfssatz 2.** *In den obigen Bezeichnungen sei  $A$  ein Boolescher Ring mit Einselement. Zu jeder beschränkten stetigen Verteilung  $\varphi$  auf  $A$ , möge es eine auf  $E$  erklärte Funktion  $f$  mit  $l\varphi(j) = f^{-1}(j)$  für jedes  $j$  geben. Dann enthält  $E$  lauter  $\sigma$ -Ideale.*

Beweis. Ich setze falsch voraus, ein  $\pi \in E$  gehe in der Vereinigung  $a$  seiner Elemente  $a_n$  nicht auf. Laut III Hilfssatz 1 können diese zu je zwei fremd angenommen werden. Zählt man noch  $e_A + a$  zu den  $a_n$ , so ist die Vereinigung aller  $a_n$  gleich  $e_A$ , wie man leicht nachrechnet.

Die Verteilung  $\varphi$  auf  $A$  sei wie folgt erklärt: falls  $j$  nur endlich viele  $1/n$  enthält, ist  $\varphi(j)$  die Summe der zugehörigen  $a_n$ ; enthält  $j$  alle  $1/n$  mit Ausnahme von endlich vielen, so ist  $\varphi(j) = e_A + \sum a_n$ , wo über die Ausnahmeindizes zu summieren ist. Dies ist ja eine beschränkte Verteilung auf  $A$ . Sie ist auch stetig. Es sei nämlich  $x = x\varphi(j_n)$  für alle  $n$ . Haben die  $j_n$  einen leeren Durchschnitt, so gibt es zu jedem  $n$  ein  $m$  mit  $1/n$  non  $\in j_m$ . Dann ist  $\varphi(j_m)a_n = 0$ , also  $xa_n$  verschwindet, d. h.  $(e_A + x)a_n = a_n$  für alle  $n$ . Da  $e_A$  die Vereinigung der  $a_n$  ist, gilt auch  $(e_A + x)e_A = e_A$ , d. h.  $x = 0$ .

Also gibt es kraft unserer Annahme eine auf  $E$  erklärte  $f$ .  $j_n$  sei ein offenes Intervall mit dem Anfangspunkt Null und Endpunkt  $1/n$ . Also ist der Durchschnitt aller  $f^{-1}(j_n)$  leer und man hat  $\pi$  non  $\in f^{-1}(j_n) = f\varphi(j_n)$  für ein passendes  $n$ . Also ist  $\varphi(j_n) \in \pi$ , d. h.  $e_A + \sum a_m \in \pi$ ,  $m \leq n$ , also  $e_A \in \pi$ , was ja nicht geht.

Eine stetige Verteilung auf einem Booleschen Ringe möge *idempotent* heißen, wenn  $\varphi \in \varphi\varphi$  gilt.

Hilfssatz 3. Die idempotenten  $\varphi$  können auch wie folgt gekennzeichnet werden: Enthält  $j$  weder Null noch Eins, so ist  $\varphi(j)$  gleich Null; enthält also  $j_0$  bzw.  $j_1$  die Zahl 0 bzw. 1, ohne die andere zu enthalten, so ist  $\varphi(j_0) + \varphi(j_1)$  gleich Eins.

Beweis. Da  $\varphi \in \varphi\varphi$  ist, gilt für jeden Charakter  $h$  die Gleichung  $h\varphi = h\varphi h\varphi$ , also  $h\varphi = 0$  oder  $h\varphi = 1$ . Enthält nun  $j$  weder 0 noch 1, so möge  $j_0$  eine abzählbare Folge von kompakten Intervallen mit der Vereinigung  $j$  durchlaufen. Kraft der Stetigkeit von  $\varphi$  folgt aus  $\varphi(j) \neq 0$  dieselbe Ungleichung für ein  $j_0$ :  $\varphi(j_0) \neq 0$ . Laut St. 64 gibt es ein in  $\varphi(j_0)$  nicht aufgehendes Primideal  $\pi$  und kraft I Grundhilfssatz ist  $h_\pi\varphi \in j_0$ , also weder Null noch Eins gleich, was, wie schon gesagt, nicht geht. Denn nach II Satz ist  $h_\pi$  ein Charakter.

Das Komplement von  $j_0 + j_1$  zerfällt in endlich viele  $j_n$ ,  $n > 1$ , und die Einheit ist  $\varphi(\sum j_n) = \sum \varphi(j_n) = \varphi(j_0) + \varphi(j_1)$  gleich.

Ist umgekehrt  $\varphi(j)$  leer, wenn nur  $j$  weder Null noch Eins enthält, so ist offenbar  $\varphi$  stetig. Und eine leichte Diskussion ergibt  $\varphi \in \varphi\varphi$ .

Hilfssatz 4. Dann und nur dann ist  $h_\pi\varphi$  von Null verschieden, d. h. gleich Eins, für eine idempotente Verteilung  $\varphi$ , wenn  $\pi$  in  $\varphi(1)$  nicht aufgeht.

Beweis.  $j$  sei eine offene Umgebung der Zahl Eins, die Null nicht enthält. Ist  $h_\pi\varphi$  gleich Eins, so geht  $\pi$  in  $\varphi(j) = \varphi(1)$  nicht auf. (Die Gleichung  $\varphi(j) = \varphi(1)$  ergibt sich aus Hilfssatz 3.) Ist  $h_\pi\varphi$  von Eins verschieden,

so sei  $j$  eine offene Umgebung davon, die Eins nicht enthält. Dann ist entweder  $\varphi(j) = 0 \in \pi$  (falls  $j$  nicht Null enthält, was man für ein von Null verschiedenes  $h_\pi \varphi$  immer annehmen kann), was ja falsch ist. Oder es ist  $h_\pi \varphi$  gleich Null und  $\varphi(j)$  nicht durch  $\pi$  teilbar. Da nun nach Hilfssatz 3  $\varphi(1)$  gleich Eins plus  $\varphi(j)$  ist, hat man  $\varphi(j) \varphi(1) = 0 \in \pi$ , also, da  $\pi$  prim ist,  $\varphi(1) \in \pi$ , w. z. b. w.

Eine Menge  $H$  von Charakteren heißt *dicht*, falls sie für jede idempotente Verteilung  $\varphi$  mit  $\varphi(1) \neq 0$  ein  $h \in H$  mit  $h\varphi = 1$  enthält.

Hilfssatz 5. Die Dichtigkeit einer Menge von Charakteren  $h = h_\pi$  stimmt mit der der Menge der zugehörigen Primideale  $\pi$  überein.

Beweis. Dies ergibt sich aus Hilfssatz 3 und 4.

Und nun zur Sache!

$A$  sei irgendein Boolescher Ring mit Einselement. Es sei  $l$  eine homomorphe Abbildung von  $A$  auf einen Mengenkörper  $lA$  derart, daß es für jede stetige Verteilung  $\varphi$  auf  $A$  eine in  $lA$  meßbare  $f$  mit der für alle  $j$  erfüllten Bedingung  $l\varphi(j) = f^{-1}(j)$  gibt. Dann sagt man, daß  $l$  eine *meßbare Darstellung* von  $A$  ist. Ist  $l$  eine Isomorphie, so möge sie *treu* heißen. In folgendem wird  $A$  ein  $\sigma$ -Ring sein. Alles wird bestehen bleiben, wenn man in unserer Definition nur beschränkte Verteilungen zuläßt. Also sind die beiden Erklärungen gleichbedeutend.

Die Abbildungen  $\varphi \rightarrow f$  und die meßbaren Darstellungen bestimmen einander eineindeutig. Denn ist  $a \in A$ , so ist die Verteilung  $\varphi$  mit  $\varphi(1) = a$  und  $\varphi(j) = 0$ , falls  $j$  weder Null noch Eins enthält, stetig, und  $la$  ist durch  $la = f^{-1}(1)$  eindeutig bestimmt. Also kann man  $l$  auch als die Abbildung  $\varphi \rightarrow f$  ansehen, d. h.  $f = l\varphi$  schreiben. Ist  $l$  treu, so ist die Korrespondenz von stetigen Verteilungen  $\varphi$  und meßbaren Funktionen  $f$  eineindeutig, und umgekehrt.

Satz 1. Alle meßbaren Darstellungen  $l$  eines  $\sigma$ -Ringes  $A$  mit Einheit können wie folgt erhalten werden:

$H$  sei irgendeine Menge von vollständigen Charakteren für Verteilungen auf  $A$ ; dann seien  $f = l\varphi$  die auf  $H$  erklärten Funktionen mit  $f(h) = h\varphi$  für  $h \in H$ .  $l$  ist dann und nur dann treu, wenn  $H$  dicht ist.

Beweis. Nach II Satz nebst Zusatz, III Hilfssatz 2 und V Hilfssatz 4 und 5 kann man es auch wie folgt ausdrücken:

$E$  sei irgendeine Menge von  $\sigma$ -Primidealen in  $A$ ; dann sei  $f = l\varphi$  auf  $E$  wie folgt erklärt:  $f(\pi) = h_\pi \varphi$ ,  $\pi \in E$ ;  $la$  ist die Menge derjenigen  $\pi \in E$ , die in  $a$  nicht aufgehen.  $l$  ist dann und nur dann treu, wenn  $E$  dicht ist.

Erstens sei eine Darstellung  $l$  gegeben. Man kann  $l$  von der in Hilfssatz 1 beschriebenen Art annehmen. Laut Hilfssatz 2 besteht  $E$  aus lauter  $\sigma$ -Primidealen.

Andererseits, falls  $E$  lauter  $\sigma$ -Primideale enthält, möge  $l$  wie erwähnt erklärt sein, d. h. in Übereinstimmung mit Hilfssatz 1. Für offene  $j$  ist  $l\varphi(j) = f^{-1}(j)$  eine Folge von III Hilfssatz 4, woraus sich von selbst dieselbe Gleichung für nicht offene  $j$  ergibt. Denn jedes Intervall kann durch Addition aus endlich vielen offenen aufgebaut werden.

Die die Treue betreffende Aussage geht aus V, Hilfssatz 1 hervor.

Es seien Elemente  $a_n$  mit der Vereinigung  $a$  in  $A$  gegeben. Es gelte  $\pi \in E \cdot la$ , also  $a \text{ non } \in \pi$ . Ist nun  $\pi$  ein  $\sigma$ -Ideal, so ist  $a_n \text{ non } \in \pi$  für ein gewisses  $n$ , also  $\pi \in la_n$ . Also ist  $la$  die mengentheoretische Vereinigung der Mengen  $la_n$ ; man hat also folgenden

**Folgesatz.** *Jede meßbare Darstellung eines  $\sigma$ -Ringes mit Einselement enthält mit jeder abzählbaren Mengenfolge auch ihre mengentheoretische Vereinigung, ist also ein  $\sigma$ -Körper.*

Eine meßbare Darstellung  $l$  eines Mengenkörpers  $A$  soll *trivial* heißen, wenn es eine Menge  $H$  von Punkten von  $A$  derart gibt, daß  $la = Ha$  (bis auf Isomorphismen) gilt.

**Satz 2.** *In den Fällen (i) und (ii) gibt es nur triviale und für (iii) bis (v) überhaupt keine meßbaren Darstellungen.*

**Beweis.** Dies folgt aus Satz 1 und III Satz.

## VI. Stetige Verteilungen.

Ist jede meßbare Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine solche, so ergibt nach Zusatz zu II Hilfssatz 1 jede meßbare Funktion eine stetige Verteilung auf  $A$ , wo  $A$  immer den nach den Nullmengen reduzierten Körper der meßbaren Mengen bedeutet. Umgekehrt gilt folgender

**Satz 1.** *Ist  $A$  irgendein Boolescher Ring mit Einselement, so kann man einen Mengenkörper  $K$  von meßbaren Mengen derart wählen, daß jede Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen eine ebensolche ist,  $A$  der nach den Nullmengen reduzierte Ring  $K$  ist:  $A = hK$  und zwischen den in  $K$  beschränkten meßbaren Funktionen  $f$  und den beschränkten stetigen Verteilungen  $q$  auf  $A$  eine eindeutige Korrespondenz besteht, so daß  $q(j) = h f^{-1}(j)$  identisch gilt. Ist  $A$  ein  $\sigma$ -Ring, so ist  $K$  ein  $\sigma$ -Körper.*

Dabei wird zwischen gleichen Funktionen kein Unterschied gemacht.

**Beweis.** Es wird bequem sein, wenn auch nicht unentbehrlich, eine von Stone herrührende topologische Darstellung Boolescher Ringe in Betracht zu ziehen<sup>7)</sup>. Unter einem *Baustein* soll eine zugleich offene und abgeschlossene

<sup>7)</sup> M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), Theorem 1 auf S. 378 und Theorem 2 auf S. 380.

Menge verstanden werden. Dann gibt es nach Stone einen Hausdorffschen bikompakten Raum  $e = e_A = \mathfrak{E}(A)$ , in dem jede offene Menge eine Vereinigung von Bausteinen ist, derart, daß  $A$  bis auf Isomorphie der Mengenkörper aller Bausteine in  $e$  ist.  $e$  ist die Einheit von  $A$ . Alles folgende spielt sich im Raume  $e$  ab.

Für meßbar werden nun die Mengen  $b + i$  angenommen, wo  $b$  ein Baustein und  $i$  eine Menge der ersten Kategorie ist. Die Nullmengen sollen mit den Mengen der ersten Kategorie übereinstimmen. Sind  $b_1$  und  $b_2$  zwei verschiedene Bausteine, so ist  $b_1 + b_2$  ein nicht leerer Baustein  $g_0$ , also von der zweiten Kategorie. In der Tat sei  $a$  die Vereinigung nirgendsdichter  $a_n$ ,  $n > 0$ , die ja abgeschlossen und wachsend angenommen werden dürfen. Man möge schon eine abnehmende Folge nichtleerer Bausteine  $g_n$  für  $n \leq N$  mit leeren  $a_n g_n$  gefunden haben. Dann ist  $g_N + g_N a_{N+1}$  nicht leer und offen, enthält also einen nicht leeren Baustein  $g_{N+1}$ . Die Bikompaktizität von  $e$  ergibt nun, daß der Durchschnitt der ins Unendliche fortgesetzten Folge  $g_n$  nicht leer ist. Er ist ferner in  $g_0$  enthalten und zu  $a$  fremd, also ist  $g_0$  non  $\subset a$ , wie man zeigen wollte.

Daraus folgert man, daß  $A$  mit dem nach den Nullmengen reduzierten Ringe  $K$  der meßbaren Mengen isomorph ist. Es sei  $b_n + i_n$  eine Folge meßbarer Mengen. Die mengentheoretische Vereinigung  $v$  aller  $b_n$  habe die abgeschlossene Hülle  $b$ ; ferner sei  $a$  die Vereinigung der Bausteine  $b_n$  im Ringe  $A$ . Da nun  $b + v$  nirgendsdicht ist, genügt es für  $v \in K$  zu zeigen, daß  $b$  ein Baustein ist. Dies ist aber richtig, da  $b = a$  gilt. In der Tat ist  $b_n = b b_n$  für jedes  $n$ . Es ist ferner  $b_n = a b_n$ , d. h.  $b_n \subset a$ , also  $v \subset a$ . Da  $a$  abgeschlossen ist, hat man also  $b \subset a$ . Wäre  $a$  von  $b$  verschieden, so gäbe es einen in  $a$  enthaltenen und zu  $b$  fremden nicht leeren Baustein  $w$ . Man hätte  $b_n = (a + w) b_n$  für alle  $n$ , also  $a = a(a + w)$ , d. h.  $w = aw = 0$ .

Den abzählbaren Vereinigungen in  $K$  entsprechen also ebensolche in  $A$ , falls es solche gibt (da  $b$  der Vereinigung  $v$  entsprach), und ebenso für Durchschnitte. Nun sei eine beschränkte stetige Verteilung  $\varphi$  auf  $A$  gegeben. Wir erwähnen noch folgende Eigenschaft des Stoneschen Modells (vgl. l. c.): Die Punkte  $\pi$  von  $e$  sind mit den Primidealen in  $A$  identisch und  $\pi \in a$  ist mit  $a$  non  $\in \pi$  gleichbedeutend. Dabei ist freilich im ersten Falle  $\pi$  ein Punkt und  $a$  eine Teilmenge von  $e$ , im zweiten  $\pi$  ein Primideal und  $a$  eine Element von  $A$ .  $f$  sei nun auf  $e$  wie folgt erklärt:  $f(\pi) = h_\pi \varphi$  (vgl. I Grundhilfssatz). Dann ist  $f$  meßbar.

In der Tat sei  $j$  ein Intervall, das ja abgeschlossen angenommen werden darf. Es sei  $j_n$  eine Folge von offenen Intervallen mit  $\bar{j}_{n+1} \subset j_n$ , deren Durchschnitt  $j$  gleich ist. Es sei  $d$  der mengentheoretische Durchschnitt der Bausteine  $\varphi(j_n)$ . Ist  $f(\pi) \in j$ , d. h.  $h_\pi \varphi \in j_n$  für alle  $n$ , so ist nach I Grundhilfssatz  $\varphi(j_n)$  non  $\in \pi$ , d. h.  $\pi \in \varphi(j_n)$ , also  $\pi \in d$ . Ist ferner  $f(\pi)$  non  $\in j$ , so

gibt es ein  $\pi$  mit  $h_\pi \varphi$  non  $\in \bar{j}_\pi$ , also ein offenes  $j'$  mit  $h_\pi \varphi \in j'$ ,  $j'j_\pi = 0$ . Also ist nach I Grundhilfssatz  $\varphi(j')$  non  $\in \pi$ ,  $\varphi(j') \varphi(j_\pi) \in \pi$ , also  $\varphi(j_\pi) \in \pi$ , d. h.  $\pi$  non  $\in \varphi(j_\pi)$ , also  $\pi$  non  $\in d$ . Daher ist  $f^{-1}(j)$  der Menge  $d$  gleich, also  $f$  meßbar. Denn, wie unten erwähnt,  $\varphi(j) + d$  ist von der ersten Kategorie.

Und welche Verteilung ist  $f$  zugeordnet? Wie oben gesagt, entspricht der Menge  $d$  im Ring  $A$  der Durchschnitt aller  $\varphi(j_\pi)$ , der ja  $\varphi(j)$  gleich ist. Daher ist  $\varphi$  eben die der Funktion zugeordnete Verteilung, w. z. b. w. Nach III Hilfssatz 1 ergeben gleiche  $f$  dieselben  $\varphi$  und umgekehrt.

Zusatz 1. Abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten in  $K$  entsprechen ebensolche in  $A$ , falls es natürlich solche gibt.

Zusatz 2. Die Punkte von  $K$  sind die Primideale in  $A$  und  $f(\pi) = h_\pi \varphi$ , wenn  $f$  passend gewählt ist.

Ist  $A$  ein  $\sigma$ -Ring, so möge  $\psi$  den Borelschen Mengen der Zahlengerade Elemente von  $A$  derart zuordnen, daß den Summen und abzählbaren Vereinigungen ebensolche entsprechen. Dann möge  $\psi$  eine Borelsche Verteilung in  $A$  heißen.

Satz 2. Jede beschränkte stetige Verteilung auf einem  $\sigma$ -Ring mit Eins-  
element kann in einer und nur einer Weise in eine Borelsche fortgesetzt werden.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung liegt nahe. Denn jeder Wert einer Borelschen Verteilung muß aus ihren Werten für Intervalle ebenso aufgebaut werden wie das Argument aus Intervallen.

Andererseits kann man unseren Ring  $A$  wie in Satz 1 mittels  $K$  darstellen und jeder stetigen beschränkten Verteilung  $\varphi$  eine Funktion  $f$  wie beschrieben zuordnen. Setzt man nun  $\psi(i) = hf^{-1}(i)$  für jedes Borelsche  $i$ , so ist laut Zusatz 1  $\psi$  eine Borelsche Fortsetzung von  $\varphi$ .

Nach II Bemerkung 2 sind die Summen und Produkte im Bereich der stetigen Verteilungen eindeutig bestimmt, so daß man  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  bzw.  $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$  statt  $\varphi \in \varphi_1 + \varphi_2$  bzw.  $\varphi \in \varphi_1 \varphi_2$  schreiben darf. Es gilt dann

Satz 3. Die beschränkten stetigen Verteilungen auf einem  $\sigma$ -Ring bilden einen Ring.

Beweis. Bekanntlich gilt dies für die meßbaren Funktionen auf  $K$  aus Satz 1. Denn  $K$  ist ein  $\sigma$ -Körper. Und daraus überträgt sich dies auf unsere Verteilungen mittels desselben Satzes.

Für jede reelle von Null verschiedene Zahl  $t$  sei  $\psi = t\varphi$  derart erklärt, daß identisch  $\psi(tj) = \varphi(j)$  gilt. Dabei ist  $tj$  die Menge aller  $tx$  mit  $x \in j$ . Die Beschränktheit und Stetigkeit geht durch diese Multiplikation mit  $t$  nicht verloren. Man hat außerdem  $h(t\varphi) = t(h\varphi)$  für alle Charaktere  $h$ .

Die Norm  $\|\varphi\|$  der Verteilung  $\varphi$  ist die obere Grenze aller  $|\int \varphi|$ . Die Gesamtheit  $\mathfrak{B}(A)$  der beschränkten stetigen Verteilungen auf  $A$  kann so normiert werden, und es gilt

**Satz 4.** *Ist  $A$  ein  $\sigma$ -Ring, so ist  $\mathfrak{B}(A)$  ein Banachscher Raum<sup>\*)</sup>.*

**Beweis.** Sind  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zwei solche Verteilungen, so ist  $\|\varphi_1 - \varphi_2\|$  ihr Abstand. Nach I Hilfssatz 3 und II Satz kann dies nur dann verschwinden, wenn  $\varphi_1 = \varphi_2$  ist. Auch die übrigen Postulate sind erfüllt. Z. B. sei  $\varphi_n$  eine Cauchysche Folge. Dann bilden für jedes  $h$  die  $\int h \varphi_n$  eine ebensolche, deren Grenzwert  $f(\pi)$  mit  $h = h_n$  (vgl. II Satz) heißen möge. Ist nun  $f_n(\pi) = \int h_n \varphi_n$ , so sind nach Zusatz 2 die  $f_n$  meßbar, und es ist dies bekanntlich auch für  $f$  der Fall. Denn  $K$  ist nach Satz 1 ein  $\sigma$ -Körper. Also ist  $f_n - f$  gleichmäßig zu Null konvergent. Dann ist  $\varepsilon_n = \sup |f_n - f|$  eine Nullfolge und  $|\int h(\varphi_n - \varphi)| \leq \varepsilon_n$ , wo  $\varphi$  die zu  $f$  gehörige Verteilung ist. Also gilt gleichmäßig  $\int h(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ , d. h.  $\int h \varphi_n \rightarrow \int h \varphi$ , also  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ .

**Zusatz.** In den Bezeichnungen von Satz 1 entspricht der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen  $f$  eine Konvergenz der zugehörigen  $\varphi$  im Sinne der Norm.

Eine Verteilung heiße *elementar*, falls es eine endliche Zahlenmenge  $m$  derart gibt, daß  $\varphi(j)$  für jedes zu  $m$  fremde  $j$  verschwindet.

**Satz 5.** *Ist  $A$  ein Boolescher Ring, so bilden die elementaren Verteilungen auf  $A$  eine in  $\mathfrak{B}(A)$  dichte Menge.*

**Beweis.** Jedes beschränkte im Körper  $K$  meßbare  $f$  kann bekanntlich mittels meßbarer  $f_n$ , die je nur endlich viele Werte annehmen, gleichmäßig approximiert werden. Dann sind auch die Funktionen  $f_n - f$  meßbar und  $\varepsilon_n = \sup |f_n - f|$  ist eine Nullfolge. Für zugehörige Verteilungen gilt  $|\int h(\varphi_n - \varphi)| \leq \varepsilon_n$ , also  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , und die  $\varphi_n$  sind ja elementar.

Erklärt man also auf  $A$  eine Maßfunktion, so kann man für die stetigen Verteilungen in naheliegender Weise eine Integralrechnung entwickeln.

## VII. Drei Hilfssätze.

**Hilfssatz 1.**  $B$  sei ein homomorphes Bild irgendeines Booleschen Ringes  $A: B = hA$ . Es seien  $b_n$  zu je zwei fremde Elemente von  $B$ . Dann gibt es in  $A$  zueinander fremde  $a_n$  mit  $b_n = ha_n$ . Ist ferner  $b = ha$  und  $b_n = bb_n$  für alle  $n$ , so kann man noch  $a_n = aa_n$  für alle  $n$  postulieren.

<sup>\*)</sup> „Espace du type (B)“ von St. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa 1932), p. 53.

Beweis. Vorausgesetzt, die  $a_n$  mit  $n < N$  seien schon gefunden worden, so setze ich  $a_N = \alpha + \alpha \sum a_n$  mit  $h\alpha = b_N$ . Um noch  $a_n = aa_n$  zu erreichen, hat man nur jedes  $a_n$  durch  $aa_n$  zu ersetzen.

Hilfssatz 2. In einem Booleschen Ringe sei die Einheit  $e$  Summe endlich vieler zu je zwei fremder Elemente  $v$ . Dasselbe gelte auch für Elemente  $w$ . Zu jedem  $w$  gebe es ferner ein  $v$  mit  $w = vw$ . Dann ist jedes  $v$  Summe aller  $w$  mit  $w = vw$ .

Beweis.  $b$  sei irgendein  $v$ ,  $\sigma = \sum w$  mit  $w = bw$ . Man hat zu zeigen, daß  $\sigma = b$  ist. Man hat  $e = \sum w = \sigma + \tau$  mit  $\tau = \sum w (w \neq bw)$ . Ist  $\beta = \sum v (v \neq b)$ , so ergibt sich durch leichte Rechnung die Gleichung  $\tau\beta = \tau$ . In der Tat gibt es für jedes  $w \neq bw$  genau ein  $v$  mit  $vw = w$ , und die übrigen  $v$  sind zu  $w$  fremd. Offenbar ist  $\sigma\tau$  gleich Null und ebenso  $\sigma\beta$ . Denn für jedes in der Summe  $\sigma$  vorkommende  $w$  hat man  $w = bw$ , also ist  $w$  zu allen  $v$  mit Ausnahme von  $b$  fremd. Also  $(\sigma + \tau)(\sigma + \beta) = \sigma + \tau$ , d. h.  $(\sigma + \tau)(\sigma + \beta) = e$ . Multipliziert man die letzte Gleichung mit  $\sigma + \beta$ , so ergibt sich  $e = \sigma + \beta$ , also  $\sigma = e + \beta = \sum v + \sum v (v \neq b) = b$ .

Hilfssatz 3.  $A$  sei ein Boolescher Ring mit Einselement,  $B$  ein homomorphes Bild davon. Es sei eine Folge von endlichen Teilmengen  $\beta_n$  von  $B$ ,  $0 \text{ non} \in \beta_n$ , gegeben mit den Bedingungen: (1) aus  $a, b \in \beta_n$  folgt  $ab = 0$ , (2) die Summe aller Elemente von  $\beta_n$  ist gleich Eins, (3) für jedes  $a \in \beta_{n+1}$  gibt es ein  $b \in \beta_n$  mit  $a = ab$ . Dann gibt es in  $A$  endliche Teilmengen  $\alpha_n$ , die ebensolche Bedingungen erfüllen, derart, daß  $\beta_n$  die Menge der homomorphen Bilder der Elemente von  $\alpha_n$  ist.

Beweis. Es seien schon die  $\alpha_k$  mit  $k \leq n$  gefunden. Gegeben sei ein  $b \in \beta_n$ .  $b$ , möge alle Elemente von  $\beta_{n+1}$  durchlaufen.  $b$  ist das homomorphe Bild eines  $a \in \alpha_n$ . Nach Hilfssatz 1 gibt es ein  $a_r$  zu jedem  $b_r$ , derart, daß  $b_r = ha_r$  (man setzt  $B = hA$ ),  $a_s a_t = 0$  für  $s \neq t$ ,  $a_r = aa_r$ . Ist etwa die Summe  $s$  aller  $a_r$  von  $a$  verschieden, so möge  $a_1$  durch  $a_1 + s + a$  ersetzt werden. Dann bleiben unsere Bedingungen bestehen und  $a$  ist die Summe der  $a_r$ . Und man hat  $h(s + a) = 0$ , also  $h(a_1 + s + a) = ha_1 = b_1$ . Denn  $hs = ha = b$ . In der Tat genügt es einzusehen, daß  $b$  die Summe der  $b_r$  ist, was aus Hilfssatz 2 folgt.

Man sieht also, daß man für  $\alpha_{n+1}$  die Gesamtheit aller  $a_r$  für alle möglichen  $a \in \alpha_n$  wählen darf.

### VIII. Abzählbare Modelle.

Eine gleichmäßige Grenzfunktion abzählbar vieler meßbarer Funktionen möge *halbmeßbar* heißen. Beschränkte halbmeßbare Funktionen können gleichmäßig durch elementare, d. h. meßbare nur endlich viele Werte annehmende Funktionen approximiert werden, woraus sich ergibt, daß sie

immer einen Banachschen Raum  $\mathfrak{H}(A)$  bilden. Dabei ist  $A$  der Körper der meßbaren Mengen und  $\|f\| = \sup |f|$ .

Satz. Ist  $B$  irgendein  $\sigma$ -Ring von der Mächtigkeit  $\leq c$ , so ist  $\mathfrak{B}(B)$  ein lineares Bild von  $\mathfrak{H}(A)$ , wo  $A$  ein Mengenkörper mit abzählbarer Einheitsmenge ist<sup>\*)</sup>.

Beweis. Nach den beiden ersten Hilfssätzen von IV, wo man  $s$  abzählbar und  $\alpha$  gleich  $c$  zu wählen hat, gibt es einen Mengenkörper  $A$  mit abzählbarer Einheitsmenge  $e$  und eine homomorphe Abbildung  $h$  von  $A$  mit  $hA = B$ . Ist  $\varphi$  eine elementare Verteilung auf  $A$ , so ist  $h\varphi$  eine ebensolche auf  $B$ . Es sei nun  $f$  meßbar auf  $A$ ,  $f_n$  elementar  $\rightarrow f$ . Dann sind die zu den  $f_n$  gehörigen Verteilungen  $\varphi_n$  elementar und es gilt dasselbe für die zugehörigen  $h\varphi_n$ , die offenbar eine Cauchysche Folge bilden. Dann ist  $lf = \lim h\varphi_n$  ein Punkt von  $\mathfrak{B}(B)$  (vgl. VI, Satz 4). Die Abbildung  $l$  ist ganz bestimmt. Denn wäre  $f'_n$  eine andere Folge von elementaren Funktionen  $\rightarrow f$ , so wäre das Gemisch  $f'_n$  der beiden Folgen  $f_n$  und  $f'_n$  eine ebensolche und man hätte  $lf = \lim h\varphi'_n$ , also auch  $lf = \lim h\varphi'_n$ . Offenbar gehen Summen und  $t$ -Vielfache in ebensolche über. Man hat  $h\varphi_n = lf_n$ .

Man hat also zu zeigen, daß jede Verteilung  $\varphi \in \mathfrak{B}(B)$  in der Form  $lf$  geschrieben werden kann. Nach VI Satz 3 seien elementare  $\varphi_n$  in  $\mathfrak{B}(B)$  mit der Grenzverteilung  $\varphi$  gegeben. Wir haben nur zu jedem  $n$  eine Funktion  $f'_n \in \mathfrak{H}(A)$  mit  $\varphi_n = lf'_n$  derart zu wählen, daß  $\|f'_k - f'_l\| \leq \|\varphi_k - \varphi_l\|$  für alle Indizes gilt. Denn dann bilden die  $f'_n$  eine Cauchysche, also konvergente Folge mit Grenzfunktion  $f \in \mathfrak{H}(A)$ , und man hat  $\varphi = lf$ .

Man möge schon alle  $f'_n$  mit  $n < N$  gefunden haben. Da unsere  $\varphi_n$  elementar sind, kann man für jedes  $n$  als  $\beta_n$  in VII Hilfssatz 3 die Menge aller von Null verschiedenen Produkte  $\varphi_0(z_0) \varphi_1(z_1) \dots \varphi_{n-1}(z_{n-1})$ , wo  $z_k$  alle möglichen Zahlen durchläuft, annehmen. Die  $\alpha_n$  mögen nach demselben Hilfssatz gewählt werden. Ist nun  $a$  irgendeine Menge  $\in \alpha_n$  mit  $ha = b \in \beta_n$ , so gibt es eine bestimmte Zahl  $z$  mit  $b = b\varphi_n(z)$ . Dann setze ich  $f'_n(x) = z$  für jeden Punkt  $x \in a$ . Diese  $f'_n$  erfüllen alle unsere Forderungen.

Es sei z. B.  $x \in a$ ,  $ha = b \in \beta_n$ . Dann ist  $|f'_n(x) - f'_k(x)|$  mit  $k \leq n$  gleich  $|z_n - z_k|$ , wo  $b = b\varphi_n(z_n)$ ,  $b = b\varphi_k(z_k)$ . Ist nun  $\pi$  ein in  $b$  nicht aufgehendes Primideal in  $A$  (vgl. St. 63), so ist offenbar  $z_n = h_\pi \varphi_n$ ,  $z_k = h_\pi \varphi_k$ , also  $|f'_n(x) - f'_k(x)| = |h_\pi \varphi_n - h_\pi \varphi_k| \leq \|\varphi_n - \varphi_k\|$ , d. h.  $\|f'_n - f'_k\| \leq \|\varphi_n - \varphi_k\|$ .

Ersetzt man  $c$  durch größere Mächtigkeiten, so bekommt man ähnliche Ergebnisse.

<sup>\*)</sup> Eine Abbildung heißt *linear*, wenn sie stetig ist und Summen und  $t$ -Vielfache in ebensolche überführt. In unserem Satze kann man jedoch noch fordern, daß auch Produkte in Produkte übergehen, oder allgemeiner alle stetigen Operationen.

## IX. Funktionen und Verteilungen.

**Satz.** *Bilden die meßbaren Mengen einen  $\sigma$ -Körper und ist jede Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine solche, so ist jede beschränkte stetige Verteilung auf  $A$  einer meßbaren Funktion zugeordnet.*

**Beweis.** Nach VI Satz 5 gibt es elementare Verteilungen  $\varphi_n$ , die im Sinne der Norm unserer vorgegebenen Verteilung  $\varphi$  zustreben. Die Verteilung  $\varphi_n$  möge zur meßbaren  $f_n$  gehören. Man kann ferner  $\|f_k - f_l\| = \|\varphi_k - \varphi_l\|$  annehmen. Dann ist eine Grenzfunktion  $f$  der  $f_n$  vorhanden. Ich behaupte, daß ihr  $\varphi$  zugeordnet ist. Nach I Hilfssatz 2 und II Hilfssatz 1 muß nur  $h f = h \varphi$  für alle laut II Satz nebst Zusatz zueinander gehörigen  $h$  und  $k$  bewiesen werden. Ist ein Wert  $h \varphi$  vorhanden, so seien  $j$  und  $j'$  offene Umgebungen davon mit verschiedenen Anfangs- und Endpunkten,  $j' \subset j$ . Dann ist  $h \varphi_n = k f_n$  für alle genügend großen  $n$  in  $j'$  enthalten. Wählt man nun  $n$  groß genug, so gilt  $f_n^{-1}(j') \subset f^{-1}(j)$ . Da aber  $\pi$  mit  $h = h_n$  in  $f_n^{-1}(j')$  nicht aufgeht, so geht es auch in  $f^{-1}(j)$  nicht auf, w. z. b. w.

In unseren meisten Beispielen ist also die Korrespondenz zwischen den stetigen Verteilungen und den meßbaren Funktionen eineindeutig.

Daß die meßbaren Mengen einen  $\sigma$ -Körper bilden, haben wir annehmen müssen, um die Meßbarkeit gleichmäßiger Grenzfunktionen meßbarer Funktionen zu sichern. Jedesmal sollen aber abzählbare Vereinigungen von Nullmengen entweder wieder als Nullmengen oder überhaupt nicht meßbar ausfallen.

(Eingegangen am 5. 1. 1940.)

## Störungstheorie der Spektralzerlegung. IV.

Von

Franz Rellich in Dresden.

Wenn ein regulärer selbstadjungierter Operator  $A(\varepsilon)$  für  $\varepsilon = 0$  einen isolierten  $h$ -fachen Eigenwert besitzt, dann hat er in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  genau  $h$  reguläre Eigenwerte und zugehörige Eigenelemente. Das wurde insbesondere in der ersten und dritten Mitteilung<sup>1)</sup> bewiesen. Die dort gegebenen Beweise sind nicht konstruktiver Natur. Sie erlauben keine Aussagen über die Größe des Konvergenzradius der gestörten Eigenwerte  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$  bzw. der gestörten Eigenelemente  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$ , erst recht erlauben sie keine Aussagen darüber, wie gut eine  $n$ -te Näherung  $\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots + \varepsilon^n \lambda_n$  bzw.  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots + \varepsilon^n \varphi_n$  den wahren Wert  $\lambda(\varepsilon)$  bzw.  $\varphi(\varepsilon)$  approximiert. Solche Aussagen werden in dieser Mitteilung gewonnen. Aus dem Ansatz  $(A_0 + \varepsilon A_1 + \dots)(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots) = (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots)(\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots)$  ergeben sich in bekannter Weise Rekursionsformeln für die  $\lambda_n$ ,  $\varphi_n$ , aus denen die nötigen Abschätzungen ermittelt werden. Dabei beschränke ich mich auf zwei Sonderfälle. Erstens auf den Fall eines *einfachen* ungestörten Eigenwertes  $\lambda_0$ . Zweitens auf den Fall eines  $h$ -fachen ungestörten Eigenwertes  $\lambda_0$  mit „einfacher erster Näherung“  $\lambda_1$ . Darunter wird verstanden: Wenn  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_h$  orthogonale und normierte, zum ( $h$ -fachen) ungestörten Eigenwert  $\lambda_0$  gehörige Eigenelemente sind, so ist (wie zuerst E. Schrödinger gezeigt hat)  $\lambda_1$  eine der  $h$  Wurzeln  $\varrho$  der Gleichung  $|(A_1 \psi_\mu, \psi_\nu) - \varrho \delta_{\nu, \mu}| = 0$ ; dabei bedeutet  $(A_1 \psi_\mu, \psi_\nu)$  das innere Produkt der beiden Elemente  $A_1 \psi_\mu, \psi_\nu$  und es ist  $\delta_{\nu, \mu} = 0$  für  $\nu \neq \mu$  und  $= 1$  für  $\nu = \mu$ . Wir nehmen an, diese Gleichung habe einfache Wurzeln und  $\lambda_1$  sei eine solche. Unsere Aussagen beziehen sich dann nur auf diejenigen von den  $h$  gestörten Eigenwerten, deren Potenzreihenentwicklung beginnt mit  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$ , wo  $\lambda_1$  eine solche *einfache* erste Näherung ist. — Für den ersten Fall ist das Resultat als Satz 1 formuliert, für den zweiten Fall als Satz 2. Unter anderen ist dadurch für die insbesondere von Lord Rayleigh und E. Schrödinger für numerische Zwecke entwickelte Störungsrechnung eine *Fehlerabschätzung* angegeben.

In einem zweiten Teil leite ich zunächst ein neues Kriterium für die Regularität eines gestörten Operators  $A(\varepsilon)$  her. Alle bisherigen Kriterien

<sup>1)</sup> Math. Annalen 113 (1937), S. 600 und 116 (1939), S. 555.

(Satz 4, 5 und 6 der dritten Mitteilung) nehmen  $A(\varepsilon)$  in der Form  $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$  an. Dabei sind die  $A_1, A_2, \dots$  entweder auf den Definitionsbereich  $\mathfrak{A}$  von  $A_0$  anwendbar, oder doch wenigstens auf einen festen, von  $\varepsilon$  unabhängigen Teilbereich  $\mathfrak{A}'$  von  $\mathfrak{A}$ , von dem aus  $A_0$  durch Abschließen<sup>2)</sup> zu dem in  $\mathfrak{A}$  selbstadjungierten Operator  $A_0$  fortgesetzt werden kann. Es gibt aber wichtige Klassen von regulären Operatoren  $A(\varepsilon)$ , die gewiß eine solche Darstellung *nicht* zulassen. Dafür zwei Beispiele. Erstens:  $A(\varepsilon)u = -u''$  für alle  $u(x)$ , die in  $0 \leq x \leq 1$  zweimal stetig differenzierbar sind und für die  $u(0) = 0, u'(1) + \varepsilon u(1) = 0$  ist. Dieser Operator (genauer: der zugehörige abgeschlossene Operator) ist ein regulärer Operator im Sinne meiner Definition<sup>3)</sup>. Aber eine Darstellung der Form  $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$  ist offenbar nicht möglich. Zweitens:  $A(\varepsilon)u = -u'' + \frac{\varepsilon}{x^2}u; u(0) = 0, u(1) = 0$ .

Hier könnte man zwar formal  $A_0 u = -u'', A_1 u = \frac{1}{x^2} \cdot u$  setzen, aber wie man leicht sieht, lassen sich  $A_0$  und  $A_1$  nicht beide zugleich in einem Definitionsbereich erklären, von dem aus  $A_0$  durch Abschließen zu einem selbstadjungierten Operator fortgesetzt werden könnte.

In beiden Beispielen ist es also nicht möglich, den Operator  $A(\varepsilon)$  nach  $\varepsilon$  zu „entwickeln“. Es zeigt sich aber, daß das für die zugehörige Form  $(A(\varepsilon)u, v)$  möglich ist und darauf beruht das in Satz 3 angegebene Kriterium. Satz 4 verwendet dieses Kriterium zur Fehlerabschätzung für die Näherungen von (einfachen) Eigenwerten und Eigenelementen.

In der Heranziehung der Formen zum Studium von Operatoren und den damit verknüpften Schlußweisen in der Herleitung der Sätze 3 und 4 folge ich K. Friedrichs<sup>4)</sup>.

§ 6 bringt Anwendungen auf Differentialoperatoren. Hervorgehoben sei, daß beim klassischen (singularitätenfreien) Sturm-Liouvilleschen Problem für die Gesamtheit der gestörten Eigenwerte und Eigenfunktionen ein fester Konvergenzkreis existiert.

§ 7 zeigt, daß es reguläre selbstadjungierte Operatoren gibt, die für  $\varepsilon = 0$ , aber für kein  $\varepsilon \neq 0$  (einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$ ) halbbeschränkt nach unten sind.

<sup>2)</sup> D. h. zu jedem  $u$  aus  $\mathfrak{A}$  gibt es eine Folge  $u_n$  aus  $\mathfrak{A}'$ , für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u| = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_0 u_n - A_0 u| = 0$  gilt.

<sup>3)</sup> Definition 2 der dritten Mitteilung.

<sup>4)</sup> K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Annalen 109 (1934), S. 456 u. 685; 110 (1935), S. 777. Ferner Math. Annalen 112 (1936), S. 1: Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

## § 1.

## Normierung regulärer Elemente.

Die Bezeichnungsweise ist dieselbe wie in den vorangehenden Mitteilungen. Insbesondere bedeutet  $\mathfrak{H}$  einen (komplexen) Hilbertschen Raum, dessen Elemente mit  $u, v, \varphi, \psi, \dots$  bezeichnet werden. Das innere Produkt ist  $(u, v)$ ;  $|u| = \sqrt{(u, u)}$ . Durchweg bedeutet  $\varepsilon$  einen reellen Parameter. Über die Bedeutung des Begriffs „reguläres Element  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$ “ unterrichtet § 3 der ersten Mitteilung. Hinsichtlich der Normierung regulärer Elemente treffen wir hier neue Verabredungen, die von den bisherigen abweichen.

Eigenelemente eines Operators  $A$ , also Elemente  $\varphi$ , die einer Gleichung  $A\varphi = \lambda\varphi$  genügen, sind immer nur bis auf Multiplikation mit einer komplexen Zahl bestimmt. Auch wenn man verlangt, daß sie normiert sein sollen, d. h. daß  $(\varphi, \varphi) = 1$  gelten soll, sind sie (auch bei einfachem Eigenwert) nicht eindeutig bestimmt: mit  $\varphi$  ist auch  $\alpha\varphi$  normiertes Eigenelement, wenn  $\alpha$  eine beliebige komplexe Zahl vom Betrag 1 ist. Betrachtet man Operatoren, die von einem Parameter  $\varepsilon$  abhängen, dann hängen auch Eigenwerte und Eigenelemente von  $\varepsilon$  ab und genügen einer Gleichung  $A(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$ . Wir nehmen an,  $\varphi(\varepsilon)$  sei in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  regulär, also  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$ . Verlangt man jetzt wieder nur  $(\varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) = 1$ , dann ist mit  $\varphi(\varepsilon)$  auch  $\varphi(\varepsilon)\alpha(\varepsilon)$  ein reguläres normiertes Eigenelement, wobei  $\alpha(\varepsilon)$  in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  eine reguläre Potenzreihe darstellt, die für reelles  $\varepsilon$  den Betrag 1 besitzt. In  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  sind die Elemente  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  also in unübersichtlicher Weise mehrdeutig. Dieser Übelstand entfällt (wie Hilfssatz 1 lehrt), wenn man außer  $(\varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) = 1$  noch verlangt,  $(\varphi_0, \varphi_n)$  soll für alle  $n$  reell sein. Im folgenden verwenden wir daher

**Definition 1.** Ein reguläres Element  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  heißt normiert, wenn  $(\varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) = 1$  gilt und wenn  $(\varphi_0, \varphi_n)$  reell ist für  $n = 1, 2, \dots$

Es gilt dann

**Hilfssatz 1.** Wenn  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  regulär und  $\varphi_0 \neq 0$  ist, dann gibt es in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  eine reguläre Potenzreihe  $\gamma(\varepsilon)$  derart, daß  $\varphi(\varepsilon) \cdot \gamma(\varepsilon)$  normiert ist. Wenn  $\varphi(\varepsilon)$  und  $\psi(\varepsilon)$  in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  regulär, normiert und (für jedes  $\varepsilon$  dieser Umgebung) linear abhängig sind, dann gibt es eine von  $\varepsilon$  unabhängige komplexe Zahl  $\alpha$  vom Betrag 1 mit  $\psi(\varepsilon) = \alpha\varphi(\varepsilon)$ .

**Beweis.** I. Sei  $\varphi(\varepsilon)$  regulär,  $\varphi(0) \neq 0$ . Dann ist  $\kappa(\varepsilon) = \frac{1}{(\varphi(\varepsilon), \varphi(0))}$  in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  regulär, also auch  $\gamma(\varepsilon) = \frac{\kappa(\varepsilon)}{\sqrt{(\kappa(\varepsilon)\varphi(\varepsilon), \kappa(\varepsilon)\varphi(\varepsilon))}}$ .

Setzt man  $\kappa(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) = \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots$ , so wird  $(\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots, \omega_0) = (\kappa(\varepsilon) \varphi(\varepsilon), \kappa(0) \varphi(0)) = \kappa(0)$ , also  $(\omega_n, \omega_0) = 0$  für  $n \geq 1$ . Nun ist  $\varphi(\varepsilon) \gamma(\varepsilon) = \frac{\omega(\varepsilon)}{\sqrt{(\omega(\varepsilon), \omega(\varepsilon))}} = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots) (p_0 + \varepsilon p_1 + \dots)$ , wo die  $p_0, p_1, \dots$  reelle Zahlen sind. Setzt man  $\varphi(\varepsilon) \gamma(\varepsilon) = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots$ , so wird  $(\psi_n, \psi_0) = (\omega_n p_0 + \omega_{n-1} p_1 + \dots + \omega_0 p_n, \frac{\omega_0}{\sqrt{(\omega_0, \omega_0)}}) = p_n \sqrt{(\omega_0, \omega_0)}$ , d. h.  $(\psi_n, \psi_0)$  ist reell. Also ist  $\varphi(\varepsilon) \gamma(\varepsilon)$  normiert.

II. Wenn zwei normierte reguläre Elemente  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$ ,  $\psi(\varepsilon) = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots$  in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  linear abhängen, dann gibt es zu jedem  $\varepsilon$  dieser Umgebung eine komplexe Zahl  $\alpha(\varepsilon)$  derart, daß  $\psi(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)$  wird. Wegen  $(\psi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) = \alpha(\varepsilon)$  ist  $\alpha(\varepsilon)$  regulär,  $\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \dots$ , außerdem  $\alpha(\varepsilon) \cdot \overline{\alpha(\varepsilon)} = 1$ . Man hat  $\varphi_n = \alpha_0 \varphi_n + \alpha_1 \varphi_{n-1} + \dots + \alpha_n \varphi_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Da  $\varphi(\varepsilon)$  normiert ist, folgt

$$(1a) \quad (\alpha_0 \varphi_n + \dots + \alpha_n \varphi_0, \alpha_0 \varphi_0) \\ + (\alpha_0 \varphi_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \varphi_0, \alpha_0 \varphi_1 + \alpha_1 \varphi_0) + \dots \\ + (\alpha_0 \varphi_0, \alpha_0 \varphi_n + \alpha_1 \varphi_{n-1} + \dots + \alpha_n \varphi_0) = 0, \quad n \geq 1$$

und

$$(1b) \quad (\alpha_0 \varphi_n + \alpha_1 \varphi_{n-1} + \dots + \alpha_n \varphi_0, \alpha_0 \varphi_0) \\ = (\alpha_0 \varphi_0, \alpha_0 \varphi_n + \alpha_1 \varphi_{n-1} + \dots + \alpha_n \varphi_0).$$

Es ist  $|\alpha_0| = 1$ . Für  $n = 1$  erhält man aus (1a) und (1b) die beiden Gleichungen  $\alpha_1 \bar{\alpha}_0 + \alpha_0 \bar{\alpha}_1 = 0$ ,  $\alpha_1 \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 \bar{\alpha}_1 = 0$ , also  $\alpha_1 = 0$ . Machen wir die Induktionsannahme  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Dann besagen (1a) und (1b) gerade  $\alpha_n \bar{\alpha}_0 + \alpha_0 \bar{\alpha}_n = 0$ ,  $\alpha_n \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 \bar{\alpha}_n = 0$  für  $n \geq 1$ , also  $\alpha_n = 0$  für  $n \geq 1$  und  $\psi(\varepsilon) = \alpha_0 \varphi(\varepsilon)$  wie behauptet.

## § 2.

### Isolierte einfache Eigenwerte.

In dem folgenden Satz 1 zerfallen die Voraussetzungen in zwei Gruppen. Die erste Gruppe (Voraussetzung 1 und 2) deckt sich inhaltlich mit den Voraussetzungen des Satzes 5 der dritten Mitteilung. An Stelle der dort formulierten Voraussetzungen 1 und 2 tritt hier die mit diesen beiden gleichwertige Voraussetzung, der in  $\mathfrak{H}'$  erklärte ungestörte Operator  $A_0$  sei zu einem selbstadjungierten Operator, der in einem  $\mathfrak{H}'$  umfassenden Raum  $\mathfrak{H}$  erklärt ist, durch Abschießen fortsetzbar<sup>2)</sup>. (Diese Voraussetzung ist jedenfalls immer dann erfüllt, wenn  $\mathfrak{H}'$  bereits das vollständige System der Eigen-

elemente von  $A_0$  enthält; dabei sind die zu endlichen Intervallen gehörigen Eigenelemente des kontinuierlichen Spektrums mitzuzählen, wenn der ungestörte Operator  $A_0$  ein solches besitzt.) Die dort formulierte Voraussetzung 3 ist unwesentlich verändert durch Hinzufügung zweier Konstanten  $a$  und  $b$ , die für die Anwendung bequem sind. — Die zweite Gruppe (Voraussetzung 3 und 4) entspricht den Voraussetzungen des Satzes 3 der dritten Mitteilung mit der wesentlichen Einschränkung, daß der ungestörte Eigenwert *einfach* sein soll.

**Satz 1.** Eine Schar von Operatoren  $A(\varepsilon)$  sei für alle  $\varepsilon$  aus einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  in dem festen Teilraum  $\mathfrak{A}'$  erklärt und symmetrisch und es sei  $A(\varepsilon)u$  für jedes  $u$  aus  $\mathfrak{A}'$  regulär; es ist also  $A(\varepsilon)u = A_0 u + A_1 u + \dots$ , wobei die  $A_i$  in  $\mathfrak{A}'$  symmetrische Operatoren bedeuten. Es gelte:

1. Der ungestörte Operator  $A_0$  in  $\mathfrak{A}'$  läßt sich durch Abschließen zu einem selbstadjungierten Operator fortsetzen, dessen Definitionsbereich  $\mathfrak{A}$  heiße<sup>2)</sup>.

2. Es gibt drei nicht-negative Konstante  $a, b, p$  derart, daß

$$(2) \quad |A_n u| \leq p^{n-1} \{a |u| + b |A_0 u|\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gilt für alle  $u$  aus  $\mathfrak{A}'$ .

3. Das Spektrum des ungestörten Operators  $A_0$  sei im Intervall  $\lambda - d < \mu < \lambda + d$  abgesehen vom Punkt  $\mu = \lambda$  leer.

4. Der ungestörte Operator  $A_0$  besitze den einfachen Eigenwert  $\lambda$  mit dem normierten Eigenelement  $\varphi$ , also  $A_0 \varphi = \lambda \varphi$ ,  $|\varphi| = 1$ .

Der Operator  $A(\varepsilon)$  (der nach Satz 5 der dritten Mitteilung eindeutig zu einem in  $\mathfrak{A}$  regulären, selbstadjungierten Operator fortsetzbar ist) besitzt dann einen Eigenwert<sup>3)</sup>  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$  mit dem normierten<sup>4)</sup>, in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Eigenelement  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$ , und zwar gilt:

1. Die  $\lambda_n$  und die (in  $\mathfrak{A}$  gelegenen)  $\varphi_n$  bestimmen sich eindeutig aus den Rekursionsformeln

$$(3a) \quad \lambda_0 = \lambda, \quad \varphi_0 = \varphi; \quad \lambda_1 = (A_1 \varphi_0, \varphi_0), \quad \varphi_1 = -R_0 A_1 \varphi_0,$$

$$(3b) \quad \lambda_n = (A_1 \varphi_{n-1}, \varphi_0) + \dots + (A_{n-1} \varphi_1, \varphi_0) + (A_n \varphi_0, \varphi_0) \\ - \{\lambda_1 (\varphi_{n-1}, \varphi_0) + \dots + \lambda_{n-1} (\varphi_1, \varphi_0)\},$$

$$(3c) \quad \varphi_n = -\frac{1}{2} \{(\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_1, \varphi_{n-1})\} \varphi_0 + \lambda_1 R_0 \varphi_{n-1} + \dots \\ + \lambda_{n-1} R_0 \varphi_1 - \{R_0 A_1 \varphi_{n-1} + \dots + R_0 A_n \varphi_0\}; \quad n = 2, 3, \dots$$

<sup>3)</sup> Die Existenz eines regulären  $\lambda(\varepsilon)$  bzw.  $\varphi(\varepsilon)$  folgt auch aus Satz 3 und 4 der dritten Mitteilung, wird aber hier mitbewiesen.

<sup>4)</sup> Im Sinne der neuen Definition 1 in § 1.

Dabei ist  $R_0$  derjenige (eindeutig bestimmte) symmetrische und beschränkte Operator, für den

(4)  $R_0 \varphi_0 = 0$  und  $(A_0 - \lambda_0) R_0 u = R_0 (A_0 - \lambda_0) u = u - (u, \varphi_0) \varphi_0$  ist für alle  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ .

2. Wenn

$$C = 8p + 16 \frac{a}{d} + 16b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right)$$

gesetzt wird, dann konvergieren die Reihen  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$ ,  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  für  $|\varepsilon| < \frac{1}{C}$ .

3. Für  $|\varepsilon| < \frac{1}{C}$  gilt die Fehlerabschätzung

$$|\lambda(\varepsilon) - (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots + \varepsilon^n \lambda_n)| \leq \frac{d}{4} (\varepsilon C)^{n+1},$$

$$|\varphi(\varepsilon) - (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots + \varepsilon^n \varphi_n)| \leq \frac{1}{2} (\varepsilon C)^{n+1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Beweis. I. Die Ungleichungen (2) ermöglichen es, die Operatoren  $A_n$  durch Abschließen auf  $\mathfrak{A}$  fortzusetzen. Da  $\varphi_0$  in  $\mathfrak{A}$  liegt, liegt nach (3a) auch  $\varphi_1$  und nach (3c) jedes  $\varphi_n$  in  $\mathfrak{A}$ .

II. Bezeichnet  $P_\lambda$  die (linksstetige) Spektralschar von  $A_0$ , so ist  $R_0$  gegeben durch

$$(5) \quad R_0 u = \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq d'} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} dP_\lambda u,$$

wobei  $d'$  irgendeine positive Zahl kleiner als  $d$  bedeutet.

Also

$$(6) \quad |R_0 u| \leq \frac{1}{d} |u|$$

und

$$\begin{aligned} |A_0 R_0 u|^2 &= \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq d'} \frac{\lambda^2}{(\lambda - \lambda_0)^2} d(P_\lambda u, u) = \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq d'} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda - \lambda_0}\right)^2 d(P_\lambda u, u) \\ &\leq \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right)^2 (u, u), \end{aligned}$$

d. h.

$$(7) \quad |A_0 R_0 u| \leq \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right) |u|.$$

Aus (2) folgt  $|A_n R_0 u| \leq p^{n-1} \left\{ \frac{a}{d} + b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right) \right\} |u|$  und daraus

$$(8) \quad |R_0 A_n u| \leq p^{n-1} \left\{ \frac{a}{d} + b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right) \right\} |u|$$

für alle  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ . Schließlich ist

$$(9) \quad |A_n \varphi_0| \leq p^{n-1} \{a + b |\lambda_0|\}.$$

Mit der Abkürzung

$$(10) \quad \frac{a}{d} + b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right) = \alpha$$

hat man also

$$(11) \quad \begin{aligned} |(\mathcal{A}_n u, \varphi_0)| &\leq |u| \cdot |\mathcal{A}_n \varphi_0| \leq p^{n-1} \alpha d |u|, \\ |R_0 \mathcal{A}_n u| &\leq p^{n-1} \alpha |u|; \quad |\mathcal{A}_n \varphi_0| \leq p^{n-1} \alpha d; \quad |R_0 u| \leq \frac{1}{d} |u|. \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich aus (3b)

$$\begin{aligned} |\lambda_n| &\leq |\varphi_{n-1}| p^0 \alpha d + \dots + |\varphi_1| p^{n-2} \alpha d + p^{n-1} \alpha d \\ &\quad + |\lambda_1| |\varphi_{n-1}| + \dots + |\lambda_{n-1}| |\varphi_1|, \\ |\lambda_n| &\leq |\varphi_{n-1}| (|\lambda_1| + p^0 \alpha d) + \dots + |\varphi_1| (|\lambda_{n-1}| + p^{n-2} \alpha d) + p^{n-1} \alpha d, \\ \frac{1}{d} |\lambda_n| + p^{n-1} \alpha &\leq |\varphi_{n-1}| \left(\frac{1}{d} |\lambda_1| + p^0 \alpha\right) + \dots + |\varphi_1| \left(\frac{1}{d} |\lambda_{n-1}| + p^{n-2} \alpha\right) \\ &\quad + 2 p^{n-1} \alpha. \end{aligned}$$

Setzt man

$$(12) \quad \frac{1}{2} l_n = \frac{1}{d} |\lambda_n| + p^{n-1} \alpha, \quad n = 1, 2, \dots,$$

und benutzt auf der rechten Seite  $2 p^{n-1} \alpha \leq l_{n-1} \cdot p$ , so wird

$$l_n \leq |\varphi_{n-1}| l_1 + \dots + |\varphi_2| l_{n-2} + (|\varphi_1| + 2 p) l_{n-1}.$$

Aus (3c) folgt

$$\begin{aligned} |\varphi_n| &\leq \frac{1}{2} \{ |\varphi_{n-1}| \cdot |\varphi_1| + \dots + |\varphi_1| \cdot |\varphi_{n-1}| \} + |\varphi_{n-1}| \left(\frac{1}{d} |\lambda_1| + p^0 \alpha\right) + \dots \\ &\quad + |\varphi_1| \left(\frac{1}{d} |\lambda_{n-1}| + p^{n-2} \alpha\right) + p^{n-1} \alpha, \\ |\varphi_n| &\leq \frac{1}{2} \{ |\varphi_{n-1}| \cdot |\varphi_1| + \dots + |\varphi_1| \cdot |\varphi_{n-1}| \} + \frac{1}{2} |\varphi_{n-1}| l_1 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} |\varphi_2| l_{n-2} + \frac{1}{2} (|\varphi_1| + p) l_{n-1}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(13) \quad |\varphi_n| = q_n; \quad n = 2, 3, \dots \quad \text{und} \quad |\varphi_1| + 2 p = q_1,$$

so erhält man

$$(14) \quad \begin{aligned} l_n &\leq q_{n-1} l_1 + \dots + q_1 l_{n-1}, \\ q_n &\leq \frac{1}{2} (q_{n-1} q_1 + \dots + q_1 q_{n-1}) + \frac{1}{2} (q_{n-1} l_1 + \dots + q_1 l_{n-1}). \end{aligned}$$

Die Formeln (14) gelten für  $n = 2, 3, \dots$  und es ist

$$(15) \quad \begin{aligned} q_1 &= 2 p + |R_0 \mathcal{A}_1 \varphi_0| \leq 2 p + \frac{a}{d} + b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right), \\ l_1 &= \frac{2}{d} |\lambda_1| + 2 \alpha \leq 4 \left(\frac{a}{d} + b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right)\right). \end{aligned}$$

Mit

$$(16) \quad C = 8p + 16 \frac{a}{d} + 16b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right)$$

wird also

$$q_1 \leq \frac{C}{4}, \quad l_1 \leq \frac{C}{4}.$$

Erklärt man zwei Folgen  $r_n, s_n$  durch  $r_1 = s_1 = \frac{C}{4}$  und

$$\begin{aligned} r_n &= r_1 s_{n-1} + \dots + r_{n-1} s_1, \\ s_n &= \frac{1}{2} (r_1 s_{n-1} + \dots + r_{n-1} s_1) + \frac{1}{2} (s_1 s_{n-1} + \dots + s_{n-1} s_1), \end{aligned}$$

so wird

$$r_n \geq l_n, \quad s_n \geq q_n, \quad r_n = s_n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Aus  $r_n = r_1 r_{n-1} + \dots + r_{n-1} r_1$  folgt dann mit  $f(x) = r_1 x + r_2 x^2 + \dots$

sofort  $f^2(x) = r_2 x^2 + r_3 x^3 + \dots = f(x) - \frac{C}{4} x$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - Cx})$

$= \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n x^n \right)$ , also  $r_n = \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n$ ;  $n = 1, 2, \dots$  Nach

(13) und (12) ist also

$$(17) \quad |\varphi_n| \leq \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n, \quad |\lambda_n| \leq \frac{d}{2} \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Also wird für  $|\varepsilon C| \leq 1$

$$(18) \quad |\varphi(\varepsilon) - (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots + \varepsilon^n \varphi_n)| \leq (\varepsilon C)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n+1} \right) \right| + \left| \left( \frac{1}{n+2} \right) \right| + \dots \leq \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon C)^{n+1},$$

$$(19) \quad |\lambda(\varepsilon) - (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots + \varepsilon^n \lambda_n)| \leq \frac{d}{4} \cdot (\varepsilon C)^{n+1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

III. Es muß noch gezeigt werden, daß  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  normiert<sup>a)</sup> ist, daß es in  $\mathfrak{A}$  liegt und daß  $A(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)$  ist.

Aus (3c) folgt  $(\varphi_n, \varphi_0) = -\frac{1}{2} \{(\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_1, \varphi_{n-1})\}$ . Also ist  $(\varphi_n, \varphi_0)$  reell und es gilt  $(\varphi_n, \varphi_0) + (\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_0, \varphi_n) = 0$  für  $n \geq 1$ ,  $(\varphi_0, \varphi_0) = 1$ . D. h.  $\varphi(\varepsilon)$  ist normiert.

Wendet man auf (3c) den Operator  $A_0 - \lambda_0$  an und benutzt (3b), so ergeben sich die Gleichungen  $A_0 \varphi_n + A_1 \varphi_{n-1} + \dots + A_n \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_n + \lambda_1 \varphi_{n-1} + \dots + \lambda_n \varphi_0$  und daraus  $RA_0 \varphi_n + RA_1 \varphi_{n-1} + \dots + RA_n \varphi_0 = \lambda R_0 \varphi_n + \lambda_1 R \varphi_{n-1} + \dots + \lambda_n R \varphi_0$  mit  $R = (A_0 - \lambda_0 - \frac{d}{2})^{-1}$ .

Die Operatoren  $RA_n$  sind zunächst in  $\mathfrak{A}$  erklärt, können aber, vgl. (8), auf ganz  $\mathfrak{H}$  als beschränkte Operatoren fortgesetzt werden und  $RA_0 + \varepsilon RA_1 + \dots = RA(\varepsilon)$  ist dann gleichfalls ein in  $\mathfrak{H}$  erklärter regulärer beschränkter Operator. Auch  $\lambda_0 R + \varepsilon \lambda_1 R + \dots = \lambda(\varepsilon) R$  ist ein regulärer beschränkter Operator in  $\mathfrak{H}$ . Nach Hilfssatz 7 der ersten Mit-

teilung ist also  $RA(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)R\varphi(\varepsilon)$ . Nun gilt für jedes  $u$  aus  $\mathfrak{H}$  die Beziehung  $(\overline{RA(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)}, u) = (\varphi(\varepsilon), A(\varepsilon)Ru)$ , also  $(\varphi(\varepsilon), A(\varepsilon)Ru) = \lambda(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon), Ru)$  oder  $(\varphi(\varepsilon), A(\varepsilon)v) = (\lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon), v)$  für jedes  $v$  aus  $\mathfrak{H}$ . Da  $A(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{H}$  selbstadjungiert ist, folgt daraus, daß  $\varphi(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{H}$  liegt und daß  $A(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$  ist.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

### § 3.

#### Mehrfache Eigenwerte.

In dem folgenden Satz 2 wird nicht mehr vorausgesetzt, daß der ungestörte Eigenwert  $\lambda$  einfach sei. Er sei  $h$ -fach, d. h. es gebe genau  $h$  paarweise orthogonale, normierte Elemente  $\varphi_1, \dots, \varphi_h$  mit  $A_0\varphi_\mu = \lambda\varphi_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, h$ . Diese  $\varphi_\mu$  sollen schon so gewählt sein, daß  $(A_1\varphi_\mu, \varphi_\nu) = 0$  für  $\nu \neq \mu$  ausfällt. Dann sind die Zahlen  $\lambda_{1,\mu} = (A_1\varphi_\mu, \varphi_\mu)$  die  $h$  Näherungen erster Ordnung des gestörten Eigenwertes. Unter diesen  $h$  Zahlen sei  $\lambda_1 = \lambda_{1,\nu}$  eine solche, daß  $\lambda_{1,\mu} \neq \lambda_1$  für  $\mu \neq \nu$  ist. Daß es eine solche „einfache Näherung erster Ordnung“  $\lambda_{1,\nu}$  überhaupt gibt, ist natürlich eine Voraussetzung. Zu dieser ersten Näherung  $\lambda_1$  (und der nullten Näherung  $\lambda_0$ ) bestimmen wir den gestörten Eigenwert  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$ ,  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots$ ;  $\lambda_0 = \lambda$ ,  $\varphi_0 = \varphi$ , in Analogie zu Satz 1.

Um Rekursionsformeln zu finden, die (3a), (3b), (3c) entsprechen, gehe man zunächst davon aus, daß die Gleichungen  $A_0\varphi_n + A_1\varphi_{n-1} + \dots + A_n\varphi_0 = \lambda_0\varphi_n + \lambda_1\varphi_{n-1} + \dots + \lambda_n\varphi_0$  bzw. die Gleichungen

$$(20) \quad A_0\varphi_n - \lambda_0\varphi_n = \lambda_1\varphi_{n-1} + \dots + \lambda_n\varphi_0 - (A_1\varphi_{n-1} + \dots + A_n\varphi_0)$$

erfüllt seien. Dann wird mit geeigneten Konstanten  $c_{n,\varrho}$  <sup>7)</sup>

$$(21) \quad \varphi_n = \sum_{\varrho=1}^h c_{n,\varrho} \varphi_\varrho + R_0(\lambda_{n-1}\varphi_1 + \dots + \lambda_1\varphi_{n-1}) - (R_0A_1\varphi_{n-1} + \dots + R_0A_n\varphi_0).$$

Denkt man sich (20) für  $n+1$  hingeschrieben, dann muß die rechte Seite auf allen  $\varphi_\mu$  orthogonal stehen, es gilt also

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}\delta_{1,\mu} + \lambda_n(\varphi_1, \varphi_\mu) + \dots + \lambda_2(\varphi_{n-1}, \varphi_\mu) - [(A_2\varphi_{n-1}, \varphi_\mu) + \dots \\ + (A_{n+1}\varphi_0, \varphi_\mu)] + \lambda_1c_{n,\mu} - \sum_{\varrho=1}^h c_{n,\varrho}(A_1\varphi_\varrho, \varphi_\mu) - (A_1R_0\varphi_1, \varphi_\mu)\lambda_{n-1} \\ - \dots - (A_1R_0\varphi_{n-1}, \varphi_\mu)\lambda_1 + (A_1R_0A_1\varphi_{n-1}, \varphi_\mu) + \dots \\ + (A_1R_0A_n\varphi_0, \varphi_\mu) = 0. \end{aligned}$$

<sup>7)</sup> Der Operator  $R_0$  ist durch (5) erklärt. Er ist eindeutig festgelegt durch die Gleichungen  $R_0(A_0 - \lambda_0)u = (A_0 - \lambda_0)R_0u = u - \sum_{\mu=1}^h (u, \varphi_\mu)\varphi_\mu$ ,  $R_0\varphi_\mu = 0$ .

Daraus folgt für  $\nu = \mu$  wegen  $(A_1 \varphi_\nu, \varphi_\mu) = \lambda_{1,\mu} \delta_{\nu,\mu}$

$$(22) \quad \lambda_{n+1} = -[\lambda_n(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + \lambda_2(\varphi_{n-1}, \varphi_0)] + (A_2 \varphi_{n-1}, \varphi_0) + \dots \\ + (A_{n+1} \varphi_0, \varphi_0) + (A_1 R_0(\varphi_1 \lambda_{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} \lambda_1), \varphi_0) \\ - (A_1 R_0 A_1 \varphi_{n-1}, \varphi_0) - \dots - (A_1 R_0 A_n \varphi_0, \varphi_0).$$

Für  $\nu \neq \mu$  wird

$$(23) \quad c_{n,\mu} = \frac{1}{\lambda_1 - (A_1 \varphi_\mu, \varphi_\mu)} \{-\lambda_n(\varphi_1, \varphi_\mu) - \dots - \lambda_2(\varphi_{n-1}, \varphi_\mu) + (A_2 \varphi_{n-1}, \varphi_\mu) \\ + \dots + (A_{n+1} \varphi_0, \varphi_\mu) + (A_1 R_0(\varphi_1 \lambda_{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} \lambda_1), \varphi_\mu) \\ - (A_1 R_0 A_1 \varphi_{n-1}, \varphi_\mu) - \dots - (A_1 R_0 A_n \varphi_0, \varphi_\mu)\}.$$

Aus der Forderung,  $\varphi(\varepsilon)$  soll normiert<sup>\*)</sup> sein, folgt  $(\varphi_n, \varphi_0) + (\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_0, \varphi_n) = 0$  für  $n \geq 1$  und  $(\varphi_n, \varphi_0) = (\varphi_0, \varphi_n)$ . Wegen  $(\varphi_n, \varphi_0) = c_{n,\nu}$  daher

$$(24) \quad c_{n,\nu} = -\frac{1}{2} \{(\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_1, \varphi_{n-1})\}.$$

Die Formeln (21) bis (24) erlauben die rekursive Berechnung der  $\lambda_n, \varphi_n$ . Damit sind wir in der Lage, das Analogon zu Satz 1 zu formulieren.

Satz 2. Es seien alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, abgesehen von der Voraussetzung 4. An deren Stelle tritt die Voraussetzung: es gebe genau  $h$  Elemente  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$  mit  $A_0 \varphi_\mu = \lambda \varphi_\mu$ ,  $(\varphi_\nu, \varphi_\mu) = \delta_{\nu,\mu}$ , die schon so ausgewählt seien, daß  $(A_1 \varphi_\nu, \varphi_\mu) = \lambda_{1,\mu} \delta_{\nu,\mu}$  wird. Unter den Zahlen  $\lambda_{1,\mu} = (A_1 \varphi_\mu, \varphi_\mu)$  gebe es eine,  $\lambda_{1,\nu} = \lambda_1$ , für die  $\lambda_1 - \lambda_{1,\mu} \neq 0$  für  $\mu \neq \nu$  ist und es sei  $\varepsilon = \min_{\mu \neq \nu} |\lambda_1 - \lambda_{1,\mu}|$ ; es werde  $\varphi_\nu = \varphi_0$  gesetzt.

Der (in  $\mathfrak{H}$  reguläre selbstadjungierte) Operator  $A(\varepsilon)$  besitzt dann einen Punkteigenwert  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$  mit dem normierten<sup>\*)</sup> Eigenelement  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  und zwar gilt:

$$\lambda_1 = (A_1 \varphi_0, \varphi_0), \quad \lambda_2 = -(R_0 A_1 \varphi_0, A_1 \varphi_0) + (A_2 \varphi_0, \varphi_0),$$

$$(25a) \quad \varphi_1 = \sum_{\mu \neq \nu} \frac{-(R_0 A_1 \varphi_0, A_1 \varphi_\mu) + (A_2 \varphi_0, \varphi_\mu)}{\lambda_1 - (A_1 \varphi_\mu, \varphi_\mu)} \varphi_\mu - R_0 A_1 \varphi_0,$$

$$(25b) \quad \lambda_{n+1} = -\lambda_n(\varphi_1, \varphi_0) - \dots - \lambda_2(\varphi_{n-1}, \varphi_0) + (A_2 \varphi_{n-1}, \varphi_0) + \dots \\ + (A_{n+1} \varphi_0, \varphi_0) + (A_1 R_0(\varphi_1 \lambda_{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} \lambda_1), \varphi_0) \\ - (A_1 R_0 A_1 \varphi_{n-1}, \varphi_0) - \dots - (A_1 R_0 A_n \varphi_0, \varphi_0).$$

$$(25c) \quad \varphi_n = R_0(\lambda_{n-1} \varphi_1 + \dots + \lambda_1 \varphi_{n-1}) - (R_0 A_1 \varphi_{n-1} + \dots + R_0 A_n \varphi_0) \\ + \sum_{\nu \neq \mu} \frac{1}{\lambda_1 - (A_1 \varphi_\nu, \varphi_\nu)} \{-\lambda_n(\varphi_1, \varphi_\nu) - \dots - \lambda_2(\varphi_{n-1}, \varphi_\nu) \\ + (A_2 \varphi_{n-1}, \varphi_\nu) + \dots + (A_{n+1} \varphi_0, \varphi_\nu) + (\varphi_1 \lambda_{n-1} + \dots \\ + \varphi_{n-1} \lambda_1, R_0 A_1 \varphi_\nu) - (R_0 A_1 \varphi_{n-1} + \dots + R_0 A_n \varphi_0, A_1 \varphi_\nu)\} \varphi_\nu \\ - \frac{1}{2} \{(\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_1, \varphi_{n-1})\} \varphi_0; \quad n^0 = 2, 3, \dots$$

Ferner gelten unverändert die Behauptungen 2 und 3 von Satz 1, wenn man

$$C = 24 (\alpha + 2) (\alpha + p) \left(1 + \frac{(h-1) \cdot d}{e}\right)$$

mit  $\alpha = \frac{a}{d} + b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right)$  setzt.

Beweis. I. Genau wie bei Satz 1 lassen sich die Operatoren  $A_n$  auf  $\mathfrak{A}$  fortsetzen. Aus (25a) und (25c) ergibt sich, daß alle  $\varphi_n$  in  $\mathfrak{A}$  liegen.

II. Aus (25b) und den Ungleichungen (11) folgt

$$\begin{aligned} |\lambda_{n+1}| &\leq |\lambda_n| \cdot |\varphi_1| + \dots + |\lambda_2| \cdot |\varphi_{n-1}| + |\varphi_{n-1}| \alpha d p + \dots \\ &\quad + |\varphi_1| \alpha d p^{n-1} + \alpha d p^n + (|\lambda_{n-1}| \cdot |\varphi_1| + \dots + |\lambda_1| \cdot |\varphi_{n-1}|) \alpha \\ &\quad + (|\varphi_{n-1}| p^0 + \dots + |\varphi_1| p^{n-2} + p^{n-1}) \alpha^2 d. \end{aligned}$$

Dividiert man durch  $d$  und setzt zur Abkürzung

$$(26) \quad \frac{|\lambda_n|}{d} = \mu_n,$$

so wird

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &\leq |\varphi_1| \cdot (\mu_n + \alpha \mu_{n-1} + \alpha p^{n-1} + \alpha^2 p^{n-2}) + \dots \\ &\quad + |\varphi_{n-1}| (\mu_2 + \alpha \mu_1 + \alpha p + \alpha^2 p^0) + \alpha p^n + \alpha^2 p^{n-1}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$(27) \quad \begin{aligned} v_n &= \mu_n + \alpha \mu_{n-1} + \alpha p^{n-1} + \alpha^2 p^{n-2} + \alpha p^{n-2}; \quad n = 2, 3, \dots; \\ v_1 &= \mu_1 + \alpha \end{aligned}$$

und addiert auf beiden Seiten der Ungleichung  $\alpha \mu_n + \alpha p^n + \alpha^2 p^{n-1} + \alpha p^{n-1}$ , so wird

$$v_{n+1} \leq |\varphi_1| \cdot v_n + \dots + |\varphi_{n-1}| \cdot v_2 + \alpha \mu_n + 2 \alpha p^n + 2 \alpha^2 p^{n-1} + \alpha p^{n-1}.$$

Aus  $\alpha \mu_n \leq \alpha v_n$  und  $2 \alpha p^n + 2 \alpha^2 p^{n-1} + \alpha p^{n-1} \leq 2 p v_n$  folgt

$$\alpha \mu_n + 2 \alpha p^n + 2 \alpha^2 p^{n-1} + \alpha p^{n-1} \leq (\alpha + 2 p) v_n,$$

also

$$(28) \quad \begin{aligned} v_{n+1} &\leq (|\varphi_1| + \alpha + 2 p) v_n + |\varphi_2| v_{n-1} + \dots + |\varphi_{n-1}| v_2, \\ v_{n+1} + v_n &\leq (|\varphi_1| + \alpha + 2 p) (v_n + v_{n-1}) + |\varphi_2| (v_{n-1} + v_{n-2}) + \dots \\ &\quad + |\varphi_{n-1}| (v_2 + v_1). \end{aligned}$$

Aus (25c) ergibt sich unter Berücksichtigung der Ungleichungen (11) und

$$|A_n \varphi_0| \leq \alpha d p^{n-1} \text{ sowie der Abkürzung } \mu_n = \frac{|\lambda_n|}{d};$$

$$\begin{aligned} |\varphi_n| &\leq \mu_{n-1} |\varphi_1| + \dots + \mu_1 |\varphi_{n-1}| + |\varphi_{n-1}| \alpha p^0 + \dots + |\varphi_1| \alpha p^{n-2} \\ &\quad + \alpha p^{n-1} + \frac{(h-1)d}{e} \{\mu_n |\varphi_1| + \dots + \mu_2 |\varphi_{n-1}| + |\varphi_{n-1}| \alpha p + \dots \\ &\quad + |\varphi_1| \alpha p^{n-1} + \alpha p^n + \mu_{n-1} |\varphi_1| \alpha + \dots + \mu_1 |\varphi_{n-1}| \alpha \\ &\quad + |\varphi_{n-1}| \alpha^2 p^0 + \dots + |\varphi_1| \alpha^2 p^{n-2} + \alpha^2 p^{n-1}\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{|\varphi_{n-1}| \cdot |\varphi_1| + \dots + |\varphi_1| \cdot |\varphi_{n-1}|\}. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung (27) wird daraus

$$|\varphi_n| \leq |\varphi_1| v_{n-1} + \dots + |\varphi_{n-1}| v_1 + \alpha p^{n-1} \\ + \frac{(h-1)d}{e} \{ |\varphi_1| v_n + \dots + |\varphi_{n-1}| v_2 + \alpha p^n + \alpha^2 p^{n-1} \} \\ + \frac{1}{2} \{ |\varphi_{n-1}| \cdot |\varphi_1| + \dots + |\varphi_1| \cdot |\varphi_{n-1}| \}.$$

Wegen  $\alpha p^{n-1} + \alpha p^n + \alpha^2 p^{n-1} \leq p(v_n + v_{n-1})$  wird

$$|\varphi_n| \leq \left(1 + \frac{(h-1)d}{e}\right) \{ (|\varphi_1| + p)(v_n + v_{n-1}) + |\varphi_2|(v_{n-1} + v_{n-2}) + \dots \\ + |\varphi_{n-1}|(v_2 + v_1) \} + \frac{1}{2} \{ |\varphi_{n-1}| \cdot |\varphi_1| + \dots + |\varphi_1| \cdot |\varphi_{n-1}| \}.$$

Setzt man

$$(29) \quad |\varphi_1| + \alpha + 2p = q_1, \quad |\varphi_n| = q_n, \quad \left(1 + \frac{(h-1)d}{e}\right)(v_n + v_{n-1}) = \frac{1}{2} l_{n-1}; \\ n = 2, 3, \dots,$$

so wird

$$(30a) \quad q_n \leq \frac{1}{2} \{ q_1 l_{n-1} + \dots + q_{n-1} l_1 \} + \frac{1}{2} \{ q_1 q_{n-1} + \dots + q_{n-1} q_1 \},$$

während aus (28) mit den Bezeichnungen (29) folgt

$$(30b) \quad l_n \leq q_1 l_{n-1} + q_2 l_{n-2} + \dots + q_{n-1} l_1.$$

Beide Gleichungen (30) gelten nur von  $n = 2$  ab. Sie stimmen überein mit den Gleichungen (14). Nur ist hier nach (25a)

$$q_1 = \alpha + 2p + |\varphi_1| \leq \alpha + 2p + \frac{h-1}{e}(\alpha^2 d + \alpha d p) + \alpha \\ = 2\alpha + 2p + \frac{h-1}{e} \alpha d (\alpha + p)$$

und

$$l_1 \leq 2 \left(1 + \frac{(h-1)d}{e}\right) \cdot [\alpha + \alpha^2 + \alpha p + \alpha + \frac{\alpha}{d} \cdot \alpha d + \alpha + \frac{1}{d}(\alpha^2 d + \alpha d p)] \\ = 2 \left(1 + \frac{(h-1)d}{e}\right) \cdot (3\alpha + 3\alpha^2 + 2\alpha p).$$

$$\text{Also ist } q_1 \leq (\alpha + p)(\alpha + 2) \left(1 + \frac{(h-1)d}{e}\right) \text{ und } l_1 \leq 6(\alpha + p)(\alpha + 2) \left(1 + \frac{(h-1)d}{e}\right).$$

Setzt man  $C = 24(\alpha + p)(\alpha + 2) \left(1 + \frac{(h-1)d}{e}\right)$ , so wird gewiß  $q_1 \leq \frac{C}{4}$ ,  $l_1 \leq \frac{C}{4}$  und es folgen mit diesem  $C$  genau wie früher die Abschätzungen (17), (18) und (19).

III. Man hat jetzt zu zeigen, daß aus den Rekursionsformeln (25) die Gleichungen  $A_0 \varphi_n + \dots + A_n \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_n + \dots + \lambda_n \varphi_0$  folgen. Dazu hat man die einzelnen Schritte, die auf die Rekursionsformeln (25) geführt haben, umzukehren; wir gehen darauf nicht weiter ein. Daß das reguläre Element  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  in  $\mathfrak{H}$  liegt und Eigenelement von  $A(\varepsilon)$  ist, zeigt man wie bei Satz 1.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

## § 4.

## Reguläre Formen und halbbeschränkte Operatoren.

In einem dichten Teilraum  $\mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{H}$  sei eine Form  $(uAv)$  erklärt, d. h. jedem Paar von Elementen  $u, v$  aus  $\mathfrak{G}$  sei eindeutig eine (komplexe) Zahl  $(uAv)$  so zugeordnet, daß  $((\alpha u + \alpha' u')Av) = \alpha(uAv) + \alpha'(u'Av)$  für beliebige komplexe Zahlen  $\alpha, \alpha'$  gilt. Die Form heißt *symmetrisch* (oder *hermitesch*), wenn  $(uAv) = \overline{(vAu)}$  ist, wobei der Querstrich den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl bedeutet. Eine symmetrische Form heißt *halbbeschränkt nach unten* mit der unteren Schranke  $m$ , wenn es eine Zahl  $m$  gibt, so daß für alle  $u$  aus  $\mathfrak{G}$  die Ungleichung  $(uAu) \geq m(u, u)$  besteht. Eine nach unten halbbeschränkte Form heißt *abgeschlossen* in  $\mathfrak{G}$ , wenn zu jeder Folge  $u_n$  von Elementen aus  $\mathfrak{G}$ , für die  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} ((u_n - u_m)A(u_n - u_m)) = 0$  und  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} (u_n - u_m, u_n - u_m) = 0$  gilt, ein  $u$  aus  $\mathfrak{G}$  existiert, für das  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((u_n - u)A(u_n - u))$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u, u_n - u) = 0$  ist. Eine in  $\mathfrak{G}$  erklärte symmetrische Form in einen  $\mathfrak{G}$  umfassenden Teilraum  $\tilde{\mathfrak{G}}$  des Gesamtraumes  $\mathfrak{H}$  *fortsetzen*, heißt in  $\tilde{\mathfrak{G}}$  eine symmetrische Form erklären, die in  $\mathfrak{G}$  mit der ursprünglichen Form übereinstimmt. Jeder in einem dichten Teilraum  $\mathfrak{A}$  erklärte Operator  $A$  führt zu der in  $\mathfrak{A}$  erklärten Form  $(Au, v)$ , die symmetrisch ist, wenn  $A$  es ist; der Operator heißt *halbbeschränkt nach unten*, wenn die Form  $(Au, v)$  halbbeschränkt nach unten ist. Im allgemeinen ist die in  $\mathfrak{A}$  erklärte, nach unten halbbeschränkte Form  $(Au, v)$  nicht abgeschlossen. Sie kann aber immer zu einer abgeschlossenen Form  $(uAv)$  fortgesetzt werden, die in einem  $\mathfrak{A}$  umfassenden Raum  $\mathfrak{G}$  erklärt ist. Diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt, wenn verlangt wird, daß zu jedem  $u$  aus  $\mathfrak{G}$  eine Folge  $u_n$  aus  $\mathfrak{A}$  existieren soll, für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u, u_n - u) = 0$  und  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} (A(u_n - u_m), u_n - u_m) = 0$  ist. Man nennt  $(uAv)$  in  $\mathfrak{G}$  die durch *Abschließen entstandene (abgeschlossene) Fortsetzung* der Form  $(Au, v)$  in  $\mathfrak{A}$ . Häufig betrachtet man diese Fortsetzung  $(uAv)$  nicht im ganzen Raum  $\mathfrak{G}$ , sondern in einem Teilraum  $\mathfrak{G}'$  von  $\mathfrak{G}$ , der  $\mathfrak{A}$  enthält.

Bedeutet z. B.  $\mathfrak{H}$  den (reellen) Hilbertschen Raum aller in  $0 \leq x \leq 1$  (reellen) Lebesgue-quadratisch integrierbaren Funktionen  $u(x)$  mit  $(u, v) = \int_0^1 u v dx$  und ist  $\mathfrak{A}$  die Gesamtheit aller in  $0 \leq x \leq 1$  zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $u(x)$  mit  $u(0) = u(1) = 0$  und  $Au = -u''$ , so ist  $(Au, v) = \int_0^1 u'v' dx$  für  $u, v$  aus  $\mathfrak{A}$ . Diese Form kann durch Abschließen fortgesetzt werden auf die Gesamtheit  $\mathfrak{G}$  aller in  $0 \leq x \leq 1$  totalstetigen Funktionen

$u(x)$  mit  $\int_0^1 u'^2 dx < \infty$  und  $u(0) = u(1) = 0$ . Häufig wird man sich beschränken, diese Form im Raum  $\mathfrak{G}'$  aller in  $0 \leq x \leq 1$  stetig differenzierbaren Funktionen mit  $u(0) = u(1) = 0$  zu betrachten. Natürlich kann  $(Au, v)$  auch noch auf Räume  $\mathfrak{G}$  fortgesetzt werden, die nicht in  $\mathfrak{G}$  enthalten sind, wenn man auf Fortsetzung durch *Abschließen* verzichtet. Ein solcher Raum  $\mathfrak{G}$  wäre in unserem Beispiel der Raum aller in  $0 \leq x \leq 1$  stetig differenzierbaren Funktionen  $u(x)$  und die gewünschten (unendlich vielen) Fortsetzungen wären die Formen  $\int_0^1 u'v' dx + au(1) \cdot v(1)$ , wo  $a$  eine willkürliche Konstante ist<sup>\*)</sup>.

Bei den klassischen Differentialoperatoren bedeutet, wie man sieht, der Übergang vom Operator  $A$  zur Form  $(Au, v)$  soviel wie der Übergang vom Differentialgleichungsproblem  $Au = \lambda u$  zum Variationsproblem  $(Au, u) = \text{Min}$ ,  $(u, u) = 1$ . Die nach unten halbbeschränkten Operatoren sind gerade diejenigen Differentialoperatoren, deren Variationsproblem eine endliche untere Grenze besitzt.

Satz 3. In

$$(31) \quad (uA, v) = \sum_{r=0}^{\infty} e^r (uA, v)$$

seien die  $(uA, v)$  in einem Teilraum  $\mathfrak{G}'$  des Gesamtraumes  $\mathfrak{S}$  erklärte symmetrische Formen, für die es nichtnegative Zahlen  $a, b, p$  derart gibt, daß

$$(32) \quad |(uA, u)| \leq p^{r-1} \{a(u, u) + b(uA_0 u)\}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

gilt. In einem Teilraum  $\mathfrak{A}'$  von  $\mathfrak{G}'$  sei ein symmetrischer, durch *Abschließen* zu einem selbstadjungierten fortsetzbarer Operator  $A_0$  erklärt, für den  $(A_0 u, v) = (uA_0 v)$  ist, wenn  $u, v$  zu  $\mathfrak{A}'$  gehören. Die Form  $(uA_0 v)$  und daher auch der Operator  $A_0$  seien in  $\mathfrak{A}'$  halbbeschränkt nach unten. Der Raum, in dem  $(A_0 u, v)$  durch *Abschließen* zur abgeschlossenen Form  $(uA_0 v)$  fortgesetzt werden kann, heiße  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$  sei in ihm enthalten. Dann gilt:

I. Durch (31) ist für eine Umgebung von  $\varepsilon = 0$  in  $\mathfrak{G}'$  eine symmetrische Form  $(uA, v)$  erklärt. Die Formen  $(uA, v)$  und damit auch  $(uA, v)$  können auf  $\mathfrak{G}$  fortgesetzt werden; die Fortsetzung ist eindeutig, wenn verlangt wird, daß mit drei nichtnegativen Zahlen  $a', b', p'$  und für alle  $u$  aus  $\mathfrak{G}$  die Ungleichungen (32) gelten sollen.

II. In einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  gibt es einen und nur einen regulären selbstadjungierten Operator  $A(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  mit den Eigenschaften: 1.  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  ist

<sup>\*)</sup> Über die hier zusammengestellten Begriffe und Sätze vgl. K. Friedrichs, loc. cit., Anm. 4), insbesondere Math. Annalen 109 (1934), S. 472 und 110 (1935), S. 777.

in  $\mathfrak{G}$  enthalten. 2.  $(A(\varepsilon)u, v) = (uA, v)$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$  und alle  $v$  aus  $\mathfrak{G}'$ .  
 3.  $\mathfrak{H}(0)$  enthält  $\mathfrak{H}'$  und es ist  $A(0)u = A_0u$  für  $u$  aus  $\mathfrak{H}'$ .

III. Wenn es in einem dichten Teilraum  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$  von  $\mathfrak{G}$  einen Operator  $\tilde{A}(\varepsilon)$  gibt, für den  $(\tilde{A}(\varepsilon)u, v) = (uA, v)$  ist für  $u$  aus  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ ,  $v$  aus  $\mathfrak{G}'$ , dann ist  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$  enthalten und  $\tilde{A}(\varepsilon)u = A(\varepsilon)u$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ .

Beweis. I. Setzt man für  $u, v$  aus  $\mathfrak{G}$

$$(33) \quad [u, v] = (u, v) + a(u, v) + b(uA_0v), \quad \|u\| = +\sqrt{[u, u]},$$

so wird  $[u, u] \geq (u, u)$ , ferner  $|(uA, u)| \leq [u, u] \cdot p'^{-1}$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{G}'$ , woraus wegen der Symmetrie der Formen  $(uA, v)$  in bekannter Schlußweise auch  $|(uA, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot p'^{-1}$  folgt. Um nun  $(uA, v)$  auch in  $\mathfrak{G}$  zu erklären, seien  $u, v$  beliebige Elemente aus  $\mathfrak{G}$ . Dann gibt es Folgen  $u_n, v_n$  aus  $\mathfrak{G}'$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\| = 0$ . Aus

$$\begin{aligned} |(u_nA, v_n) - (u_mA, v_m)| &\leq |((u_n - u_m)A, v_n)| + |(u_mA, (v_n - v_m))| \\ &\leq p'^{-1} (\|u_n - u_m\| \cdot \|v_n\| + \|u_m\| \cdot \|v_n - v_m\|) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

wenn  $n, m \rightarrow \infty$ , folgt die Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_nA, v_n)$ . Hätte man irgendein anderes Folgenpaar  $u_n^*, v_n^*$  gewählt mit  $\|u_n^* - u\| \rightarrow 0, \|v_n^* - v\| \rightarrow 0$ , so wäre  $\|u_n - u_n^*\| \rightarrow 0$  und  $\|v_n - v_n^*\| \rightarrow 0$ , also auch  $|(u_n^*A, v_n^*) - (u_nA, v_n)| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Man hat also  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_nA, v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^*A, v_n^*)$  und ist daher berechtigt  $(uA, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_nA, v_n)$  zu definieren. Damit ist eine Fortsetzung der Formen  $(uA, v)$  auf  $\mathfrak{G}$  gewonnen, für die offenbar  $|(uA, u)| \leq p'^{-1} \cdot [u, u]$  gilt. Gäbe es noch eine andere Fortsetzung  $(u\dot{A}, v)$ , für die die Ungleichungen (32) auch, aber vielleicht mit anderen nicht-negativen Zahlen  $a^*, b^*, p^*$  gelten, also  $|(u\dot{A}, u)| \leq (p^*)'^{-1} [u, u]^*$  mit  $[u, v]^* = (1 + a^*)(u, v) + b^*(uA_0v)$ , so würde es zu jedem  $u, v$  aus  $\mathfrak{G}$  Folgen  $u_n, v_n$  geben, so daß  $\|u_n - u\|^* \rightarrow 0, \|v_n - v\|^* \rightarrow 0$  und  $\|u_n - u\| \rightarrow 0, \|v_n - v\| \rightarrow 0$  gelten würde. Dann wäre  $|(u\dot{A}, v) - (u_n\dot{A}, v_n)| \leq (p^*)'^{-1} \cdot (\|u - u_n\|^* \|v\|^* + \|u_n\|^* \|v - v_n\|^*)$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n\dot{A}, v_n) = (u\dot{A}, v)$ . Wegen  $(u_n\dot{A}, v_n) = (u_nA, v_n)$  folgt daraus  $(uA, v) = (u\dot{A}, v)$ . — Damit ist auch  $(uA, v) = \sum_{r=0}^{\infty} (uA, v) \varepsilon^r$  für  $|\varepsilon| < \frac{1}{p}$  als symmetrische Form in  $\mathfrak{G}$  erklärt bzw. für alle  $\varepsilon$ , wenn  $p = 0$ .

II. Für das Folgende setzen wir  $b > 0$  voraus; das ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil  $A_0$  nach unten halbbeschränkt ist und man daher in (32) immer  $b$  vergrößern darf, wenn man gleichzeitig  $a$  geeignet vergrößert.

Betrachtet man  $\mathfrak{G}$  als einen Hilbertschen Raum mit der durch  $[u, v]$  bestimmten Metrik <sup>9)</sup>, so sind die  $(uA, v)$  in  $\mathfrak{G}$  erklärte Formen, die im Sinne der neuen Metrik wegen  $|(uA, u)| \leq p^{r-1} \cdot [u, u]$  beschränkt sind; wir sagen kurz, sie seien  $\mathfrak{G}$ -beschränkt. Also gibt es nach einem bekannten Satz  $\mathfrak{G}$ -beschränkte und  $\mathfrak{G}$ -symmetrische Operatoren  $H$ , (deren Wertebereich in  $\mathfrak{G}$  liegt), für die

$$(34) \quad (uA, v) = [H, u, v], \quad u, v \text{ aus } \mathfrak{G}; \quad v = 1, 2, \dots$$

gilt; und zwar ist

$$\|H, u\| \leq p^{r-1} \|u\|, \quad [H, u, v] = [u, H, v].$$

Setzt man

$$(35) \quad A = 1 + a + bA_0, \quad R = A^{-1} \quad 10)$$

und

$$(36) \quad RA_0 = H_0,$$

so wird wegen  $|(uA_0, u)| \leq \frac{a+1}{b} [u, u]$  offenbar  $|[H_0u, u]| = |(uA_0, u)| \leq \frac{a+1}{b} [u, u]$ . Also ist auch  $H_0$   $\mathfrak{G}$ -beschränkt (und  $\mathfrak{G}$ -symmetrisch). Offenbar ist

$$(37) \quad (uA, v) = \sum_{r=0}^{\infty} [H, u, v] \varepsilon^r.$$

Mit

$$(38) \quad H = H_0 + \frac{a+1}{b} \cdot R$$

wird  $[Hu, u] = (A_0u, u) + \frac{a+1}{b} (u, u) = \frac{1}{b} [u, u]$ , d. h.  $H = \frac{1}{b}$ ; also besitzt  $H$  in  $\mathfrak{G}$  eine beschränkte Reziproke. Da  $H(\varepsilon) = H + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots$  ein  $\mathfrak{G}$ -beschränkter,  $\mathfrak{G}$ -symmetrischer Operator ist, so besitzt  $H(\varepsilon)$  nach Hilfssatz 4 der dritten Mitteilung eine  $\mathfrak{G}$ -reguläre,  $\mathfrak{G}$ -beschränkte Reziproke  $B(\varepsilon)$ . Setzt man  $R(\varepsilon) = B(\varepsilon)R$ , so gilt für alle  $u$  aus  $\mathfrak{G}$

$$(B(\varepsilon)Ru, B(\varepsilon)Ru) \leq [B(\varepsilon)Ru, B(\varepsilon)Ru] \leq k[Ru, Ru] = k(u, Ru) \leq k(u, u).$$

Also ist  $R(\varepsilon)$  sogar im gewöhnlichen Sinne beschränkt; desgleichen zeigt sich, daß  $R(\varepsilon)$  im gewöhnlichen Sinne in  $\mathfrak{H}$  regulär und symmetrisch ist. Es ist  $H(\varepsilon) - \frac{a+1}{b} R = H_0 + \varepsilon H_1 + \dots$ , also  $[H(\varepsilon)u, v] - \frac{a+1}{b} (u, v) = (uA, v)$ . Setzt man darin  $R(\varepsilon)u = B(\varepsilon)Ru$  für  $u$ , so erhält man

$$(39) \quad [Ru, v] - \frac{a+1}{b} (R(\varepsilon)u, v) = (R(\varepsilon)uA, v),$$

$$(u, v) = \frac{a+1}{b} (R(\varepsilon)u, v) + (R(\varepsilon)uA, v).$$

<sup>9)</sup> Darüber K. Friedrichs, loc. cit., Anm. <sup>4)</sup>, insbesondere Math. Annalen 110 (1935), S. 777.

<sup>10)</sup> Man beachte, daß  $A$  zugleich mit  $A_0$  in einem in  $\mathfrak{G}$  enthaltenen Teilraum  $\mathfrak{H}$  selbstadjungiert ist.

Wenn also für ein  $u$  gilt  $R(\varepsilon)u = 0$ , so ist  $(u, v) = 0$ , also  $u = 0$ . Demnach bildet  $R(\varepsilon)$  den Raum  $\mathfrak{H}$  einindeutig auf einen Teilraum  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  ab, der in  $\mathfrak{G}$  enthalten ist. Die Reziproke  $R^{-1}(\varepsilon)$  ist also in  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  regulär und selbstadjungiert (Definition 2 der dritten Mitteilung). Dasselbe gilt für

$$(40) \quad A(\varepsilon) = R^{-1}(\varepsilon) - \frac{a+1}{b}.$$

Aus (39) folgt  $(R^{-1}(\varepsilon)u, v) - \frac{a+1}{b}(u, v) = (uA, v)$ , also  $(A(\varepsilon)u, v) = (uA, v)$ . Insbesondere ist  $(A(0)u, v) = (uA_0v) = (A_0u, v)$ ,  $A(0)u = A_0u$ , wenn  $u$  in  $\mathfrak{A}'$ . Damit ist die Existenz des in der Behauptung II von Satz 3 erklärten regulären, selbstadjungierten Operators  $A(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  nachgewiesen. Zum Beweis der Eindeutigkeit werde die Existenz eines zweiten regulären, selbstadjungierten Operators  $\tilde{A}(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  mit den behaupteten Eigenschaften angenommen. Wegen  $\tilde{A}(0) = A_0$  besitzen  $\tilde{A}(0) + \frac{a+1}{b}$  und  $A(0) + \frac{a+1}{b}$  beide dieselbe beschränkte Reziproke  $R_0$ . Nach Satz 1 der dritten Mitteilung besitzt daher  $\tilde{A}(\varepsilon) + \frac{a+1}{b}$  eine reguläre beschränkte Reziproke  $\tilde{R}(\varepsilon)$ . Aus  $(\tilde{A}(\varepsilon)u, v) = (uA, v)$  folgt  $(\tilde{A}(\varepsilon)\tilde{R}(\varepsilon)u, v) = (\tilde{R}(\varepsilon)uA, v)$ , also

$$(u, v) - \frac{a+1}{b}(\tilde{R}(\varepsilon)u, v) = (\tilde{R}(\varepsilon)uA, v)$$

für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}$  und  $v$  aus  $\mathfrak{G}$ . Setzt man  $D(\varepsilon) = \tilde{R}(\varepsilon) - R(\varepsilon)$ , so wird  $0 = \frac{a+1}{b}(D(\varepsilon)u, v) + (D(\varepsilon)uA, v)$  oder

$$(41) \quad 0 = \frac{a+1}{b}(D(\varepsilon)u, D(\varepsilon)u) + (D(\varepsilon)uA, D(\varepsilon)u); \quad u \text{ aus } \mathfrak{H}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b}(u, u) + (uA, u) &= \frac{a+1}{b}(u, u) + (uA_0u) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r (uA, u) \\ &\geq \frac{(a+1)(u, u) + b(uA_0u)}{b} - \sum_{r=1}^{\infty} |\varepsilon|^r p^{r-1} \{(u, u) + a(u, u) + b(uA_0u)\} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{(a+1)(u, u) + b(uA_0u)}{b} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{b} (u, u) \end{aligned}$$

für genügend kleine  $|\varepsilon|$ . Setzt man hier  $D(\varepsilon)u$  für  $u$  und berücksichtigt (41), so erhält man  $D(\varepsilon) = 0$ , d. h. die gewünschte Eindeutigkeit.

III. Wenn es in einem dichten Teilraum  $\tilde{\mathfrak{A}}(\varepsilon)$  von  $\mathfrak{G}$  einen Operator  $\tilde{A}(\varepsilon)$  gibt, für den  $(\tilde{A}(\varepsilon)u, v) = (uA, v)$  ist für alle  $u$  aus  $\tilde{\mathfrak{A}}(\varepsilon)$  und alle  $v$  aus  $\mathfrak{G}'$ , dann gilt diese Gleichung zunächst auch für alle  $v$  aus  $\mathfrak{G}$  und daher auch für alle  $v$  aus  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ . Sei nun  $u$  irgendein festes Element aus  $\tilde{\mathfrak{A}}(\varepsilon)$ . Dann ist  $(uA, v) = (u, A(\varepsilon)v)$  für jedes  $v$  aus  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ , also  $(\tilde{A}(\varepsilon)u, v) = (u, A(\varepsilon)v)$  für

alle  $v$  aus  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ . Da  $A(\varepsilon)$  selbstadjungiert ist, folgt, daß  $u$  in  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$  liegt und daß  $A(\varepsilon)u = \tilde{A}(\varepsilon)u$  ist. D. h. aber  $A(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{H}(\varepsilon)$  ist Fortsetzung von  $\tilde{A}(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{H}(\varepsilon)^{11}$ .

Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

### § 5.

#### Fehlerabschätzungen.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 3 lassen sich Fehlerabschätzungen für die Näherungen von Eigenwerten und Eigenelementen angeben, die den in Satz 1 gegebenen analog sind. Ein wesentlicher Unterschied ist aber dieser. Wir werden nicht eine Fehlerabschätzung für  $|\varphi(\varepsilon) - (\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots + \varepsilon^n\varphi_n)|$ , sondern für  $\|\varphi(\varepsilon) - (\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots + \varepsilon^n\varphi_n)\|$  geben, schätzen also nicht mit der ursprünglichen Metrik in  $\mathfrak{H}$ , sondern mit der durch (33) erklärten Metrik in  $\mathfrak{G}$  ab.

Es sei also  $\lambda_0$  ein isolierter einfacher Eigenwert von  $A_0$ , für den die Voraussetzungen 3 und 4 des Satzes 1 erfüllt sind. Dann müssen zunächst die Rekursionsformeln (3) geeignet interpretiert werden, weil ja Operatoren  $A_n$  jetzt gar nicht mehr vorhanden sind. In (3b) wird man an Stelle von  $(A_n u, \varphi_0)$  einfach  $(u A_n \varphi_0)$  setzen können. In (3c) aber müssen die Operatoren  $R_0 A_n$  erst geeignet definiert werden. Nun war in  $\mathfrak{G}$  durch (34) erklärt  $[H_n u, v] = (u A_n v)$ , also [vgl. (35)] formal  $(A H_n u, v) = (u A_n v)$ . Man wird daher an Stelle der Operatoren  $A_n$  formal zu setzen haben  $A H_n$ , also  $R_0 A H_n$  an Stelle von  $R_0 A_n$ . Aber  $R_0 A H_n$  ist nicht ohne weiteres auf jedes  $u$  aus  $\mathfrak{G}$  anwendbar, weil man von  $H_n u$  nur weiß, daß es in  $\mathfrak{G}$  liegt, während  $A$  nicht auf ganz  $\mathfrak{G}$ , sondern nur auf einen Teilraum von  $\mathfrak{G}$  anwendbar ist. Wohl aber läßt sich  $R_0 A$  zu einem in  $\mathfrak{G}$  erklärten,  $\mathfrak{G}$ -beschränkten Operator fortsetzen, der mit  $\underline{R_0 A}$  bezeichnet werden soll. Es ist nämlich, wenn  $P_1$  die Spektralschar von  $A_0$  ist,

$$R_0 A u = \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq d'} \frac{b\lambda + a + 1}{\lambda - \lambda_0} dP_1 u,$$

wobei  $d'$  irgendeine positive Zahl kleiner als  $d$  bedeutet.

Also

$$[R_0 A u, R_0 A u] = \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq d'} \frac{(b\lambda + a + 1)^2}{(\lambda - \lambda_0)^2} d(P_1 u, u).$$

Nun ist

$$\left| \frac{b\lambda + a + 1}{\lambda - \lambda_0} \right| = \left| b + \frac{b\lambda_0 + a + 1}{\lambda - \lambda_0} \right| \leq \beta$$

<sup>11)</sup> Nach einer Sprechweise von K. Friedrichs (Anm. <sup>4)</sup>) ist  $A(\varepsilon)$  der maximal zugehörige Operator zur Form  $(u A_\varepsilon v)$ , die in  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen ist, wie man leicht sieht.

mit

$$(42) \quad \beta = \frac{1+a}{d} + b \left(1 + \frac{\lambda_0}{d}\right).$$

Daraus

$$\begin{aligned} [R_0 A u, R_0 A u] &\leq \beta^2 \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq d'} (b\lambda + a + 1) d(P_\lambda u, u) \leq \beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(P_\lambda A u, u) \\ &= \beta^2 [u, u] \end{aligned}$$

oder  $\|R_0 A u\| \leq \beta \|u\|$ . Dies gilt für alle  $u$  aus  $\mathfrak{U}$ . Also kann  $R_0 A$  zu einem in  $\mathfrak{G}$  erklärten Operator  $\underline{R_0 A}$  fortgesetzt werden, dessen Wertebereich in  $\mathfrak{G}$  liegt. Es gilt

$$(43) \quad \|\underline{R_0 A} u\| \leq \beta \|u\|; \quad u \text{ aus } \mathfrak{G}.$$

Da für  $u$  aus  $\mathfrak{U}$  jedenfalls  $\underline{RR_0 A} u = RR_0 A u = R_0 R A u = R_0 u$  gilt und  $\|R_0 u\| \leq \frac{1}{d} \|u\|$  ist, so ist allgemein

$$(44) \quad \underline{RR_0 A} u = R_0 u \quad \text{für } u \text{ in } \mathfrak{G}.$$

Außerdem merken wir

$$(45) \quad \|\underline{R_0 A} H_n u\| \leq \beta \|H_n u\| \leq \beta p^{n-1} \|u\|; \quad n = 1, 2, \dots$$

an. Es ergibt sich also folgende Interpretation der Formeln (3);

$$(46) \quad \begin{aligned} (A_n u, v) &\text{ wird ersetzt durch } (u A_n v) = [H_n u, v] = (H_n u, A v), \\ R_0 A_n &\text{ wird ersetzt durch } \underline{R_0 A} H_n; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Man erhält dadurch an Stelle der Formeln (3) die Rekursionsformeln

$$(47a) \quad \lambda_0 = \lambda; \quad \varphi_0 = \varphi; \quad \lambda_1 = (\varphi_0 A_1 \varphi_0), \quad \varphi_1 = -\underline{R_0 A} H_1 \varphi_0,$$

$$(47b) \quad \begin{aligned} \lambda_n &= (\varphi_{n-1} A_1 \varphi_0) + \dots + (\varphi_1 A_{n-1} \varphi_0) + (\varphi_0 A_n \varphi_0) \\ &\quad - \{\lambda_1 (\varphi_{n-1}, \varphi_0) + \dots + \lambda_{n-1} (\varphi_1, \varphi_0)\}, \end{aligned}$$

$$(47c) \quad \begin{aligned} \varphi_n &= -\frac{1}{2} \{(\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_1, \varphi_{n-1})\} \varphi_0 + \lambda_1 R_0 \varphi_{n-1} + \dots \\ &\quad + \lambda_{n-1} R_0 \varphi_1 - (\underline{R_0 A} H_1 \varphi_{n-1} + \dots + \underline{R_0 A} H_n \varphi_0); \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Offensichtlich liegen alle  $\varphi_n$  in  $\mathfrak{G}$ . Setzt man

$$(48) \quad \|\varphi_0\| = x, \quad x^2 = 1 + a + b\lambda_0,$$

so wird

$$(49) \quad |(u A_n \varphi_0)| = |[H_n u, \varphi_0]| \leq p^{n-1} \|u\| \cdot x.$$

Also wird

$$(50) \quad \begin{aligned} |\lambda_n| &\leq \|\varphi_{n-1}\| p^0 x + \dots + \|\varphi_1\| p^{n-2} x + x^2 p^{n-1} \\ &\quad + |\lambda_1| \cdot \|\varphi_{n-1}\| x + \dots + |\lambda_{n-1}| \cdot \|\varphi_1\| x \end{aligned}$$

und wegen (45)

$$(51) \quad \|\varphi_n\| \leq \frac{1}{2} \{ \|\varphi_{n-1}\| \cdot \|\varphi_1\| + \dots + \|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_{n-1}\| \} \kappa \\ + \frac{|\lambda_1|}{d} \|\varphi_{n-1}\| + \dots + \frac{|\lambda_{n-1}|}{d} \|\varphi_1\| + \|\varphi_{n-1}\| p^0 \beta + \dots \\ + \|\varphi_1\| p^{n-2} \beta + p^{n-1} \beta \kappa.$$

In (50) und (51) wird

$$(52) \quad \|\varphi_n\| \kappa = \pi_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

gesetzt, außerdem wird (50) durch  $d$  dividiert und danach wird auf beiden Seiten  $\beta \cdot p^{n-1}$  hinzugefügt. Man erhält

$$(50a) \quad \frac{|\lambda_n|}{d} + \beta p^{n-1} \leq \pi_{n-1} \left( \frac{|\lambda_1|}{d} + \frac{p^0}{d} \right) + \dots + \pi_1 \left( \frac{|\lambda_{n-1}|}{d} + \frac{p^{n-2}}{d} \right) \\ + \left( \frac{\kappa^2}{d} + \beta \right) p^{n-1}.$$

Setzt man

$$(52a) \quad \frac{1}{2} l_n = \frac{|\lambda_n|}{d} + \beta p^{n-1}; \quad n = 1, 2, \dots$$

und beachtet  $\frac{1}{d} \leq \beta$ , sowie  $\left( \frac{\kappa^2}{d} + \beta \right) p^{n-1} \leq 2\beta p^{n-1} \leq \left( \frac{|\lambda_{n-1}|}{d} + p^{n-2} \beta \right) \cdot 2p$ , dann wird

$$(50b) \quad l_n \leq \pi_{n-1} l_1 + \dots + \pi_1 l_{n-1} + 2p l_{n-1}.$$

Aus (51) ergibt sich nach Multiplikation mit  $\kappa$  und Beachtung von

$$p^{n-1} \beta \kappa^2 \leq \kappa^2 p \left( \frac{|\lambda_{n-1}|}{d} + p^{n-2} \beta \right) = \kappa^2 p \cdot \frac{1}{2} l_{n-1}$$

die Abschätzung

$$(51a) \quad \pi_n \leq \frac{1}{2} (\pi_{n-1} \pi_1 + \dots + \pi_1 \pi_{n-1}) + \frac{1}{2} \pi_{n-1} l_1 + \dots + \frac{1}{2} \pi_1 l_{n-1} \\ + \kappa^2 p \cdot \frac{1}{2} l_{n-1}.$$

Setzt man

$$q_1 = \pi_1 + 2p\kappa^2 = \|\varphi_1\| \cdot \kappa + 2p\kappa^2; \quad q_n = \pi_n = \|\varphi_n\| \kappa; \quad n = 2, 3, \dots,$$

so wird schließlich

$$(53) \quad l_n \leq q_{n-1} l_1 + \dots + q_1 l_{n-1}, \\ q_n \leq \frac{1}{2} (q_{n-1} l_1 + \dots + q_1 l_{n-1}) + \frac{1}{2} (q_{n-1} q_1 + \dots + q_1 q_{n-1}).$$

Außerdem ist

$$(53a) \quad |\lambda_1| \leq \kappa^2, \quad \|\varphi_1\| \leq \beta \kappa.$$

Also wird

$$l_1 = 2 \left( \frac{|\lambda_1|}{d} + \beta p^0 \right) \leq 2 \left( \frac{\kappa^2}{d} + \beta \right) = 2 \left( \frac{1+a+b\lambda_0}{d} + \frac{1+a+b\lambda_0}{d} + b \right), \\ q_1 \leq \beta \kappa^2 + 2p\kappa^2 = \left( \frac{1+a+b\lambda_0}{d} + b + 2p \right) \kappa^2.$$

Setzt man

$$(54) \quad C = 16 d \cdot \left( 2p + b + \frac{1+a+b\lambda_0}{d} \right)^2,$$

so wird

$$(55) \quad q_1 \leq \frac{1}{2} C, \quad l_1 \leq \frac{1}{2} C.$$

Aus (53) und (55) folgt nach S. 363

$$q_n \leq \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n, \quad l_n \leq \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Also wegen

$$(56) \quad |\lambda_n| \leq \frac{d}{2} l_n, \quad \|\varphi_n\| = \frac{\pi_n}{\pi} \leq \frac{q_n}{\pi} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$|\lambda_n| \leq \frac{d}{2} \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n, \quad \|\varphi_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{1+a+b\lambda_0}} \cdot \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{n} \right) \right| C^n.$$

Schließlich die Fehlerabschätzung

$$(57) \quad \|\varphi(\varepsilon) - (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots + \varepsilon^n \varphi_n)\| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+a+b\lambda_0}} (\varepsilon C)^{n+1};$$

$$|\lambda(\varepsilon) - (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots + \varepsilon^n \lambda_n)| \leq \frac{d}{4} (\varepsilon C)^{n+1};$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

für  $|\varepsilon| < \frac{1}{C}$ .

Die Konvergenz von  $\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots = \lambda(\varepsilon)$  und  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots = \varphi(\varepsilon)$  ist also gesichert und der Konvergenzradius ist mindestens  $\frac{1}{C}$ . Die Elemente  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  gehören zu  $\mathfrak{G}$ , also auch  $\varphi(\varepsilon)$ . Bleibt zu zeigen, daß  $\varphi(\varepsilon)$  zum Definitionsbereich des in Satz 3 erklärten selbstadjungierten gestörten Operators  $A(\varepsilon)$  gehört, die Eigenwertgleichung  $A(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)$  befriedigt und normiert \*) ist. Dazu wende man auf beiden Seiten von (47c) den Operator  $(A_0 - \lambda_0) R$  an und benutze  $(A_0 - \lambda_0) R R_0 u = R (A_0 - \lambda_0) R_0 u = R u - (u, \varphi_0) R \varphi_0$ , sowie wegen (44)  $(A_0 - \lambda_0) R \widetilde{R_0 A} H, u = (A_0 - \lambda_0) R_0 H, u = H, u - (H, u, \varphi_0) \varphi_0$ . Dann ergibt sich

$$(58) \quad A_0 R \varphi_n - \lambda_0 R \varphi_n = \lambda_1 R \varphi_{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} R \varphi_1$$

$$- ((\lambda_1 \varphi_{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \varphi_1), \varphi_0) R \varphi_0$$

$$- (H_1 \varphi_{n-1} + \dots + H_n \varphi_0)$$

$$+ ((H_1 \varphi_{n-1} + \dots + H_n \varphi_0), \varphi_0) \varphi_0.$$

Nach (47b) und (46) ist

$$\lambda_n = (H_1 \varphi_{n-1}, A \varphi_0) + \dots + (H_n \varphi_0, A \varphi_0)$$

$$- (\lambda_1 \varphi_{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \varphi_1, \varphi_0),$$

$$\lambda_n \cdot R \varphi_0 = (H_1 \varphi_{n-1}, \varphi_0) \varphi_0 + \dots + (H_n \varphi_0, \varphi_0) \varphi_0$$

$$- (\lambda_1 \varphi_{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \varphi_1, \varphi_0) R \varphi_0.$$

Dies in (58) verwendet, gibt

$$(59) A_0 R \varphi_n + H_1 \varphi_{n-1} + \dots + H_n \varphi_0 = \lambda_0 R \varphi_n + \lambda_1 R \varphi_{n-1} + \dots + \lambda_n R \varphi_0.$$

Diese Formeln gelten zunächst für  $n = 2, 3, \dots$ . Aber auch für  $n = 1$  sind sie richtig, wie aus (47a) wegen  $A_0 R \varphi_1 - \lambda_0 R \varphi_1 = -H_1 \varphi_0 + (H_1 \varphi_0, \varphi_0) \varphi_0 = -H_1 \varphi_0 + \lambda_1 R \varphi_0$  folgt. Schließlich ist auch  $A_0 R \varphi_0 = \lambda_0 R \varphi_0$ .

Der Operator  $A_0 R + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots$  ist in  $\mathfrak{G}$  im Sinne der  $\mathfrak{G}$ -Metrik ein regulärer beschränkter Operator und  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  ist in  $\mathfrak{G}$  ein reguläres Element. Nach Hilfssatz 7 der ersten Mitteilung ist daher wegen (59) auch  $(A_0 R + \varepsilon H_1 + \dots) \varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) R \varphi(\varepsilon)$ . Nach (37) ist für alle  $u, v$  aus  $\mathfrak{G}$  gültig  $(u A, v) = [(H_0 + \varepsilon H_1 + \dots) u, v]$ . Dabei ist nach (36)  $H_0 u = R A_0 u = A_0 R u$  zunächst für diejenigen  $u$  aus  $\mathfrak{G}$ , für die  $A_0$  erklärt ist, und wegen der  $\mathfrak{G}$ -Beschränktheit von  $H_0$  auch für alle  $u$  aus  $\mathfrak{G}$ . Also  $(u A, \varphi(\varepsilon)) = \lambda(\varepsilon) (u, \varphi(\varepsilon))$ . Sei  $\varepsilon$  jetzt festgehalten, dann ist  $(A(\varepsilon) u, v) = (u A, v)$  für alle  $u$  aus dem Definitionsbereich  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  des selbstadjungierten Operators  $A(\varepsilon)$  und alle  $v$  aus  $\mathfrak{G}$ . Setzt man  $v = \varphi(\varepsilon)$ , so wird  $(A(\varepsilon) u, \varphi(\varepsilon)) = (u A, \varphi(\varepsilon)) = (u, \lambda(\varepsilon) \varphi(\varepsilon))$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ . Daraus folgt wegen der Selbstadjungiertheit von  $A(\varepsilon)$ , daß  $\varphi(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{A}(\varepsilon)$  liegt und daß  $A(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)$  ist.

Übrigens folgt aus (47c), daß  $(\varphi_n, \varphi_0) = -\frac{1}{2} \{(\varphi_{n-1}, \varphi_1) + \dots + (\varphi_1, \varphi_{n-1})\}$  gilt, weil  $(R_0 A H, u, \varphi_0) = [R R_0 A H, u, \varphi_0] = [R_0 H, u, \varphi_0] = [H, u, R_0 \varphi_0] = 0$  ist. Also ist  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$  normiert im Sinne der Definition 1 in § 1 (und nicht etwa im Sinne der  $\mathfrak{G}$ -Metrik).

Es gilt also

**Satz 4.** Für die Form  $(u A, v)$  in  $\mathfrak{G}'$  bzw. in  $\mathfrak{G}$  seien die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt und es sei  $A(\varepsilon)$  der in diesem Satz erklärte reguläre und selbstadjungierte Operator. Es sei  $\lambda_0$  ein einfacher Eigenwert von  $A(0)$  mit dem Eigenelement  $\varphi_0$  und das Spektrum von  $A(0)$  enthalte im Intervall  $\lambda_0 - d < \mu < \lambda_0 + d$  nur den Punkt  $\mu = \lambda_0$ . Dann ist  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$ ,  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$ , wobei die  $\lambda_n, \varphi_n$  sich eindeutig aus den Rekursionsformeln (47) berechnen lassen. Für  $|\varepsilon| < \frac{1}{C}$  mit  $C = 16d \left( 2p + b + \frac{1+a+b\lambda_0}{d} \right)^2$  gelten die Fehlerabschätzungen (57); dabei ist  $\varphi(\varepsilon)$  normiert\*) auf 1.

## § 6.

### Differentialoperatoren.

Die Sätze 1 bis 4 sind so formuliert, daß sie sich unmittelbar auf Differentialoperatoren anwenden lassen. Die einzige Aufgabe, die diese Anwendung erfordert, besteht in der Bestimmung der Zahlen  $a, b, p$ , die in den Ungleichungen (2) und (32) vorkommen und durch die die Größe der Störung abgeschätzt wird; diese soll im folgenden durchgeführt werden.

In den Beispielen 1 und 2 und 3 bedeuten  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $s(x)$  reelle Funktionen, für die  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $s(x)$  in dem endlichen Intervall  $0 \leq x \leq l$  stetig sind. Ferner ist  $p(x) > 0$  in  $0 \leq x \leq l$  und es wird gesetzt

$$p_0 = \min_{0 \leq x \leq l} p(x), \quad q_0 = \min_{0 \leq x \leq l} q(x), \quad s_0 = \max_{0 \leq x \leq l} |s(x)|.$$

Als (reeller) Hilbertscher Raum  $\mathfrak{H}$  wird die Gesamtheit der (reellen) Funktionen  $u(x)$  mit  $\int_0^l u^2 dx < \infty$  gewählt mit dem inneren Produkt  $(u, v) = \int_0^l u v dx$ .

### 1. Beispiel

$$-(p(x) u')' + q(x) u + \varepsilon s(x) u(x) = \lambda u(x); \quad u(0) = u(l) = 0.$$

Der ungestörte Operator  $A_0$  in  $\mathfrak{H}$  ist  $A_0 u = -(p(x) u')' + q(x) u$ , wobei  $\mathfrak{H}$  die Gesamtheit aller in  $0 \leq x \leq l$  zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $u(x)$  mit  $u(0) = u(l) = 0$  ist. Da nach einem klassischen Satz  $A_0$  in  $\mathfrak{H}$  ein vollständiges System von Eigenfunktionen besitzt, ist  $A_0$  zu einem selbstadjungierten Operator abschließbar<sup>2)</sup>. Damit ist Voraussetzung 1

von Satz 1 erfüllt. In  $\mathfrak{H}$  sei  $A_1 u = s(x) u$ . Es ist  $\int_0^l s^2(x) u^2 dx \leq s_0^2 \int_0^l u^2 dx$ ,

also  $|A_1 u| \leq s_0 |u|$  für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}$ . Damit ist Voraussetzung 2 von Satz 1 mit  $p = 0$ ,  $a = s_0$ ,  $b = 0$  erfüllt. Sind  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$  ein vollständiges System von Eigenfunktionen des ungestörten Operators und  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$  die zugehörigen Eigenwerte, dann ist bekanntlich jeder der Eigenwerte  $\lambda^{(v)}$  einfach. (Voraussetzung 4 von Satz 1.) Also konvergieren die gestörten Eigenwerte  $\lambda^{(v)}(\varepsilon) = \lambda^{(v)} + \varepsilon \lambda_1^{(v)} + \dots$  und die gestörten Eigenfunktionen  $\varphi^{(v)}(\varepsilon) = \varphi^{(v)} + \varepsilon \varphi_1^{(v)} + \dots$  (diese im Mittel) mindestens für alle  $\varepsilon$  mit  $|\varepsilon| < \frac{d}{16s_0}$ . Da bekanntlich die  $\lambda^{(v)}$  nicht beliebig dicht aneinander rücken, bleiben die Zahlen  $d$  für alle  $\lambda^{(v)}$  gleichzeitig oberhalb einer festen positiven Zahl  $\delta$ . D. h. es gibt für alle  $\lambda^{(v)}(\varepsilon)$ ,  $\varphi^{(v)}(\varepsilon)$  gleichzeitig Konvergenz in einem Kreis, dessen Radius mindestens  $\frac{\delta}{16s_0}$  beträgt.

### 2. Beispiel.

$$-(p(x) u')' + q(x) u + \varepsilon \frac{s(x)}{x^2} u = \lambda u; \quad u(0) = u(l) = 0.$$

Der ungestörte Operator  $A_0$  in  $\mathfrak{H}$  ist derselbe wie im 1. Beispiel. Da der Operator  $A_1 u = \frac{s(x)}{x^2} u$  nicht auf alle Funktionen von  $\mathfrak{H}$  angewendet werden kann, müssen Satz 3 und Satz 4 herangezogen werden. Wir betrachten die

Form  $(u A_1 v) = (u A_0 v) + \varepsilon (u A_1 v) = \int_0^l (p(x) u' v' + q(x) u v) dx + \varepsilon \int_0^l \frac{s(x)}{x^2} u v dx$ . Es ist offenbar  $(u A_0 v) = (A_0 u, v)$  für  $u, v$  aus  $\mathfrak{H}$  und

es ist  $(u A_1 v) = \int_0^l \frac{s(x)}{x^2} u v dx$  in  $\mathfrak{U}'$  erklärt. Für den in Satz 3 genannten Raum  $\mathfrak{G}'$  wählen wir  $\mathfrak{U}'$ . (Der Raum  $\mathfrak{G}$ , in dem  $\int_0^l (p(x) u' v' + q(x) u v) dx$  abgeschlossen ist, wäre der Raum aller in  $0 \leq x \leq l$  totalstetigen Funktionen mit  $\int_0^l u'^2 dx < \infty$  und  $u(0) = u(l) = 0$ ). Um die Ungleichung (32) zu beweisen, benutze man die für alle  $u$  aus  $\mathfrak{U}'$  geltende Ungleichung  $\int_0^l \frac{u^2}{x^2} dx \leq 4 \int_0^l u'^2 dx$ . Aus ihr folgt  $|(u A_1 u)| \leq 4 s_0 \int_0^l u'^2 dx$ . Andererseits ist  $(u A_0 u) \geq p_0 \int_0^l u'^2 dx + q_0 \int_0^l u^2 dx$ , also

$$(60) \quad \int_0^l u'^2 dx \leq \frac{1}{p_0} (u A_0 u) - \frac{q_0}{p_0} (u, u)$$

und  $\frac{4s_0}{p_0} (u A_0 u) \geq |(u A_1 u)| + \frac{4s_0}{p_0} q_0 \int_0^l u^2 dx$ . In (32) kann man daher  $p = 0$ ,  $b = \frac{4s_0}{p_0}$ ,  $a = \text{Max}(-\frac{4s_0}{p_0} q_0, 0)$  setzen. — Es sind also alle Voraussetzungen von Satz 3 und 4 erfüllt. Mit  $A(\varepsilon)$  in  $\mathfrak{U}(\varepsilon)$  bezeichnen wir den nach Satz 3 zur Form  $(u A_\varepsilon v)$  gehörigen regulären selbstadjungierten Operator. Wie hängt  $A(\varepsilon)$  mit dem ursprünglich gegebenen gestörten Differentialoperator zusammen? Erklärt man z. B.  $\tilde{A}(\varepsilon) u = -(p(x) u')' + q(x) u + \varepsilon \frac{s(x)}{x^2} u$  für alle  $u$  aus dem Raum  $\tilde{\mathfrak{U}}(\varepsilon)$ , der für  $\varepsilon = 0$  mit  $\mathfrak{U}'$  zusammenfallen möge und der für  $\varepsilon \neq 0$  aus denjenigen Funktionen aus  $\mathfrak{U}'$  besteht, für die  $\int_0^l \left(\frac{s(x)}{x^2} u\right)^2 dx < \infty$  ist, dann gilt  $(\tilde{A}(\varepsilon) u, v) = (u A_\varepsilon v)$  für alle  $u$  aus  $\tilde{\mathfrak{U}}(\varepsilon)$  und alle  $v$  aus  $\mathfrak{U}'$ . Es ist dann  $A(\varepsilon)$  eine reguläre selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{A}(\varepsilon)$  (d. h.  $\tilde{\mathfrak{U}}(\varepsilon)$  liegt in  $\mathfrak{U}(\varepsilon)$  und  $A(\varepsilon) u = -(p(x) u')' + q(x) u + \varepsilon \frac{s(x)}{x^2} u$  für  $u$  aus  $\tilde{\mathfrak{U}}(\varepsilon)$ ) und zwar die einzige, für welche  $(A(\varepsilon) u, v) = (u A_\varepsilon v)$  ist. Der Satz 3 behauptet aber nicht, daß  $A(\varepsilon)$  die einzige reguläre selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{A}(\varepsilon)$  ist; allerdings könnte für eine andere Fortsetzung  $\hat{A}(\varepsilon)$  nicht  $(\hat{A}(\varepsilon) u, v) = (u A_\varepsilon v)$  gelten.

Nachdem  $p$ ,  $a$ ,  $b$  bestimmt sind, ergibt Satz 4 unmittelbar die Fehlerabschätzungen für die Näherungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen der gestörten Form  $(u A_\varepsilon v)$ , d. h. des Operators  $A(\varepsilon)$ . Für die Eigenfunktionen wird dabei nicht nur eine Abschätzung im Mittel angegeben, sondern es wird nach Satz 4 sogar  $\|\varphi(\varepsilon) - (q_0 + \varepsilon q_1 + \dots + \varepsilon^n q_n)\|$  abgeschätzt,

wobei  $\|u\| = +\sqrt{b(A_0 u, u) + (a+1)(u, u)}$  ist. Das heißt aber, daß sogar das Maximum des (gewöhnlichen) absoluten Betrages von  $\varphi(\varepsilon) - (\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots + \varepsilon^n \varphi_n)$  abgeschätzt wird, weil man leicht zeigt, daß  $\max_{0 \leq x \leq l} |u(x)| \leq \gamma \cdot \|u\|$  ist für alle Funktionen  $u$  aus  $\mathfrak{G}$ ; dabei hängt  $\gamma$  nur von  $p_0, q_0, s_0$  ab. Die Konvergenz von  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots$  ist also eine *gleichmäßige* in  $x$  im ganzen Intervall  $0 \leq x \leq l$ .

### 3. Beispiel.

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda u; \quad u(0) = 0, \quad u'(l) + \varepsilon u(l) = 0.$$

Wir betrachten die Form  $(u, A_0 v) = (u, A_0 v) + \varepsilon(u, A_1 v) = \int_0^l (p(x)u'v' + q(x)uv) dx + \varepsilon u(l)v(l)$ . Zu  $\mathfrak{H}'$  zählen wir alle  $u$  mit stetigem  $u, u', u''$  in  $0 \leq x \leq l$  und  $u(0) = 0, u'(l) = 0$ ; zu  $\mathfrak{G}'$  alle  $u$  mit denselben Bedingungen bis auf die Bedingung  $u'(l) = 0$ . Offenbar ist  $(u, A_1 v)$  in  $\mathfrak{G}'$  erklärt. Wegen  $u(l) = \int_0^l u' dx, \quad u^2(l) \leq l \int_0^l u'^2 dx$  ist nach (60)  $|(u, A_1 u)| \leq \frac{l}{p_0} (u, A_0 u) - \frac{lq_0}{p_0} (u, u)$ . Also gilt (32) mit  $a = \max(0, -\frac{lq_0}{p_0}), \quad b = \frac{l}{p_0}, \quad p = 0$ .

### 4. Beispiel.

$$-\Delta u - \frac{c}{r}u + \varepsilon s(x, y, z)u = \lambda u.$$

Als (reellen) Hilbertschen Raum wählen wir die Gesamtheit der (reellen) Funktionen  $u(x, y, z)$  mit  $\iiint_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\tau < \infty$ ;  $(u, v) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} uv d\tau$ . Es sei  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $c$  eine Konstante und  $s(x, y, z)$  eine Funktion der Gestalt

$$(61) \quad s(x, y, z) = s_1(x, y, z) + \frac{s_2(x, y, z)}{r} + \frac{s_3(x, y, z)}{r^2},$$

wobei  $s_1, s_2, s_3$  für alle  $x, y, z$  stetige, beschränkte Funktionen sind:

$$(62) \quad |s_1| \leq \sigma, \quad |s_2| \leq \sigma, \quad |s_3| \leq \sigma.$$

Der ungestörte Schrödinger-Operator  $A_0 u = -\Delta u - \frac{c}{r}u$  sei erklärt für die Gesamtheit  $\mathfrak{H}'$  aller Funktionen  $u$ , für die gilt: Bezeichnet  $\Gamma$  den Gesamt-raum, wenn  $c = 0$  ist, sonst den Gesamt-raum ohne den Punkt  $x = y = z = 0$ , dann sei  $u$  mit seinen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich stetig in  $\Gamma$  und die Integrale  $\iiint_{\Gamma} (\Delta u + \frac{c}{r}u)^2 d\tau, \quad \iiint_{\Gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau, \quad \iiint_{\Gamma} \frac{c u^2}{r} d\tau, \quad \iiint_{\Gamma} u^2 d\tau$  seien endlich. Nach K. Friedrichs<sup>12)</sup> ist  $A_0$  in  $\mathfrak{H}'$

<sup>12)</sup> loc. cit., Anm. 4), insbesondere Math. Annalen 109 (1934), S. 690.

durch Abschließen zu einem selbstadjungierten Operator fortsetzbar (ja es liegen sogar alle Eigenfunktionen endlicher Intervalle von  $A_0$  bereits in  $\mathfrak{H}$ ). Außerdem gilt in  $\mathfrak{H}$  die Greensche Umformung  $(A_0 u, v) = \iiint (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z - \frac{c}{r} u v) d\tau$ . Nun gilt<sup>13)</sup> für alle  $u$  aus  $\mathfrak{H}$  die Ungleichung  $\iiint \frac{u^2}{r^2} d\tau \leq 4 \iiint (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau$ . Für  $u, v$  aus  $\mathfrak{H}$  ist  $\iiint s u v d\tau = (u A_1 v)$  sinnvoll. Die gestörte Form  $(u A_\varepsilon v) = (A_0 u, v) + \varepsilon (u A_1 v)$  ist daher in  $\mathfrak{H}$  erklärt (wir setzen  $\mathfrak{H}' = \mathfrak{G}'$ ). Aus  $\frac{|c|}{r} \leq \frac{1}{8} \frac{1}{r^2} + 2 c^2$  folgt  $(A_0 u, u) \geq \iiint (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau - \frac{1}{8} \iiint \frac{u^2}{r^2} d\tau - 2 c^2 \iiint u^2 d\tau$  und daraus

$$(63) \quad (A_0 u, u) \geq \frac{1}{2} \iiint (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau - 2 c^2 (u, u).$$

Danach ist  $(A_0 u, u)$  nach unten halbbeschränkt mit der unteren Schranke  $-2 c^2$ . Wegen  $|s(x, y, z)| \leq \sigma \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \leq \frac{3\sigma}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)$  wird

$$\begin{aligned} |(u A_1 u)| &\leq \frac{3\sigma}{2} (u, u) + \frac{3\sigma}{2} \cdot 4 \cdot \iiint (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau \leq \frac{3\sigma}{2} (u, u) + \\ &\quad + 12 \sigma (A_0 u, u) + 24 \sigma c^2 (u, u). \end{aligned}$$

Damit ist das Bestehen der Ungleichung (32) mit  $p = 0, a = \frac{3\sigma}{2} + 24 c^2 \sigma, b = 12 \sigma$  nachgewiesen. Der zu  $(u A_\varepsilon v)$  nach Satz 3 gehörige Operator  $A(\varepsilon)$  ist also in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  regulär und selbstadjungiert. Nach Satz 3 der dritten Mitteilung gibt es daher zu den diskreten Eigenwerten  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$  und Eigenfunktionen  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$  des ungestörten Operators reguläre Eigenwerte und Eigenfunktionen  $\lambda^{(v)}(\varepsilon), \varphi^{(v)}(\varepsilon)$  von  $A(\varepsilon)$ . Nach Satz 4 lassen sich mit den eben berechneten Werten von  $a$  und  $b$  explizite Fehlerabschätzungen für die Näherungen von  $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$  und  $\varphi^{(1)}(\varepsilon)$  angeben, wenn  $\lambda^{(1)}$  der kleinste der ungestörten Eigenwerte ist, denn dieser ist einfach.

## § 7.

## Ein Gegenbeispiel.

Bei Operatoren  $A(\varepsilon)$ , die für  $\varepsilon = 0$  halbbeschränkt nach unten sind, haben wir zum Nachweis der Regularität Kriterien verwendet (Satz 3 in dieser und Satz 6 in der dritten Mitteilung), die gleichzeitig zur Folge haben, daß  $A(\varepsilon)$  auch für  $\varepsilon \neq 0$  nach unten halbbeschränkt ist, sogar mit einer von  $\varepsilon$  unabhängigen Schranke. Es soll an einem Beispiel gezeigt werden,

<sup>13)</sup> Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Berlin 1931, Bd. 1, 2. Aufl., S. 388.

daß das an der speziellen Natur unserer Kriterien liegt und nicht etwa schon aus der Regularität von  $A(\varepsilon)$  folgt.

Dazu sei  $\mathfrak{H}$  der (reellen) Hilbertsche Raum aller  $u(x)$  mit  $\int_0^1 u^2 dx < \infty$ ;  
 $(u, v) = \int_0^1 u v dx$ . Für alle  $\varepsilon$  ist dann der Operator  $A(\varepsilon)u = \frac{1}{x^2 - \varepsilon^2 x}$  im  
 Bereich der Funktionen  $u$ , für die  $\int_0^1 \frac{u^2}{(x^2 - \varepsilon^2 x)^2} dx < \infty$  gilt, ein selbst-  
 adjungierter Operator. Um zu zeigen, daß für eine Umgebung von  $\varepsilon = 0$   
 der Operator  $A(\varepsilon)$  auch regulär ist, genügt es nach Satz 1 der dritten Mit-  
 teilung zu zeigen, daß  $A(\varepsilon) + 1$  eine reguläre beschränkte Reziproke hat.  
 Nun ist  $(A(\varepsilon) + 1)^{-1}u = \left(1 - \frac{1}{1 + x^2 - \varepsilon^2 x}\right)u$  gewiß für  $|\varepsilon| < 1$  ein beschränkter  
 Operator. Wegen  $\frac{1}{1 + x^2 - \varepsilon^2 x} = \frac{1}{1 + x^2} \left(1 + \frac{x}{1 + x^2} \varepsilon^2 + \left(\frac{x}{1 + x^2}\right)^2 \varepsilon^4 + \dots\right)$   
 aber auch ein regulärer.

Das Spektrum von  $A(0)u = \frac{1}{x^2}u$  ist kontinuierlich und besteht aus  
 allen Punkten  $\lambda \geq 1$ . Das Spektrum von  $A(\varepsilon)$  aber besteht für  $|\varepsilon| < 1$  aus  
 den Punkten  $\lambda \geq \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$  und den Punkten  $\lambda \leq -\frac{4}{\varepsilon^4}$ .  $A(\varepsilon)$  ist also für  
 $0 < |\varepsilon| < 1$  nicht halbbeschränkt.

(Eingegangen am 10. 12. 1939.)

# Ein Eindeutigkeitssatz für analytische Funktionen.

Von

František Wolf in Stockholm (Schweden).

Die Funktion  $f(z)$  sei (I) analytisch im Einheitskreis. (II) Es gebe eine Punktmenge  $\mathfrak{M}(\theta)$ , welche der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen und überall dicht in  $(\alpha, \beta)$  ist, in welcher

$$\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\vartheta})|$$

endlich ist. (III) Ferner sei

$$\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\vartheta})| = 0$$

fast überall in  $(\alpha, \beta)$ .

Dann ist  $f(z) \equiv 0$ .

Beweis: Die Punktfolgen

$$\mathfrak{A}(\varrho, N; \theta) = E[|f(re^{i\vartheta})| \leq N, r \leq \varrho]$$

und

$$\mathfrak{A}(N; \theta) = \lim_{\varrho \rightarrow 1} C\mathfrak{A}(\varrho, N; \theta)$$

sind abgeschlossen.

Nach (II) ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{A}(N; \theta) \supset \mathfrak{M}(\theta).$$

Da  $\mathfrak{M}(\theta)$  als Durchschnitt offener Mengen von der zweiten Kategorie in sich selbst ist, so gibt es ein  $N_1$ , für welches  $\mathfrak{A}(N_1; \theta)$  dicht in einem Abschnitt  $(\gamma, \delta) \cdot \mathfrak{M}(\theta) (\subset (\alpha, \beta))$  ist. Dann ist also auch  $\mathfrak{A}(N_1; \theta)$  in  $(\gamma, \delta)$  dicht, und da es abgeschlossen ist, folgt daraus

$$\mathfrak{A}(N_1; \theta) \supset (\gamma, \delta).$$

Im Kreisausschnitt  $\gamma \leq \theta \leq \delta$  ist daher

$$|f(re^{i\vartheta})| \leq N_1$$

und  $f(z)$  ein Poissonintegral (definiert mittels einer konformen Abbildung). Es besitzt als solches fast überall eine beschränkte Randfunktion, welche nach (III) auf dem Kreisbogen Null ist. Als ein Poissonintegral ist hier  $f(z)$  sogar stetig Null und daher analytisch. Hieraus folgt  $f(z) \equiv 0$ .

(Eingegangen am 11. 6. 1939.)

# Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

In der Arbeit „Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen“ (Math. Annalen 111, S. 638–677; 113, S. 242–291) ist das Verhalten einiger hypergeometrischer Funktionen zweier Veränderlichen<sup>1)</sup> bei der Annäherung an singuläre Stellen der Unbestimmtheit untersucht worden. Die hypergeometrische Funktion  $\Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y)$ , die in mancher Hinsicht ein besonderes Verhalten zeigt, ist eingehender behandelt worden in der Arbeit „Über eine hypergeometrische Funktion zweier Veränderlichen“ (Monatsh. f. Math. u. Phys. 47, S. 186–194, 359–379)<sup>2)</sup>.

In der vorliegenden Arbeit wird (§ 1–3) die Funktion  $\Gamma_2(\beta, \beta', x, y)$  in Weiterführung der in Math. Annalen 111 und 113 begonnenen Behandlung eingehender untersucht, wobei in M. abgeleitete allgemeine Sätze benutzt werden und Unterschiede zwischen  $\Gamma_2$  und  $\Phi_2$  hervortreten. Weiterhin werden (§ 4) für die in Math. Annalen 113 behandelte Funktion  $H_4(\alpha, \gamma, \delta, x, y)$  Ergänzungen und Verbesserungen gegeben, wobei an § 1–3 angeknüpft wird.

## § 1.

Die beständig konvergente hypergeometrische Reihe<sup>3)</sup>

$$\Gamma_2(\beta, \beta', x, y) = \sum \frac{(\beta, n-m)(\beta', m-n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

genügt, wenn  $\beta + \beta' \neq 0$  ist, den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = p, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{(y-\beta')x + (\beta-1-x)p + yq}{x}, \\ \frac{\partial q}{\partial x} = z; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y} = q, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = z, \\ \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{(x-\beta)z + xp + (\beta'-1-y)q}{y} \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Siehe die Zitate Math. Annalen 111, S. 638.

<sup>2)</sup> Diese Arbeit wird mit M. zitiert.

<sup>3)</sup> Math. Annalen 105 (1931), S. 384, 390, 397.

mit den singulären Linien der Bestimmtheit  $x = 0$ ,  $y = 0$  und den singulären Linien der Unbestimmtheit  $x = \infty$ ,  $y = \infty$ . Die Differentialgleichungen haben drei linear unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} z &= \Gamma_2(\beta, \beta', x, y), \\ z &= x^{\beta} \sum_{m \leq n} \frac{(\beta + \beta', m - n)}{(1 + \beta, m)(1, n)(1, m - n)} (-x)^m (-y)^n, \\ z &= y^{\beta'} \sum_{n \leq m} \frac{(\beta + \beta', n - m)}{(1, m)(1 + \beta', n)(1, n - m)} (-x)^m (-y)^n, \end{aligned}$$

deren Verhalten an irgendeiner Stelle der singulären Linien  $x = 0$  und  $y = 0$  mit Ausnahme der Stellen  $x = 0$ ,  $y = \infty$  und  $x = \infty$ ,  $y = 0$  bekannt ist. Es handelt sich jetzt um das Verhalten der Lösungen unseres Differentialgleichungssystems bei der Annäherung an die singuläre Linie der Unbestimmtheit  $x = \infty$ .

Die Differentialgleichungen (a) für die Funktionen  $z$ ,  $p$ ,  $q$  von  $x$  haben die Unbestimmtheitsstelle  $x = \infty$ , deren charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -1 - x & 0 \\ 1 & 0 & 1 - x \end{vmatrix}$$

die Elementarteiler  $x^2$ ,  $x + 1$  besitzt.

I. Zur Bestimmung der dem Elementarteiler  $x^2$  entsprechenden Lösungen führen wir die Differentialgleichungen (a) durch Einführung der abhängigen Veränderlichen

$$\begin{aligned} y_1 &= z + p, \\ y_2 &= -z - q, \\ y_3 &= -p \end{aligned}$$

über in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\beta' y_1 + y y_3 + (\beta + \beta' - 1) y_2}{x} &= 0, \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} + y_1 &= 0, \\ \frac{\partial y_3}{\partial x} + y_3 - \frac{\beta' y_1 + y y_3 + (\beta + \beta' - 1) y_2}{x} &= 0 \end{aligned}$$

von der Form (A'') in Math. Annalen 111, S. 652<sup>4)</sup>. Durch die Substitution

$$x = x^2; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = x Y_2, \quad y_3 = Y_3$$

<sup>4)</sup> Diese Arbeit wird mit A. zitiert.

erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_1}{\partial x} + 2y Y_2 + \frac{2\beta' Y_1 + 2(\beta + \beta' - 1) Y_2}{x} &= 0, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x} + 2 Y_1 + \frac{1}{x} Y_2 &= 0, \\ x^{-1} \frac{\partial Y_3}{\partial x} + 2 Y_3 - \frac{2 Y}{x} Y_2 - \frac{2\beta' Y_1 + 2(\beta + \beta' - 1) Y_2}{x^2} &= 0.\end{aligned}$$

Die weitere Substitution

$$Y_\alpha = e^{x'} Z_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$3_1 = 2 Z_1 - x' Z_2, \quad 3_2 = 2 Z_1 + x' Z_2, \quad 3_3 = Z_3$$

führt, wenn

$$x' = 2\sqrt{y}$$

gesetzt wird (mit einem beliebigen Wert der Quadratwurzel) und  $y \neq 0$  ist, zu den Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial 3_1}{\partial x} + \frac{\beta' + \frac{1}{2}}{x} 3_1 + \frac{\beta' - \frac{1}{2}}{x} 3_2 + \frac{4(\beta + \beta' - 1)}{x^2} 3_3 = 0, \\ \frac{\partial 3_2}{\partial x} + 4\sqrt{y} 3_2 + \frac{\beta' - \frac{1}{2}}{x} 3_1 + \frac{\beta' + \frac{1}{2}}{x} 3_2 + \frac{4(\beta + \beta' - 1)}{x} 3_3 = 0, \\ x^{-1} \frac{\partial 3_3}{\partial x} + 2 3_3 + \frac{\sqrt{y}}{2x} 3_1 - \frac{\sqrt{y}}{2x} 3_2 + \frac{2\sqrt{y}}{x} 3_3 = 0. \end{cases}$$

Wir haben die formale Lösung

$$3_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3_{\alpha n}}{x^{\beta' + \frac{1}{2} + n}} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

mit  $3_{20} = 0$ ,  $3_{30} = 0$  und den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}4\sqrt{y} 3_{2n} + \left(\beta' - \frac{1}{2}\right) 3_{1, n-1} - (n-1) 3_{2, n-1} + 4(\beta + \beta' - 1) 3_{3, n-1} &= 0, \\ 2 3_{3n} + \frac{\sqrt{y}}{2} 3_{1, n-1} - \frac{\sqrt{y}}{2} 3_{2, n-1} + 2\sqrt{y} 3_{3, n-1} - \left(\beta' + n - \frac{3}{2}\right) 3_{3, n-2} &= 0, \\ n 3_{1n} &= \left(\beta' - \frac{1}{2}\right) 3_{2n} + 4(\beta + \beta' - 1) 3_{3n}.\end{aligned}$$

Inbesondere ist

$$\begin{aligned}3_{21} &= -\frac{\left(\beta' - \frac{1}{2}\right) 3_{10}}{4\sqrt{y}}, \\ 3_{31} &= -\frac{\sqrt{y} 3_{10}}{2}, \\ 3_{11} &= -\left\{\frac{\left(\beta' - \frac{1}{2}\right)^2}{4\sqrt{y}} + 2(\beta + \beta' - 1)\sqrt{y}\right\} 3_{10}.\end{aligned}$$

Es ist

$$p = -y_3,$$

$$z = y_1 + y_3,$$

$$q = -y_1 - y_2 - y_3$$

oder

$$p = -e^2 \sqrt{xy} \, 3_3,$$

$$z = \frac{1}{4} e^2 \sqrt{xy} (3_1 + 3_2 + 4 \, 3_3),$$

$$q = -\frac{1}{4} e^2 \sqrt{xy} \left\{ 3_1 + 3_2 + 4 \, 3_3 + \sqrt{\frac{x}{y}} (-3_1 + 3_2) \right\}.$$

Zur Bestimmung von  $3_{10}$  benutzen wir die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q$$

oder

$$\frac{\partial (3_1 + 3_2 + 4 \, 3_3)}{\partial y} + 3_1 + 3_2 + 4 \, 3_3 + 2 \sqrt{\frac{x}{y}} (3_2 + 2 \, 3_3) = 0.$$

Wenn man die Reihen für die  $3_n$  einsetzt und die Glieder mit  $x^{-\rho-\frac{1}{2}}$  vergleicht, hat man

$$\frac{d \, 3_{10}}{d y} + 3_{10} + \frac{2 \, 3_{21} + 4 \, 3_{31}}{\sqrt{y}} = 0$$

oder, wenn man

$$\frac{2 \, 3_{21} + 4 \, 3_{31}}{\sqrt{y}} = -\left(\frac{\rho - \frac{1}{2}}{2y} + 2\right) 3_{10}$$

setzt,

$$\frac{d \, 3_{10}}{d y} = \left(\frac{\rho - \frac{1}{2}}{2y} + 1\right) 3_{10}.$$

Daraus folgt

$$3_{10} = e^{\sigma} y^{\frac{\rho}{2} - \frac{1}{4}}.$$

Nach den Rekursionsformeln für die  $3_{\alpha n}$  ist

$$\frac{3_{\alpha n}}{3_{10}} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

eine lineare homogene Funktion von

$$y^{\frac{n}{2}}, y^{\frac{n}{2}-1}, \dots, y^{-\frac{n}{2}+1}, y^{-\frac{n}{2}};$$

$y^{\frac{n}{2}}$  fehlt in  $3_{2n}$ ,  $y^{-\frac{n}{2}}$  in  $3_{3n}$ .

So findet man

$$z = e^{2\sqrt{x}y} x^{-\frac{\beta'}{2}-\frac{1}{4}} y^{\frac{\beta'}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(y)}{x^{\frac{n}{2}}},$$

wo  $f_n(y)$  eine lineare homogene Funktion von

$$y^{\frac{n}{2}}, y^{\frac{n}{2}-1}, \dots, y^{-\frac{n}{2}+1}, y^{-\frac{n}{2}}$$

ist.

Die Laplaceschen Integrale

$$3_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(\zeta) e^{-x\zeta} d\zeta \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

deren Integrationsweg  $\arg \zeta = \omega$  die Bedingung  $\cos 2\omega < 0^5)$  erfüllt und wo

$$w_\alpha(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} 3_{\alpha n} \frac{\zeta^{\beta' + n - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta' + n - \frac{1}{2})}$$

längs des Integrationsweges fortzusetzen ist, genügen den Differentialgleichungen der Funktionen  $3_\alpha$  von  $x$  und werden, wenn  $x$  ins Unendliche geht, durch die Reihen

$$3_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3_{\alpha n}}{x^{\beta' + \frac{1}{2} + n}}$$

asymptotisch dargestellt, und zwar gleichmäßig für alle reellen  $y$  in einem abgeschlossenen Intervall, welches  $y = 0$  weder im Innern noch auf dem Rande enthält (oder für alle komplexen  $y$  in einem abgeschlossenen Gebiet, welches  $y = 0$  weder im Innern noch auf dem Rande enthält)<sup>6)</sup>.

Die Formel

$$z = \frac{1}{4} e^{2\sqrt{x}y} (3_1 + 3_2 + 4 \cdot 3_3)$$

ergibt ein Laplacesches Integral, welches den Differentialgleichungen der Funktion  $\Gamma_2(\beta, \beta', x, y)$  genügt und für große  $x$  durch die diesen Differentialgleichungen formal genügende Reihe

$$z = e^{2\sqrt{x}y} x^{-\frac{\beta'}{2}-\frac{1}{4}} y^{\frac{\beta'}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(y)}{x^{\frac{n}{2}}}$$

<sup>5)</sup> A., S. 652—658. In der Bedingung

$$\Re \frac{e^{2i\omega}}{a} < 0$$

ist  $a = 1$  zu setzen. Es ist  $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4}$  oder  $\frac{5\pi}{4} < \omega < \frac{7\pi}{4}$ .

<sup>6)</sup> Beweis dieser Behauptung im Nachtrag.

asymptotisch dargestellt wird, und zwar gleichmäßig in einem beschränkten Intervall, das  $y = 0$  nicht enthält, also entweder für

$$0 < A \leq y \leq B < \infty$$

oder für

$$-\infty < A \leq y \leq B < 0.$$

Nachtrag. In dem Differentialgleichungssystem (A'') in A., S. 652

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} + \sum_{\beta=1}^3 \left( \frac{a_{1\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} + y_1 + \sum_{\beta=1}^3 \left( \frac{a_{2\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x} + a y_3 + \sum_{\beta=1}^3 \left( \frac{a_{3\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0$$

seien  $a_{\alpha\beta}^{(1)}, a_{\alpha\beta}^{(2)}, \dots$  Funktionen eines Parameters  $u$ , welche sich im Kreis  $\mathfrak{U} \mid u - a \mid \leq Q$  regulär verhalten;  $a$  sei eine von Null verschiedene, von  $u$  unabhängige Größe; die reguläre Funktion  $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(1)}(u)$  sei in  $\mathfrak{U}$  von Null verschieden. Wie in A. werden die neuen abhängigen Veränderlichen  $3_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) und die neue unabhängige Veränderliche  $x$  eingeführt. Die Differentialgleichungen (A) a. a. O., S. 653 mit  $x' = 2 \sqrt{a_{12}^{(1)}}$  haben als Koeffizienten Funktionen von  $u$ , die in  $\mathfrak{U}$  regulär sind. Die Koeffizienten  $\mathfrak{A}_{\alpha n}$  der dem System (A) genügenden Reihen

$$3_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

mit  $r = a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)} + \frac{1}{2}$  sind in  $\mathfrak{U}$  reguläre Funktionen von  $u$ . Die Integralgleichungen (B) a. a. O., S. 655 haben die Lösung

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

mit den dort angegebenen Eigenschaften. Das Laplacesche Integral

$$3_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx} dt,$$

dessen Integrationsweg  $\arg t = \omega$  die Bedingung

$$\Re \frac{e^{2i\omega}}{a} < 0$$

<sup>1)</sup> Wie früher kann der reelle Teil von  $r$  positiv vorausgesetzt werden.

erfüllt, wird, wenn  $x$  ins Unendliche geht, durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{x^{r+n}}$$

asymptotisch dargestellt, und zwar gleichmäßig für alle  $u$  im Gebiet  $\mathcal{U}$ .

Die hier ausgesprochenen Behauptungen werden im Anschluß an A., S. 652–658 ähnlich bewiesen wie in M., § 8 die entsprechenden Sätze für das dortige einfachere Differentialgleichungssystem (A).

Im Falle des Differentialgleichungssystems (a) ist nach Einführung der abhängigen Veränderlichen  $y_1, y_2, y_3$   $\alpha_{12}^{(1)} = y$ ; der Parameter  $u$  ist hier  $y$ , und das Gebiet  $\mathcal{U}$  darf  $y = 0$  nicht enthalten.

II. Um die Lösung der Differentialgleichungen (a) zu bestimmen, welche dem Elementarteiler  $x + 1$  der charakteristischen Determinante entspricht, führen wir die Differentialgleichungen (a) durch die Substitution

$$z = e^{-x} \beta, \quad p = e^{-x} p, \quad q = e^{-x} q$$

über in

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \beta + p,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{(y - \beta') \beta + (\beta - 1) p + y q}{x},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \beta + q.$$

Für die Reihen

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{x^{r+n}}, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{x^{r+n}}, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{x^{r+n}}$$

ergeben sich die Rekursionsformeln

$$-(r + n - 1) \beta_{n-1} = \beta_n + p_n,$$

$$-(r + n - 1) p_{n-1} = (y - \beta') \beta_{n-1} + (\beta - 1) p_{n-1} + y q_{n-1},$$

$$-(r + n - 1) q_{n-1} = \beta_n + q_n.$$

Aus der ersten und dritten Gleichung für  $n = 0$  und der zweiten Gleichung für  $n = 1$  folgt

$$p_0 = q_0 = -\beta_0,$$

$$r = 1 - \beta - \beta'.$$

Die drei Rekursionsformeln lassen sich nunmehr, wenn in der zweiten  $n - 1$  durch  $n$  ersetzt wird, folgendermaßen schreiben:

$$(y - \beta') \beta_n + (n - \beta') p_n + y q_n = 0,$$

$$p_n = -\beta_n + (\beta + \beta' - n) \beta_{n-1},$$

$$q_n = -\beta_n + (\beta + \beta' - n) q_{n-1}.$$

Dabei kann die erste Gleichung durch die folgende ersetzt werden:

$$n z_n = (\beta + \beta' - n) ((n - \beta') z_{n-1} + y q_{n-1}).$$

Zunächst ist

$$z_1 = (\beta + \beta' - 1) (1 - \beta' - y) z_0,$$

$$p_1 = -z_1 + (\beta + \beta' - 1) z_0,$$

$$q_1 = -z_1 - (\beta + \beta' - 1) z_0.$$

Durch den Schluß von  $n - 1$  auf  $n$  zeigt man, daß

$$\frac{z_n}{z_0}, \quad \frac{p_n}{z_0}, \quad \frac{q_n}{z_0}$$

ganze rationale Funktionen  $n$ -ten Grades von  $y$  sind. Wir schreiben

$$\frac{z_n}{z_0} = f_n(y).$$

Um  $z_0$  als Funktion von  $y$  zu bestimmen, setzen wir in der ersten Gleichung (b)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q$$

oder

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q$$

für  $z$  und  $q$  in die Reihen ein und vergleichen die Glieder mit  $\frac{1}{x}$ . Wir erhalten

$$\frac{dz_0}{dy} = q_0 = -z_0,$$

also

$$z_0 = e^{-y}.$$

Die Reihe

$$z = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{x^{1-\beta-\beta'+n}}$$

geht wegen

$$z_n = f_n(y) e^{-y},$$

wo  $f_n(y)$  eine ganze Funktion  $n$ -ten Grades von  $y$  ist, über in

$$z = e^{-x-y} x^{\beta+\beta'-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(y)}{x^n}.$$

Das Laplacesche Integral

$$z = e^{-x-y} x^{\beta+\beta'-1} \left( 1 + \int_0^{\infty} w(\zeta) e^{-x\zeta} d\zeta \right),$$

wo

$$w(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}$$

ist, genügt den Differentialgleichungen der Funktion  $\Gamma_2$  und wird für große  $x$  durch die angeschriebene Reihe asymptotisch dargestellt, und zwar gleichmäßig für alle  $y$  in einem beschränkten Intervall  $J$ . Es ist demnach

$$z = e^{-x-y} x^{\beta+\beta'-1} \left( \sum_{v=0}^n \frac{f_v(y)}{x^v} + \frac{\varepsilon_n}{x^n} \right);$$

nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Größe  $\varepsilon$  kann man  $R > 0$  so groß wählen, daß für  $x > R$  und für alle  $y$  in  $J$

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon$$

ist. Wenn wir

$$\varepsilon_n e^{-y} = \varepsilon'_n$$

setzen, ist

$$z = e^{-x} x^{\beta+\beta'-1} \left( \sum_{v=0}^n \frac{f_v(y) e^{-y}}{x^v} + \frac{\varepsilon'_n}{x^n} \right);$$

für  $x > R'$  ( $R'$  hinreichend groß) und für  $y$  in  $J$  ist

$$|\varepsilon'_n| < \varepsilon.$$

## § 2.

Wir untersuchen das Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems der Funktion  $\Gamma_2(\beta, \beta', x, y)$  bei der Annäherung an den Schnittpunkt  $x = \infty, y = \infty$  der singulären Linien  $x = \infty$  und  $y = \infty$ , und zwar möge die Annäherung längs einer Geraden erfolgen \*).

In den Differentialgleichungen (a), (b) in § 1 führen wir vermöge der Substitution

$$x = at, \quad y = bt,$$

$$a = \cos \varphi, \quad b = \sin \varphi$$

\*) Wir stellen uns die Veränderlichen  $x, y$  als reell vor.

die neuen Veränderlichen  $t, \varphi$  (Polarkoordinaten) ein und lassen die positive Veränderliche  $t$  unendlich werden. Wir erhalten so die Differentialgleichungen

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = ap + bq, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = 2bz - ap + bq - \frac{\beta'}{t}z + \frac{\beta-1}{t}p, \\ \frac{\partial q}{\partial t} = 2az + ap - bq - \frac{\beta}{t}z + \frac{\beta'-1}{t}q; \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -bt p + at q, \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{[(a^2 - b^2)t + \beta' b]z + [abt - (\beta - 1)b]p - b^2 t q}{a}, \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{[(a^2 - b^2)t - \beta a]z + a^2 t p + [(\beta' - 1)a - abt]q}{b}. \end{cases}$$

Das System (A) mit der unabhängigen Veränderlichen  $t$  und dem Parameter  $\varphi$  hat die Unbestimmtheitsstelle  $t = \infty$ . Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} -x & a & b \\ 2b & -a-x & b \\ 2a & a & -b-x \end{vmatrix} = 0$$

hat drei verschiedene Wurzeln

$$x = -a - b, \quad -2\sqrt{ab}, \quad 2\sqrt{ab},$$

wenn  $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$  ist \*).

Entsprechend der Wurzel  $x = -a - b$  führen wir das System (A) durch die Substitution

$$z = e^{-(a+b)t} \zeta, \quad p = e^{-(a+b)t} p, \quad q = e^{-(a+b)t} q$$

über in das System

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = (a+b)\zeta + ap + bq, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = 2b\zeta + bp + bq - \frac{\beta'}{t}\zeta + \frac{\beta-1}{t}p, \\ \frac{\partial q}{\partial t} = 2a\zeta + ap + aq - \frac{\beta}{t}\zeta + \frac{\beta'-1}{t}q, \end{cases}$$

dessen charakteristische Gleichung die Wurzeln

$$0, \quad -2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, \quad 2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

\*) Von der A., S. 661 vorgenommenen Transformation der abhängigen Veränderlichen sehen wir hier ab.

hat. Die zweite oder dritte Wurzel verschwindet für die singulären Werte von  $\varphi$ , welche der Gleichung  $a = b$  oder  $\operatorname{tg} \varphi = 1$  genügen, das ist  $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots^{10)}$ . Wir haben die formalen Reihen

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{r^{r+n}}, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{r^{r+n}}, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{r^{r+n}}$$

mit

$$r = 1 - \beta - \beta'$$

und

$$p_0 = q_0 = -z_0;$$

$z_n, p_n, q_n$  sind rationale Funktionen von  $\sqrt{a}, \sqrt{b}$  und homogene Funktionen  $(-n)$ -ten Grades von  $a, b$ ; es ist

$$z_n = z_0 f_n(a, b),$$

$$f_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda^{-n} f_n(a, b).$$

Die Differentialgleichungen (B) gehen über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= (a - b) t z - b t p + a t q, \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= a t p + \frac{[(a^2 - b^2) t + \beta' b] z - (\beta - 1) b p - b^2 t q}{a}, \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} &= -b t q + \frac{[(a^2 - b^2) t - \beta a] z + a^2 t p + (\beta' - 1) a q}{b}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung der Reihen für  $z, p, q$  in die zweite und dritte Gleichung und Vergleichung der Koeffizienten von  $\frac{1}{r^r}$  ergeben sich die Gleichungen

$$a \frac{d p_0}{d \varphi} = a^2 p_1 - b^2 q_1 + (a^2 - b^2) z_1 + \beta' b z_0 - (\beta - 1) b p_0,$$

$$b \frac{d q_0}{d \varphi} = a^2 p_1 - b^2 q_1 + (a^2 - b^2) z_1 - \beta a z_0 + (\beta' - 1) a q_0$$

und hieraus durch Subtraktion

$$-(a - b) \frac{d z_0}{d \varphi} = (\beta + \beta' - 1) (a + b) z_0,$$

also

$$z_0 = (a - b)^{\beta + \beta' - 1}.$$

<sup>10)</sup> In dem Differentialgleichungssystem (A) in M., S. 370

$$\frac{d y_\alpha}{d x} + a_\alpha y_\alpha + \dots = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

sind, wenn  $a_1 = 0$  ist und  $a_1, \dots, a_m$  von dem Parameter  $u$  abhängen (M., S. 376—377), die Nullstellen von  $a_1, \dots, a_m$  singuläre Werte von  $u$ .

Demnach ist

$$z = e^{-(a+b)t} (a-b)^{\beta+\beta'-1} t^{\beta+\beta'-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(a, b)}{t^n}$$

oder

$$z = e^{-x-y} (x-y)^{\beta+\beta'-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y),$$

wo  $f_n(x, y)$  rational in  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  und homogen  $(-n)$ -ten Grades in  $x, y$  ist.

Der Wurzel  $\kappa = -2\sqrt{ab}$  entsprechend, setzen wir

$$z = e^{-2\sqrt{ab} \cdot t} z, \quad p = e^{-2\sqrt{ab} \cdot t} p, \quad q = e^{-2\sqrt{ab} \cdot t} q.$$

Die Differentialgleichungen (A) gehen über in

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2\sqrt{ab} z + ap + bq,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 2bz + (-a + 2\sqrt{ab})p + bq - \frac{\beta'}{t} z + \frac{\beta-1}{t} p,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 2az + ap + (-b + 2\sqrt{ab})q - \frac{\beta}{t} z + \frac{\beta'-1}{t} q.$$

Die charakteristische Gleichung dieses Systems hat die Wurzeln

$$0, -a-b-2\sqrt{ab} = -(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, -2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} = -4\sqrt{ab}.$$

Die zweite oder dritte Wurzel verschwindet für die singulären Werte von  $\varphi$ , welche einer der Gleichungen

$$a = 0, \quad b = 0, \quad a = b$$

oder

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin \varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1$$

genügen, also für  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; 0, \pi; \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  bis auf Vielfache von  $2\pi$ . Das Differentialgleichungssystem wird durch Reihen

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{t^{r+n}}, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{t^{r+n}}, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{t^{r+n}}$$

mit

$$r = \frac{1}{2}$$

und

$$p_0 = -\sqrt{\frac{b}{a}} z_0, \quad q_0 = -\sqrt{\frac{a}{b}} z_0$$

formal befriedigt;  $z_n, p_n, q_n$  hängen wie vorhin von  $a, b$  ab; wir schreiben

$$z_n = g_n(a, b).$$

Die Differentialgleichungen (B) gehen über in

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \varphi} &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{ab}} t \mathfrak{z} - b t p + a t q, \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{ab}} t p + \frac{[(a^2 - b^2)t + \beta' b] \mathfrak{z} + [a b t - (\beta - 1) b] p - b^2 t q}{a}, \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{ab}} t q + \frac{[(a^2 - b^2)t - \beta a] \mathfrak{z} + a^2 t p + [(\beta' - 1) a - a b t] q}{b}.\end{aligned}$$

Durch Einsetzung der Reihen und Vergleichung der Koeffizienten von  $t^{\frac{1}{2}}$  erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d \mathfrak{z}_0}{d \varphi} &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{ab}} \mathfrak{z}_1 - b p_1 + a q_1, \\ \frac{d p_0}{d \varphi} &= \frac{a^2 - b^2}{a} \mathfrak{z}_1 + \left( \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{ab}} + b \right) p_1 - \frac{b^2}{a} q_1 + \frac{\beta' b \mathfrak{z}_0 - (\beta - 1) b p_0}{a}, \\ \frac{d q_0}{d \varphi} &= \frac{a^2 - b^2}{b} \mathfrak{z}_1 + \frac{a^2}{b} p_1 + \left( \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{ab}} - a \right) q_1 + \frac{-\beta a \mathfrak{z}_0 + (\beta' - 1) a q_0}{b},\end{aligned}$$

aus welchen durch Multiplikation mit  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{a}$ ,  $-\sqrt{b}$  die von  $\mathfrak{z}_1$ ,  $p_1$ ,  $q_1$  freie Gleichung

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \frac{d \mathfrak{z}_0}{d \varphi} + \sqrt{a} \frac{d p_0}{d \varphi} - \sqrt{b} \frac{d q_0}{d \varphi} \\ = \frac{b}{\sqrt{a}} [\beta' \mathfrak{z}_0 - (\beta - 1) p_0] - \frac{a}{\sqrt{b}} [-\beta \mathfrak{z}_0 + (\beta' - 1) q_0]\end{aligned}$$

hervorgeht. Drückt man  $p_0$ ,  $q_0$  durch  $\mathfrak{z}_0$  aus, so erhält man die Gleichung

$$2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \frac{d \log \mathfrak{z}_0}{d \varphi} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{ab} + \frac{\beta' \sqrt{a} + \beta \sqrt{b}}{ab} - \frac{a^2 \sqrt{a} + b^2 \sqrt{b}}{ab}.$$

Wenn man mittels der Substitution  $\sqrt{tg \varphi} = u$  integriert, findet man

$$\mathfrak{z}_0 = a^{-\frac{\beta}{2}} b^{-\frac{\beta'}{2}} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{\beta - \beta' - 1}.$$

Demnach ist

$$z = e^{-2\sqrt{ab}t} a^{-\frac{\beta}{2}} b^{-\frac{\beta'}{2}} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{\beta - \beta' - 1} t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(a, b)}{t^n}$$

oder

$$z = e^{-2\sqrt{xy}t} x^{-\frac{\beta}{2}} y^{-\frac{\beta'}{2}} (\sqrt{x} - \sqrt{y})^{\frac{\beta - \beta'}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x, y),$$

wo  $g_n(x, y)$  rational in  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  und homogen  $(-n)$ -ten Grades in  $x, y$  ist.

Aus dieser Lösung geht eine andere hervor, indem man  $\sqrt{y}$  durch  $-\sqrt{y}$  ersetzt.

Wir verstehen unter

$$a_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

eine der Größen

$$a + b, \quad 2\sqrt{ab}, \quad -2\sqrt{ab}$$

und unter  $\beta_n, p_n, q_n$  die Koeffizienten eines der oben bestimmten Reihensysteme. Die Reihen

$$w(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n (\zeta - a_i)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)},$$

$$w'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n (\zeta - a_i)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)},$$

$$w''(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n (\zeta - a_i)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

konvergieren in einem Kreis der  $\zeta$ -Ebene vom Mittelpunkt  $a_i$ , dessen Peripherie durch die nächste der von  $a_i$  verschiedenen Stellen  $a_1, a_2, a_3$  geht <sup>11)</sup>. Wir denken uns diese Reihen von  $a_i$  nach  $\infty$  auf geradlinigem Wege fortgesetzt, welcher keine von  $a_i$  verschiedene Stelle  $a_1, a_2, a_3$  enthält. Die Laplaceschen Integrale

$$z = \int_{a_i}^{\infty} w(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta,$$

$$p = \int_{a_i}^{\infty} w'(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta,$$

$$q = \int_{a_i}^{\infty} w''(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta$$

sind Funktionen von  $t$  und  $\varphi$  (oder von  $x$  und  $y$ ), welche den Differentialgleichungen von  $\Gamma_2$  genügen und durch Reihen

$$z = e^{-a_i t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{t^{r+n}},$$

$$p = e^{-a_i t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{t^{r+n}},$$

$$q = e^{-a_i t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{t^{r+n}},$$

<sup>11)</sup> Es ist  $r = 1 - \beta - \beta'$  für  $a_1 = a + b, r = \frac{1}{2}$  für  $a_2 = 2\sqrt{ab}$  und  $a_3 = -2\sqrt{ab}$ ;  $\beta_n, p_n, q_n$  sind für  $i = 1, 2, 3$  verschieden.

welche diesen Differentialgleichungen formal genügen, asymptotisch dargestellt werden, und zwar gleichmäßig für alle  $\varphi$ , welche einem Intervall angehören, das weder im Innern noch auf dem Rande ein singuläres  $\varphi$  enthält<sup>12)</sup>. Die singulären  $\varphi$ -Werte genügen für  $i = 1$  der Gleichung  $a = b$ , für  $i = 2$  und  $i = 3$  einer der Gleichungen  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $a = b$ .

Aus

$$z = \int_{a_i}^{\infty} w(\zeta) e^{-i\zeta} d\zeta$$

folgt

$$\frac{\partial z}{\partial t} = - \int_{a_i}^{\infty} \zeta w(\zeta) e^{-i\zeta} d\zeta,$$

$$\frac{1}{i} z = \int_{a_i}^{\infty} \int_{a_i}^{\zeta} w(\zeta) d\zeta \cdot e^{-i\zeta} d\zeta$$

usw. So ergeben sich aus den Differentialgleichungen (A) die Integralgleichungen

$$\zeta w + a w' + b w'' = 0,$$

$$2 b w + (\zeta - a) w' + b w'' - \beta' \int_{a_i}^{\zeta} w d\zeta + (\beta - 1) \int_{a_i}^{\zeta} w' d\zeta = 0,$$

$$2 a w + a w' + (\zeta - b) w'' - \beta \int_{a_i}^{\zeta} w d\zeta + (\beta' - 1) \int_{a_i}^{\zeta} w'' d\zeta = 0$$

und daraus die Differentialgleichungen

$$\zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta} + a \frac{\partial w'}{\partial \zeta} + b \frac{\partial w''}{\partial \zeta} + w = 0,$$

$$2 b \frac{\partial w}{\partial \zeta} + (\zeta - a) \frac{\partial w'}{\partial \zeta} + b \frac{\partial w''}{\partial \zeta} - \beta' w + \beta w' = 0,$$

$$2 a \frac{\partial w}{\partial \zeta} + a \frac{\partial w'}{\partial \zeta} + (\zeta - b) \frac{\partial w''}{\partial \zeta} - \beta w - \beta' w'' = 0,$$

deren singuläre Stellen die Wurzeln  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der Gleichung

$$\Delta(\zeta) = \begin{vmatrix} \zeta, & a, & b \\ 2b, & \zeta - a, & b \\ 2a, & a, & \zeta - b \end{vmatrix} = (\zeta - a - b) (\zeta - 2\sqrt{ab}) (\zeta + 2\sqrt{ab})$$

<sup>12)</sup> Vgl. M., § 8.

sind. Die Differentialgleichungen lassen sich schreiben:

$$\Delta(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta} + [\zeta(\zeta - a - b) + \beta b(\zeta - 2a) + \beta' a(\zeta - 2b)] w - \beta a(\zeta - 2b) w' - \beta' b(\zeta - 2a) w'' = 0,$$

$$\Delta(\zeta) \frac{\partial w'}{\partial \zeta} + [-2b(\zeta - a - b) - \beta'(\zeta^2 - b\zeta - 2ab) + \beta b(\zeta - 2b)] w + \beta(\zeta^2 - b\zeta - 2ab) w' - \beta' b(\zeta - 2b) w'' = 0,$$

$$\Delta(\zeta) \frac{\partial w''}{\partial \zeta} + [-2a(\zeta - a - b) + \beta' a(\zeta - 2a) - \beta(\zeta^2 - a\zeta - 2ab)] w - \beta a(\zeta - 2a) w' + \beta'(\zeta^2 - a\zeta - 2ab) w'' = 0.$$

Die zu der singulären Stelle  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gehörige determinierende Gleichung hat außer der Doppelwurzel  $\varrho = 0$  die von Null verschiedene Wurzel  $\varrho = -\beta - \beta'$  für  $a_1 = a + b$ ,  $\varrho = -\frac{1}{2}$  für  $a_2 = 2\sqrt{ab}$  und für  $a_3 = -2\sqrt{ab}$ .

Der Fall  $a = b$ , etwa  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , ist besonders zu behandeln. Es ist

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a + b = 2\sqrt{ab} = \sqrt{2}, \quad -2\sqrt{ab} = -\sqrt{2},$$

so daß zwei singuläre Stellen des Differentialgleichungssystems zusammenfallen. Jetzt ist

$$\Delta(\zeta) = (\zeta - \sqrt{2})^2 (\zeta + \sqrt{2}).$$

Durch die Substitution

$$\zeta = \eta \sqrt{2}$$

gehen die Differentialgleichungen nach Division mit  $\eta - 1$  über in

$$(\eta - 1)(\eta + 1) \frac{\partial w}{\partial \eta} + \left(\eta + \frac{\beta + \beta'}{2}\right) w - \frac{\beta}{2} w' - \frac{\beta'}{2} w'' = 0,$$

$$(\eta - 1)(\eta + 1) \frac{\partial w'}{\partial \eta} - \left(\beta' \eta + 1 - \frac{\beta - \beta'}{2}\right) w + \beta \left(\eta + \frac{1}{2}\right) w' - \frac{\beta'}{2} w'' = 0,$$

$$(\eta - 1)(\eta + 1) \frac{\partial w''}{\partial \eta} - \left(\beta \eta + 1 + \frac{\beta - \beta'}{2}\right) w - \frac{\beta}{2} w' + \beta' \left(\eta + \frac{1}{2}\right) w'' = 0.$$

Die zur singulären Stelle  $\eta = 1$  gehörige determinierende Gleichung hat die Wurzeln  $\varrho = -\frac{\beta + \beta'}{2}$  und  $\varrho = -\frac{\beta + \beta' + 1}{2}$  neben  $\varrho = 0$ . Zur singulären Stelle  $\eta = -1$  gehört eine determinierende Gleichung mit der Wurzel  $\varrho = -\frac{1}{2}$  neben der Doppelwurzel  $\varrho = 0$ .

Daraus, daß die oben aufgestellten asymptotischen Reihen für  $z, \eta, q$  den Differentialgleichungen (B) formal genügen, läßt sich schließen, daß die entsprechenden Laplaceschen Integrale den Differentialgleichungen (B) genügen.

Ist z. B.

$$z = e^{-(a+b)t} z, \quad p = e^{-(a+b)t} p, \quad q = e^{-(a+b)t} q,$$

so folgt aus den Differentialgleichungen (B) wie oben:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = (a-b)tz - bt p + at q,$$

$$a \frac{\partial p}{\partial \varphi} = [(a^2 - b^2)t + \beta' b]z + [a^2 t - (\beta - 1)b]p - b^2 t q,$$

$$b \frac{\partial q}{\partial \varphi} = [(a^2 - b^2)t - \beta a]z + a^2 t p + [(\beta' - 1)a - b^2 t]q.$$

Setzt man

$$\xi = \zeta - a_1 = \zeta - a - b,$$

so ist

$$z = \int_0^\infty w(\xi) e^{-t\xi} d\xi, \quad p = \int_0^\infty w'(\xi) e^{-t\xi} d\xi, \quad q = \int_0^\infty w''(\xi) e^{-t\xi} d\xi$$

und unter der Voraussetzung  $\Re(r-1) > 0$

$$tz = \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{-t\xi} d\xi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial \varphi} e^{-t\xi} d\xi$$

usw. Die Funktionen  $w, w', w''$  genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = (a-b) \frac{\partial w}{\partial \xi} - b \frac{\partial w'}{\partial \xi} + a \frac{\partial w''}{\partial \xi},$$

$$a \frac{\partial w'}{\partial \xi} = (a^2 - b^2) \frac{\partial w}{\partial \xi} + a^2 \frac{\partial w'}{\partial \xi} - b^2 \frac{\partial w''}{\partial \xi} + \beta' b w - (\beta - 1) b w',$$

$$b \frac{\partial w''}{\partial \xi} = (a^2 - b^2) \frac{\partial w}{\partial \xi} + a^2 \frac{\partial w'}{\partial \xi} - b^2 \frac{\partial w''}{\partial \xi} - \beta a w + (\beta' - 1) a w''.$$

Wenn man in diesen Differentialgleichungen

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \xi^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

usw. setzt und die Koeffizienten von  $\frac{\xi^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$  vergleicht, erhält man dieselben Rekursionsformeln

$$\frac{d \lambda_n}{d \varphi} = (a-b) \lambda_{n+1} - b \lambda_{n+1} + a \lambda_{n+1}$$

usw. wie durch Einsetzung der Reihen

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{r^n}$$

usw. in die Differentialgleichungen für die Funktionen  $z, p, q$  von  $\varphi$ . —

Die Differentialgleichungen (A) mit der singulären Stelle der Bestimmtheit  $t = 0$

$$t \frac{\partial z}{\partial t} = a t p + b t q,$$

$$t \frac{\partial p}{\partial t} = -\beta' z + (\beta - 1) p + 2 b t z - a t p + b t q,$$

$$t \frac{\partial q}{\partial t} = -\beta z + (\beta' - 1) q + 2 a t z + a t p - b t q$$

haben drei Lösungen, welche den Wurzeln  $0, \beta - 1, \beta' - 1$  der determinierenden Gleichung entsprechen:

$$z = F_1(t), \quad p = G_1(t), \quad q = H_1(t),$$

$$z = t^{\beta-1} F_2(t), \quad p = t^{\beta-1} G_2(t), \quad q = t^{\beta-1} H_2(t),$$

$$z = t^{\beta'-1} F_3(t), \quad p = t^{\beta'-1} G_3(t), \quad q = t^{\beta'-1} H_3(t).$$

$F_i, G_i, H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind beständig konvergente Potenzreihen von  $t$ ; wir können  $F_1(0) = 1, G_2(0) = 1, H_3(0) = 1$  annehmen. Die Funktionen  $F_i(t), G_i(t), H_i(t)$  können mit einer Funktion  $A_i$  von  $\varphi$  multipliziert werden. Indem man die mit  $A_i$  multiplizierte Lösung  $z, p, q$  in die  $i$ -te Differentialgleichung (B) einsetzt und  $t = 0$  setzt, erhält man

$$A_1 = 1, \quad A_2 = a^{\beta-1}, \quad A_3 = b^{\beta'-1}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (A), (B) ist

$$z = c_1 F_1(t) + c_2 a^{\beta-1} t^{\beta-1} F_2(t) + c_3 b^{\beta'-1} t^{\beta'-1} F_3(t),$$

$$p = c_1 G_1(t) + c_2 a^{\beta-1} t^{\beta-1} G_2(t) + c_3 b^{\beta'-1} t^{\beta'-1} G_3(t),$$

$$q = c_1 H_1(t) + c_2 a^{\beta-1} t^{\beta-1} H_2(t) + c_3 b^{\beta'-1} t^{\beta'-1} H_3(t),$$

wo  $c_1, c_2, c_3$  willkürliche Konstante (d. h. von  $t$  und  $\varphi$  unabhängige Größen) sind. Versteht man in dieser Lösung unter  $\varphi$  einen festen Wert. für welchen  $a \neq 0, b \neq 0$  ist, und setzt man

$$c_1 = C_1, \quad c_2 a^{\beta-1} = C_2, \quad c_3 b^{\beta'-1} = C_3,$$

so kann man  $c_1, c_2, c_3$  so bestimmen, daß  $C_1, C_2, C_3$  gegebene Werte annehmen. Dann ist

$$z = C_1 F_1(t) + C_2 t^{\beta-1} F_2(t) + C_3 t^{\beta'-1} F_3(t),$$

$$p = C_1 G_1(t) + C_2 t^{\beta-1} G_2(t) + C_3 t^{\beta'-1} G_3(t),$$

$$q = C_1 H_1(t) + C_2 t^{\beta-1} H_2(t) + C_3 t^{\beta'-1} H_3(t)$$

die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (A) mit der unabhängigen Veränderlichen  $t$  bei festem  $\varphi$ . Um die Funktionen  $z, p, q$  von  $t$  zu erhalten, in welche die den Differentialgleichungen (A), (B) genügenden Funktionen  $z, p, q$  von  $t, \varphi$  übergehen, wenn man für  $\varphi$  einen festen Wert setzt, braucht man nur die Differentialgleichungen (A) zu integrieren, nach-

dem für  $\varphi$  der feste Wert gesetzt ist. Dies gilt auch für  $a = b$ , z. B.  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Die asymptotischen Ausdrücke von  $z, p, q$  für den Fall, daß  $t$  bei festem  $\varphi$  ins Unendliche geht, erhält man auch, indem man die Differentialgleichungen (A) bei festem  $\varphi$  integriert.

## § 3.

Es soll jetzt untersucht werden, wie sich die Lösungen des Differentialgleichungssystems der Funktion  $\Gamma_2(\beta, \beta', x, y)$  bei der Annäherung an den Schnittpunkt  $x = \infty, y = 0$  der beiden singulären Linien  $x = \infty$  und  $y = 0$  verhalten<sup>12)</sup>. Wir wählen für diese Annäherung den hyperbolischen Weg

$$\begin{aligned}x &= at, & y &= \frac{1}{bt}, \\a &= \cos \varphi, & b &= \sin \varphi;\end{aligned}$$

$t$  geht ins Unendliche. Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= a, & \frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{1}{bt^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -bt, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -\frac{a}{b^2 t}\end{aligned}$$

gehen die Differentialgleichungen (a), (b) über in

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}) \quad & \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = ap - \frac{1}{bt^2} q, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\beta'}{t} z - \left(a - \frac{\beta-1}{t}\right) p + \frac{1}{bt^2} q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\beta}{t} z - ap - \left(\frac{\beta'-1}{t} - \frac{1}{bt^2}\right) q; \end{cases} \\ (\mathfrak{B}) \quad & \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -bt p - \frac{a}{b^2 t} q, \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{b}{a} \left[ \left(\beta' - \frac{1}{bt}\right) z + (at - \beta + 1)p - \frac{1}{bt} q \right] - \frac{a}{b^2 t} z, \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} = -bt z - \frac{a}{b} \left[ (at - \beta)z + at p + \left(\beta' - 1 - \frac{1}{bt}\right) q \right]. \end{cases}\end{aligned}$$

Das System (A) mit der unabhängigen Veränderlichen  $t$  hat die Unbestimmtheitsstelle  $t = \infty$ , deren charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} -x, & a, & 0 \\ 0, & -a-x, & 0 \\ 0, & -a, & -x \end{vmatrix}$$

die linearen Elementarteiler  $x, x, x+a$  besitzt.

<sup>12)</sup> Wir stellen uns die Veränderlichen  $x, y$  als reell vor.

I. Der *Doppelwurzel*  $x = 0$  der charakteristischen Gleichung entsprechen formale Reihen

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{t^{r+n}}, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{t^{r'+n}}, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{t^{r+n}}$$

mit den Rekursionsformeln

$$-(r+n-1)z_{n-1} = a p_n - \frac{1}{b} q_{n-2},$$

$$-(r+n-1)p_{n-1} = -\beta' z_{n-1} - a p_n + (\beta-1)p_{n-1} + \frac{1}{b} q_{n-2},$$

$$-(r+n-1)q_{n-1} = \beta z_{n-1} - a p_n - (\beta'-1)q_{n-1} + \frac{1}{b} q_{n-2}.$$

Die zweite bzw. dritte Gleichung ersetzen wir durch die Gleichung, welche man erhält, wenn man sie zur ersten Gleichung addiert und  $a$  durch  $n+1$  ersetzt:

$$(r-\beta'+n)z_n + (r+\beta+n-1)p_n = 0,$$

$$(r+\beta+n)z_n + (r-\beta'+n+1)q_n = 0.$$

Zunächst ist  $p_0 = 0$  und  $(r-\beta')z_0 = 0$ .

1. Ist  $z_0 \neq 0$ , so hat man

$$r = \beta',$$

$$q_0 = -(\beta + \beta')z_0,$$

ferner

$$p_1 = -\frac{\beta'}{a} z_0,$$

$$z_1 = -(\beta + \beta')p_1,$$

$$q_1 = -\frac{\beta + \beta'}{2} z_1;$$

$$p_2 = -(\beta + \beta') \left( \frac{\beta'(\beta' + 1)}{a^2} + \frac{1}{ab} \right) z_0,$$

$$z_2 = -\frac{\beta + \beta' + 1}{2} p_1,$$

$$q_2 = -\frac{\beta + \beta' + 2}{3} z_2.$$

Allgemein sind, wie man durch den Schluß von  $n-1$  auf  $n$  beweist,

$$\frac{z_n}{z_0}, \quad \frac{p_n}{z_0}, \quad \frac{q_n}{z_0}$$

lineare homogene Funktionen von

$$\frac{1}{a^n}, \quad \frac{1}{a^{n-1}b}, \quad \dots, \quad \frac{1}{a^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}b^{\left[\frac{n}{2}\right]}};$$

dabei ist  $\left[\frac{n}{2}\right]$  die größte in  $\frac{n}{2}$  enthaltene ganze Zahl, also

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2} \quad \text{für } n \text{ gerade,}$$

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2} \quad \text{„ „ ungerade.}$$

2. Ist nicht nur  $p_0 = 0$ , sondern auch  $z_0 = 0$ , so ist  $q_0 \neq 0$ ; es ist  
 $r = \beta' - 1$

und  $p_1 = 0$ ; wenn wir die unbestimmt bleibende Größe  $z_1$  gleich Null annehmen, ist auch  $q_1 = 0$ . Wir haben

$$z_1 = p_1 = q_1 = 0;$$

$$p_2 = \frac{1}{a b} q_0,$$

$$z_2 = -(\beta + \beta') p_2,$$

$$q_2 = -\frac{\beta + \beta' + 1}{2} z_2;$$

$$p_3 = -\frac{\beta' + 1}{a} z_2,$$

$$z_3 = -\frac{\beta + \beta' + 1}{2} p_3,$$

$$q_3 = -\frac{\beta + \beta' + 2}{3} z_3.$$

Allgemein sind, wie man durch den Schluß von  $n-1$  auf  $n$  beweist,

$$\frac{z_n}{q_0}, \quad \frac{p_n}{q_0}, \quad \frac{q_n}{q_0}$$

lineare homogene Funktionen von

$$\frac{1}{a^{n-1} b}, \quad \dots, \quad \frac{1}{a^{n - \left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n}{2}\right]}}.$$

Die nach 1. bestimmten Größen  $z, z_n, \dots$  bezeichnen wir mit  $\bar{z}, \bar{z}_n, \dots$ , die nach 2. bestimmten mit  $\bar{\bar{z}}, \bar{\bar{z}}_n, \dots$ . Dann sind  $\bar{z}_0$  und  $\bar{\bar{q}}_0$  zunächst unbestimmt; es ist

$$\bar{p}_0 = 0, \quad \bar{p}_1 = -\frac{\beta'}{a} \bar{z}_0,$$

$$\bar{\bar{p}}_0 = 0, \quad \bar{\bar{z}}_0 = 0, \quad \bar{\bar{z}}_1 = 0, \quad \bar{\bar{p}}_1 = 0, \quad \bar{\bar{q}}_1 = 0, \quad \bar{\bar{p}}_2 = \frac{1}{a b} \bar{\bar{q}}_0.$$

Die Differentialgleichungen (A) haben die Lösung

$$z = \bar{z} + \bar{\bar{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{\rho^{\beta' + n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\bar{z}}_n}{\rho^{\beta' - 1 + n}},$$

$$p = \bar{p} + \bar{\bar{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{p}_n}{\rho^{\beta' + n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\bar{p}}_n}{\rho^{\beta' - 1 + n}},$$

$$q = \bar{q} + \bar{\bar{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{q}_n}{\rho^{\beta' + n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\bar{q}}_n}{\rho^{\beta' - 1 + n}}.$$

oder unter Beschränkung auf die Anfangsglieder der Reihen

$$\begin{aligned} z &= \frac{\bar{z}_0}{\rho^{\beta'}} + \dots, \\ p &= \frac{-\frac{\beta'}{a} \bar{z}_0 + \frac{1}{ab} \bar{q}_0}{\rho^{\beta'} + 1} + \dots, \\ q &= \frac{\bar{q}_0}{\rho^{\beta'} - 1} + \dots \end{aligned}$$

Um  $\bar{z}_0$  und  $\bar{q}_0$  als Funktionen von  $\varphi$  zu bestimmen, benutzen wir die erste und dritte Gleichung (B). Wenn man für  $z, p, q$  die oben angeschriebenen Reihen einsetzt und in der ersten Gleichung die Koeffizienten von  $\frac{1}{\rho^{\beta'}}$ , in der dritten Gleichung die Koeffizienten von  $\frac{1}{\rho^{\beta'-1}}$  vergleicht, erhält man für die Funktionen  $\bar{z}_0, \bar{q}_0$  von  $\varphi$  die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{d\bar{z}_0}{d\varphi} = \beta' \frac{b}{a} \bar{z}_0 - \frac{1}{ab^2} \bar{q}_0, \\ \frac{d\bar{q}_0}{d\varphi} = -\frac{1}{b} \bar{z}_0 - (\beta' - 1) \frac{a}{b} \bar{q}_0. \end{cases}$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \bar{z}_n &= \left( \frac{\bar{A}_{n0}}{a^n} + \frac{\bar{A}_{n-1,1}}{a^{n-1}b} + \dots + \frac{\bar{A}_{n-\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]}}{a^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \right) \bar{z}_0, \\ \bar{q}_n &= \left( \frac{\bar{A}_{n-1,1}}{a^{n-1}b} + \dots + \frac{\bar{A}_{n-\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]}}{a^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \right) \bar{q}_0; \end{aligned}$$

dabei ist

$$\begin{aligned} \bar{A}_{10} &= \beta + \beta', \\ \bar{A}_{20} &= \frac{\beta'(\beta' + 1) \cdot (\beta + \beta')(\beta + \beta' + 1)}{2}, \\ \bar{A}_{11} &= \frac{(\beta + \beta')(\beta + \beta' + 1)}{2}, \\ \bar{A}_{11} &= -(\beta + \beta'), \\ \bar{A}_{21} &= -\frac{(\beta' + 1)(\beta + \beta')(\beta + \beta' + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Wir haben

$$z = \frac{\bar{z}_0}{\rho^{\beta'}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{\bar{z}_0} \rho^n + \frac{\bar{q}_0}{\rho^{\beta'-1}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{q}_n}{\bar{q}_0} \rho^n$$

oder, wenn

$$u = \frac{\bar{z}_0}{\rho^{\beta'}}, \quad v = \frac{\bar{y}_0}{\rho^{\beta'-1}}$$

gesetzt wird und die Gleichungen

$$at = x, \quad bt = \frac{1}{y}$$

berücksichtigt werden,

$$z = uU + vV,$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_{n0}}{x^n} + \frac{\bar{A}_{n-1,1}}{x^{n-1}} y + \dots + \frac{\bar{A}_{n-\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]}}{x^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}} y^{\left[\frac{n}{2}\right]} \right)$$

$$= 1 + \frac{\bar{A}_{10}}{x} + \frac{\bar{A}_{20}}{x^2} + \frac{\bar{A}_{11}}{x} y + \dots,$$

$$V = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_{n-1,1}}{x^{n-1}} y + \dots + \frac{\bar{A}_{n-\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]}}{x^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}} y^{\left[\frac{n}{2}\right]} \right)$$

$$= \frac{\bar{A}_{11}}{x} y + \frac{\bar{A}_{21}}{x^2} y + \dots$$

Es ist

$$du = -\frac{\beta'}{t} u dt + \left( \beta' \frac{b}{a} u - \frac{v}{a b^{\beta' t}} \right) d\varphi,$$

$$dv = \frac{1-\beta'}{t} v dt - \left( \frac{1}{b} t u - (\beta' - 1) \frac{a}{b} v \right) d\varphi.$$

Aus

$$dx = a dt - b t d\varphi,$$

$$dy = -\frac{dt}{b t^2} - \frac{a d\varphi}{b^2 t}$$

folgt

$$dt = a dx - b^2 t^2 dy,$$

$$d\varphi = -\frac{b}{t} dx - a b^2 t dy.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Formeln für  $du, dv$  einsetzt, erhält man für die Funktionen  $u, v$  von  $x, y$  die Differentialgleichungen

$$du = (-\beta' u + y v) \frac{dx}{x} + v dy,$$

$$dv = u dx + (xu + (\beta' - 1)v) \frac{dy}{y}.$$

Die formalen Reihen für  $U, V$  kann man durch Laplacesche Integrale ersetzen, welche für große  $t$  durch die Reihen asymptotisch dargestellt werden. Unter Einführung der konvergenten Potenzreihen von  $\zeta$

$$\bar{w}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_{n0}}{a^n} + \frac{\bar{A}_{n-1,1}}{a^{n-1}b} + \dots \right) \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\bar{\bar{w}}(\zeta) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\bar{\bar{A}}_{n-1,1}}{a^{n-1}b} + \dots \right) \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!},$$

deren Koeffizienten Funktionen von  $\varphi$  sind, hat man

$$U = 1 + \int_0^{\infty} \bar{w}(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta,$$

$$V = \int_0^{\infty} \bar{\bar{w}}(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta.$$

II. Entsprechend der einfachen Wurzel  $\kappa = -a$  der charakteristischen Gleichung setzen wir

$$z = e^{-at} \beta, \quad p = e^{-at} \varphi, \quad q = e^{-at} \eta.$$

Die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = a\beta + ap - \frac{1}{bt^2} \eta,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\beta'}{t} \beta + \frac{\beta-1}{t} p + \frac{1}{bt^2} \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\beta}{t} \beta - ap + \left( a - \frac{\beta'-1}{t} + \frac{1}{bt^2} \right) \eta$$

werden formal befriedigt durch Reihen

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{t^{r+n}}, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{t^{r+n}}, \quad \eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{t^{r+n}}$$

mit den Rekursionsformeln

$$-(r+n-1)\beta_{n-1} = a\beta_n + ap_n - \frac{1}{b} \eta_{n-2},$$

$$-(r+n-1)p_{n-1} = -\beta' \beta_{n-1} + (\beta-1)p_{n-1} + \frac{1}{b} \eta_{n-2},$$

$$-(r+n-1)\eta_{n-1} = -ap_n + a\eta_n + \beta \beta_{n-1} - (\beta'-1)\eta_{n-1} + \frac{1}{b} \eta_{n-2}.$$

Man hat

$$p_0 = \eta_0 = -\beta_0,$$

$$r = 1 - \beta - \beta'.$$

Wenn man den Wert von  $r$  einsetzt und in der zweiten Gleichung  $n$  um 1 vergrößert, hat man die Rekursionsformeln

$$-\beta' z_n + (n - \beta') p_n + \frac{1}{b} q_{n-1} = 0.$$

$$z_n + p_n = \frac{\beta + \beta' - n}{a} p_{n-1} + \frac{1}{a b} q_{n-2},$$

$$q_n - p_n = -\frac{\beta}{a} z_{n-1} + \frac{\beta + 2\beta' - n - 1}{a} q_{n-1} - \frac{1}{a b} q_{n-2}.$$

Zunächst ist

$$p_1 = \left( \frac{\beta'(\beta + \beta' - 1)}{a} + \frac{1}{b} \right) z_0,$$

$$z_1 = -p_1 + \frac{\beta + \beta' - 1}{a} z_0,$$

$$q_1 = p_1 + \frac{2(1 - \beta - \beta')}{a} z_0.$$

Allgemein ist

$$p_n = \frac{\beta'(\beta + \beta' - n)}{n a} z_{n-1} - \frac{1}{n b} q_{n-1} + \frac{\beta'}{n a b} q_{n-2},$$

$$z_n = -p_n + \frac{\beta + \beta' - n}{a} z_{n-1} + \frac{1}{a b} q_{n-2},$$

$$q_n = p_n - \frac{\beta}{a} z_{n-1} + \frac{\beta + 2\beta' - n - 1}{a} q_{n-1} - \frac{1}{a b} q_{n-2}.$$

Hieraus folgt, daß

$$\frac{z_n}{z_0}, \quad \frac{p_n}{z_0}, \quad \frac{q_n}{z_0}$$

ganze homogene Funktionen  $n$ -ten Grades von  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  sind.

Aus der ersten Gleichung (B) oder

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -b t z - b t p - \frac{a}{b^2 t} q$$

folgt durch Einsetzung der Reihen für  $z$ ,  $p$ ,  $q$  und Vergleichung der Glieder mit  $\frac{1}{t'}$

$$\frac{d z_0}{d \varphi} = -b (z_1 + p_1)$$

oder, weil

$$z_1 + p_1 = \frac{\beta + \beta' - 1}{a} z_0$$

ist,

$$\frac{d z_0}{d \varphi} = -(\beta + \beta' - 1) \frac{b}{a} z_0.$$

also

$$3_0 = a^{\beta + \beta' - 1}.$$

Wir haben

$$z = e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3_n}{t^{1-\beta-\beta'+n}}$$

oder, wenn

$$3_n = \left( \frac{A_{n0}}{a^n} + \frac{A_{n-1,1}}{a^{n-1}b} + \dots + \frac{A_{0n}}{b^n} \right) 3_0^{(14)}$$

gesetzt wird,

$$z = e^{-st} \frac{a^{\beta + \beta' - 1}}{t^{1-\beta-\beta'}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{n0}}{a^n} + \frac{A_{n-1,1}}{a^{n-1}b} + \dots \right) \frac{1}{t^n}$$

oder, wenn die Gleichungen

$$at = x, \quad \frac{1}{bt} = y$$

berücksichtigt werden,

$$z = e^{-x} x^{\beta + \beta' - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{n0}}{x^n} + \frac{A_{n-1,1}}{x^{n-1}} y + \dots + A_{0n} y^n \right).$$

Wir ersetzen wieder die formale Reihe durch ein Laplacesches Integral, welches für große  $t$  durch die Reihe asymptotisch dargestellt wird. Unter Einführung der konvergenten Potenzreihe von  $\zeta$

$$w(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_{n0}}{a^n} + \frac{A_{n-1,1}}{a^{n-1}b} + \dots \right) \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}$$

haben wir

$$z = e^{-x} x^{\beta + \beta' - 1} \left( 1 + \int_0^{\infty} w(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta \right).$$

Die in § 1, II hergeleitete Reihe

$$z = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(y) e^{-y}}{x^n},$$

<sup>14)</sup> Es ist  $A_{00} = 1$  und

wegen

$$A_{10} = -(\beta' - 1)(\beta + \beta' - 1), \quad A_{01} = -1$$

$$3_1 = -\left( \frac{(\beta' - 1)(\beta + \beta' - 1)}{a} + \frac{1}{b} \right) 3_0.$$

in welcher  $f_n(y)$  eine ganze Funktion  $n$ -ten Grades von  $y$  ist, geht unter Einführung der beständig konvergenten Reihe

$$f_n(y) e^{-y} = A_{n0} + A_{n1}y + A_{n2}y^2 + \dots$$

über in

$$z = e^{-x} x^{\beta + \beta' - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0} + A_{n1}y + A_{n2}y^2 + \dots}{x^n}$$

oder

$$z = e^{-x} x^{\beta + \beta' - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{n0}}{x^n} + \frac{A_{n-1,1}}{x^{n-1}} y + \dots + A_{0n} y^n \right),$$

das ist die in § 1 gefundene Reihe, in welcher

$$x = at, \quad y = \frac{1}{bt}$$

gesetzt wird.

Nach § 1 war das dort eingeführte Laplacesche Integral

$$\begin{aligned} z &= e^{-x} x^{\beta + \beta' - 1} \left( \sum_{r=0}^n \frac{A_{r0} + A_{r1}y + \dots}{x^r} + \frac{e'_n}{x^n} \right) \\ &= e^{-x} x^{\beta + \beta' - 1} \left( \sum_{r=0}^n \frac{A_{r0} + A_{r1}y + \dots + A_{r,n-r}y^{n-r}}{x^r} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^n \frac{A_{r,n-r+1}y^{n-r+1} + A_{r,n-r+2}y^{n-r+2} + \dots}{x^r} + \frac{e'_n}{x^n} \right) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n \frac{A_{r0} + A_{r1}y + \dots + A_{r,n-r}y^{n-r}}{x^r} \\ = \sum_{r=0}^n \left( \frac{A_{r0}}{x^r} + \frac{A_{r-1,1}}{x^{r-1}} y + \dots + A_{0r} y^r \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x^n \sum_{r=0}^n \frac{A_{r,n-r+1}y^{n-r+1} + A_{r,n-r+2}y^{n-r+2} + \dots}{x^r} \\ = \sum_{r=0}^n (xy)^{n-r} (A_{r,n-r+1}y + A_{r,n-r+2}y^2 + \dots) \\ = \sum_{r=0}^n \left( \frac{a}{b} \right)^{n-r} \left( \frac{A_{r,n-r+1}}{bt} + \frac{A_{r,n-r+2}}{(bt)^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

wenn

$$x = at, \quad y = \frac{1}{bt}$$

gesetzt wird. Setzt man

$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon'_n + \sum_{v=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-v} \left(\frac{A_{r, n-v+1}}{bt} + \dots\right),$$

so ist im Falle  $b \neq 0$

$$\lim \bar{\varepsilon}_n = 0 \quad \text{für } t = \infty,$$

und es besteht die Gleichung

$$z = e^{-x} x^{\beta + \beta' - 1} \left\{ \sum_{r=0}^n \left( \frac{A_{r,0}}{x^r} + \frac{A_{r-1,1}}{x^{r-1}y} + \dots + A_{0,r} y^r \right) + \frac{\bar{\varepsilon}_n}{(bt)^n} \right\}.$$

Die Betrachtung unter II wäre also entbehrlich gewesen; ihr Ergebnis hätte sich aus § 1, II herleiten lassen, weil dort  $\frac{\partial n}{\partial y} = f_n(y)$  für  $y = 0$  endlich ist.

Weil aber in § 1, I die Quotienten  $\frac{\partial n}{\partial y}$  für  $y = 0$  unendlich werden, läßt sich das Ergebnis von § 2, I nicht aus § 1, I herleiten<sup>15)</sup>.

#### § 4.

In Math. Annalen 113, S. 254–281<sup>16)</sup> ist die hypergeometrische Funktion

$$H_4(x, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m-n)(\gamma, n)}{(\delta, m)(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

behandelt. Hierzu werden Ergänzungen und Verbesserungen gegeben, und zwar wird jetzt für die Funktion  $H_4$  dieselbe Methode und Anordnung benutzt wie in § 1–3 für die Funktion  $\Gamma_2$ .

<sup>15)</sup> In M., § 6 ist das Differentialgleichungssystem der Funktion  $\Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y)$  nach derselben Methode behandelt worden wie oben in § 1 das Differentialgleichungssystem der Funktion  $\Gamma_2(\beta, \beta', x, y)$ . Das Differentialgleichungssystem von  $\Phi_2$  hat die formalen Lösungen

$$z = z_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(y)}{x^{\beta+n}} + q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(y)}{x^{\beta+n}}$$

und

$$z = e^x x^{\delta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(y)}{x^n},$$

wobei  $f_n, g_n$  und  $f_n$  ganze Funktionen  $n$ -ten Grades von  $y$  sind, während  $z_0$  wie  $q_0$  eine beständig konvergente Potenzreihe von  $y$  oder das Produkt aus einer solchen Reihe und einer Potenz  $y$  ist. In diesen Ausdrücken für  $z$  kann man  $x = at, y = \frac{1}{bt}$  setzen, so daß eine dem § 3 der gegenwärtigen Arbeit entsprechende Behandlung bei  $\Phi_2$  nicht erforderlich ist.

<sup>16)</sup> Diese Arbeit wird mit B. bezeichnet.

Nach § 4, II bis IV der Dissertation von L. Borngässer findet man die folgenden dem Differentialgleichungssystem von  $H_4$  formal genügenden Reihen:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n \leq m} \frac{(\alpha + \gamma, m)(\alpha + \gamma - \delta + 1, m)(\gamma, n)}{(1, m - n)(1, n)} \left(-\frac{1}{x}\right)^{\alpha + \gamma + m} \left(-\frac{1}{y}\right)^{\gamma + n}, \\ S &= \sum \frac{(\alpha + \gamma, m + n)(\gamma, n)}{(\delta, m)(1, m)(1, n)} x^m \left(\frac{1}{y}\right)^{\gamma + n}, \\ T &= \sum \frac{(\alpha + \gamma - \delta + 1, m + n)(\gamma, n)}{(2 - \delta, m)(1, m)(1, n)} x^{1 - \delta + m} \left(\frac{1}{y}\right)^{\gamma + n} \end{aligned}$$

Das Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems der Funktion  $H_4$  bei der *Annäherung an die singuläre Linie der Unbestimmtheit*  $x = \infty$  wird durch die Reihen B., S. 276 dargestellt. Die Reihe 2. ist bis auf einen konstanten Faktor die Reihe  $R$ , die man schreiben kann:

$$z = x^{-\alpha - \gamma} y^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_m(y)}{x^n},$$

$$f_m(y) = (-1)^m (\alpha + \gamma, m)(\alpha + \gamma - \delta + 1, m) \sum_{n=0}^m \frac{(\gamma, n)}{(1, m - n)(1, n)} \left(-\frac{1}{y}\right)^n.$$

Das Verhalten bei der *Annäherung an die singuläre Linie der Unbestimmtheit*  $y = \infty$  wird dargestellt durch die Reihen B., S. 281 oben. Die beiden Reihen unter 1. können durch die Reihen  $S$  und  $T$  ersetzt werden.

Das Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems von  $H_4$  bei der *Annäherung an die singuläre Stelle*  $x = \infty, y = \infty$  wird durch die Reihen B., S. 260 dargestellt. Die Reihe 1. kann durch die Reihe  $R$  ersetzt werden, die man auch in der Form

$$z = x^{-\alpha - \gamma} y^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_m(y)}{x^n}$$

schreiben und in der man  $x = at, y = bt$  setzen kann, weil  $f_m(y)$  eine ganze Funktion  $m$ -ten Grades von  $\frac{1}{y}$  ist.

Bei der Untersuchung der *Annäherung an die Stelle*  $x = \infty, y = 0$  längs  $x = at, y = \frac{1}{b t}$  muß in B., S. 270–271 folgende Änderung vorgenommen werden<sup>17)</sup>:

<sup>17)</sup> Vgl. § 3.

Die Größen  $z, z_n, \dots$  bezeichnen wir, wenn sie zu  $r = \alpha$  gehören, mit  $\bar{z}, \bar{z}_n, \dots$ , wenn sie zu  $r = \alpha - 1$  gehören, mit  $\bar{\bar{z}}, \bar{\bar{z}}_n, \dots$ . Es ist

$$\begin{aligned}\bar{p}_0 &= 0, \quad \bar{q}_0 = -\gamma \bar{z}_0, \\ \bar{p}_1 &= -\frac{\alpha \bar{z}_0}{a}, \quad \bar{s}_1 = \frac{\alpha \gamma \bar{z}_0}{a} - \frac{\bar{s}_0}{b}, \quad \bar{z}_1 = -\frac{\alpha(\alpha - \delta + 1) \bar{z}_0}{a} - \frac{\bar{z}_0}{b}, \\ \bar{\bar{z}}_0 &= 0, \quad \bar{\bar{p}}_0 = 0, \quad \bar{\bar{s}}_0 = 0, \\ \bar{\bar{z}}_1 &= -\frac{\bar{\bar{q}}_0}{\gamma b}, \quad \bar{\bar{p}}_1 = 0, \quad \bar{\bar{q}}_1 = 0, \quad \bar{\bar{s}}_1 = 0, \\ \bar{\bar{p}}_2 &= \frac{\alpha + \gamma}{\gamma a b} \bar{\bar{q}}_0;\end{aligned}$$

$\bar{z}_0, \bar{s}_0, \bar{q}_0$  sind zunächst unbestimmt. Die Differentialgleichungen für die Funktionen  $z, p, q, s$  von  $t$  haben die formale Lösung

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{t^{\alpha+n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\bar{z}}_n}{t^{\alpha-1+n}},$$

oder

$$\begin{aligned}z &= \frac{\bar{z}_0 - \frac{\bar{\bar{q}}_0}{\gamma b}}{t^{\alpha}} + \dots, \\ p &= \frac{-\frac{\alpha \bar{z}_0}{a} - \frac{\alpha + \gamma}{\gamma a b} \bar{\bar{q}}_0}{t^{\alpha+1}} + \dots, \\ q &= \frac{\bar{\bar{q}}_0}{t^{\alpha-1}} + \dots, \\ s &= \frac{\bar{s}_0}{t^{\alpha}} + \dots\end{aligned}$$

Wenn man in der Gleichung für  $\frac{\partial q}{\partial \varphi}$  die Glieder mit  $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ , in den Gleichungen für  $\frac{\partial s}{\partial \varphi}$  und  $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$  die Glieder mit  $\frac{1}{t^{\alpha}}$  vergleicht, erhält man für die Funktionen  $\bar{q}_0, \bar{s}_0, \bar{z}_0$  von  $\varphi$  die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{q}_0}{d\varphi} &= -\frac{\bar{s}_0}{b} + (1 - \alpha)\bar{q}_0, \\ \frac{d\bar{s}_0}{d\varphi} &= -\frac{\gamma \bar{z}_0}{a b} + \left(\frac{\delta}{a b} - \alpha \frac{a}{b}\right) \bar{s}_0, \\ \frac{d\bar{z}_0}{d\varphi} &= -\frac{\bar{s}_0}{\gamma b^2} + \alpha \frac{a}{b} \bar{z}_0 + \left(\frac{1 - \alpha - \gamma}{\gamma} \frac{a}{b} + \frac{\alpha + \gamma}{\gamma a}\right) \bar{q}_0.\end{aligned}$$

Hiernach ist B., S. 272 oben 1.-3. zu berichtigen, 4. bleibt ungeändert.

Wenn es sich um die Annäherung an  $x = 0, y = \infty$  längs  $x = \frac{1}{at}, y = bt$  handelt, kann man die Reihen 1. und 2. B., S. 268 unten durch die

Reihen  $S$  und  $T$  ersetzen; auf S. 267–268 muß folgende Änderung vorgenommen werden:

Die zu  $r = 1 - \alpha - \gamma$  gehörigen Größen  $\bar{z}, \bar{z}_n, \dots$  bezeichnen wir mit  $\bar{z}, \bar{z}_n, \dots$ , die zu  $r = -\alpha - \gamma$  gehörigen mit  $\bar{\bar{z}}, \bar{\bar{z}}_n, \dots$ . Es ist

$$\bar{q}_0 = -\bar{z}_0, \quad \bar{p}_0 = (1 - \gamma) \bar{z}_0, \quad \bar{s}_0 = \gamma \bar{z}_0,$$

$$\bar{z}_1 + \bar{q}_1 = \frac{(\alpha + \gamma - 1) \bar{z}_0}{b};$$

$$\bar{q}_0 = \bar{z}_0 = 0, \quad \bar{s}_0 = -\bar{p}_0,$$

$$\bar{p}_1 = 0, \quad \bar{s}_1 = 0, \quad \bar{q}_1 = -\bar{z}_1 = \frac{(\alpha + \gamma - \delta) \bar{p}_0}{b},$$

$$\bar{\bar{z}}_2 + \bar{\bar{q}}_2 = \left( \frac{1}{ab} - \frac{(\alpha + \gamma - 1)(\alpha + \gamma - \delta)}{b^2} \right) \bar{p}_0;$$

$\bar{z}_0$  und  $\bar{p}_0$  sind zunächst unbestimmt. Die Differentialgleichungen für die Funktionen  $z, p, q, s$  von  $t$  haben die formale Lösung

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{t^{1-\alpha-\gamma+n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{t^{-\alpha-\gamma+n}},$$

oder

$$z = \frac{\bar{z}_0 + \frac{\delta - \alpha - \gamma}{b} \bar{p}_0}{t^{1-\alpha-\gamma}} + \dots,$$

$$p = \frac{\bar{p}_0}{t^{-\alpha-\gamma}} + \dots,$$

$$q = \frac{-\bar{z}_0 + \frac{\alpha + \gamma - \delta}{b} \bar{p}_0}{t^{1-\alpha-\gamma}} + \dots,$$

$$s = -\frac{\bar{p}_0}{t^{-\alpha-\gamma}} + \dots$$

Setzt man diese Reihen in die Gleichungen für  $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$  und  $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$  ein und vergleicht man in der ersten Gleichung die Glieder mit  $\frac{1}{t^{-\alpha-\gamma}}$ , in der zweiten die Glieder mit  $\frac{1}{t^{1-\alpha-\gamma}}$ , so erhält man für die Funktionen  $\bar{p}_0$  und  $\bar{z}_0$  von  $\varphi$  die Differentialgleichungen

$$\frac{d \bar{p}_0}{d \varphi} = \frac{1}{a} \bar{z}_0 - (\alpha + \gamma) \frac{b}{a} \bar{p}_0,$$

$$\frac{d \bar{z}_0}{d \varphi} = \left( \frac{\alpha + \gamma - \delta}{ab} + (\alpha + \gamma - 1) \frac{a}{b} \right) \bar{z}_0 + \frac{1 - (\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma - \delta)}{ab^2} \bar{p}_0.$$

Hiernach ist B., S. 269 oben 3. und 4. zu berichtigen.

(Eingegangen am 13. 1. 1940.)

# Modulartige lückenlose Ausfüllung des $R_n$ mit kongruenten Würfeln. I.

Von

Oskar Perron in München.

## § 1.

### Die Minkowskische Vermutung.

Dem Problem der lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  mit kongruenten Würfeln habe ich kürzlich zwei Arbeiten gewidmet<sup>1)</sup>. In Übereinstimmung mit diesen wird hier unter einem Würfel des  $R_n$  mit dem Mittelpunkt  $a^1, \dots, a^n$  (Koordinatennummern werden stets als obere Indizes geschrieben) die Gesamtheit der Punkte  $x^1, \dots, x^n$  verstanden, für die

$$-\frac{1}{2} \leq x^v - a^v < \frac{1}{2} \quad (v = 1, \dots, n)$$

ist. Eine lückenlose Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln ist eine Würfelmenge derart, daß jeder Punkt des  $R_n$  genau einem Würfel angehört.

Wenn ein Würfel  $W$  den Mittelpunkt  $a^1, \dots, a^n$  hat, so deuten wir das an durch die Schreibweise

$$W: a^1, a^2, \dots, a^n$$

und nennen  $W$  kurz den „Würfel  $a^1, \dots, a^n$ “. Entsprechend werden die Koordinaten des Mittelpunktes von  $W$  auch kurz die Koordinaten von  $W$  genannt.

Wir fügen jetzt die Forderung hinzu, daß die lückenlose Ausfüllung **modulartig** sein soll. Damit ist gemeint, daß allemal, wenn

$$W_1: a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n$$

$$W_2: a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^n$$

zwei (verschiedene oder gleiche) Würfel der Ausfüllung sind, der Würfel

$$a_1^1 - a_2^1, a_1^2 - a_2^2, \dots, a_1^n - a_2^n$$

<sup>1)</sup> Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 1–26 und 161–180; die beiden Arbeiten werden im folgenden mit I und II zitiert.

ebenfalls der Ausfüllung angehört; wir bezeichnen ihn mit  $W_1 - W_2$ . Daraus folgt dann trivialerweise, daß stets der Nullpunktswürfel  $0, \dots, 0$  der Ausfüllung angehört (als  $W_1 - W_1$ ) und daß, wenn

$$W_1: a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n$$

$$W_2: a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W_r: a_r^1, a_r^2, \dots, a_r^n$$

irgendwelche Würfel der Ausfüllung sind und wenn  $p_1, \dots, p_r$  irgendwelche ganze Zahlen sind, auch der Würfel  $p_1 W_1 + p_2 W_2 + \dots + p_r W_r$ , d. h. der Würfel mit den Koordinaten

$$p_1 a_1^r + p_2 a_2^r + \dots + p_r a_r^r \quad (r = 1, \dots, n)$$

der Ausfüllung angehört.

Es ist leicht zu sehen, daß eine modularartige Ausfüllung stets „gitterförmig“ ist, d. h. daß es in der Ausfüllung stets  $n$  (keineswegs eindeutig bestimmte) Würfel

$$W_1: a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n$$

$$W_2: a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W_n: a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^n$$

(1.1)

gibt derart, daß die sämtlichen Würfel der Ausfüllung, und zwar jeder genau einmal, durch den Ausdruck

$$(1.2) \quad p_1 W_1 + p_2 W_2 + \dots + p_n W_n$$

geliefert werden, wenn das System  $p_1, \dots, p_n$  alle Systeme ganzer Zahlen durchläuft; und wegen der Lückenlosigkeit ergibt sich aus Minkowskischen Sätzen weiter, daß dabei

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots\dots\dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \pm 1$$

ist. Wir brauchen diese Folgerungen jedoch nicht. Daß umgekehrt eine gitterförmige Ausfüllung stets modularartig ist, ist trivial.

Minkowski hat nun vermutet, daß man die Matrix  $\|a_i^r\|$  stets so wählen kann, daß nach passender Umnummerierung der Koordinaten in der Diagonale (Hauptdiagonale) lauter Einser und unterhalb der Diagonale lauter Nullen stehen. Daß umgekehrt, wenn die Matrix  $\|a_i^r\|$  diese Eigenschaft hat, die

Würfel (1. 2) eine modulartige lückenlose Ausfüllung des  $R_n$  liefern, ist klar. Denn die Koordinaten des Würfels (1. 2) sind dann bei passender Numerierung

$$(1.3) \quad \begin{array}{l} p_1, \\ p_1 a_1^2 + p_2, \\ p_1 a_1^3 + p_2 a_2^3 + p_3, \\ \dots \\ p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \dots + p_{n-1} a_{n-1}^n + p_n, \end{array}$$

und damit ein beliebiger Punkt  $x^1, \dots, x^n$  dem Würfel angehört, muß

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \leq x^1 - p_1 < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} \leq x^2 - p_1 a_1^2 - p_2 < \frac{1}{2}, \\ \dots \\ -\frac{1}{2} \leq x^n - p_1 a_1^n - p_2 a_2^n - \dots - p_{n-1} a_{n-1}^n - p_n < \frac{1}{2} \end{array}$$

sein; daraus findet man die ganzen Zahlen  $p_1, \dots, p_n$  der Reihe nach eindeutig.

Dagegen ist der Beweis der Minkowskischen Vermutung bis heute nicht geglückt<sup>2)</sup>. Sie wird in dieser Arbeit für  $n \leq 8$  als richtig nachgewiesen und in einer anschließenden Arbeit auch noch für  $n = 9$ .

## § 2.

### Umgestaltung der Minkowskischen Vermutung.

Bei jeder (auch nicht modulartigen) lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln gilt der

**Satz A.** Zu jedem Punkt  $c^1, \dots, c^n$  des  $R_n$  gibt es in der Ausfüllung genau einen Würfel  $a^1, \dots, a^n$  derart, daß

$$c^v \leq a^v < c^v + 1 \quad (v = 1, \dots, n)$$

ist. — Allgemeiner gibt es, wenn man die Koordinatenindizes  $v$  irgendwie in zwei Klassen teilt, von denen die eine auch leer sein kann, genau einen Würfel  $a^1, \dots, a^n$  derart, daß

$$\begin{array}{ll} c^v \leq a^v < c^v + 1 & \text{für die } v \text{ der ersten Klasse,} \\ c^v - 1 < a^v \leq c^v & \text{für die } v \text{ der zweiten Klasse} \end{array}$$

ist<sup>3)</sup>.

Wie in II bezeichnen jetzt kleine griechische Buchstaben, die mit einem oberen Index (als Koordinatennummer) und eventuell noch mit irgendwelchen unteren Indizes versehen sind, stets Zahlen des halboffenen Intervalls

$$(J) \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

<sup>2)</sup> Über die Literatur vgl. man die Einleitung von I.

<sup>3)</sup> Vgl. I, Satz 5. Dort steht für die  $v$  der zweiten Klasse  $c^v + 1$  an Stelle von  $c^v$ .

Den Satz A werden wir dann ohne ausdrückliche Bezugnahme auf ihn stets in der Weise anwenden, daß wir sagen, in einer gegebenen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  gibt es zu einem beliebig gegebenen Punkt  $c^1, \dots, c^n$  den Würfel

$$c^1 + \alpha^1, c^2 + \alpha^2, \dots, c^n + \alpha^n,$$

wobei die  $\alpha^r$  bei Bedarf auch durch andere kleine griechische Buchstaben ersetzt und noch mit unteren Indizes versehen sein können. Von den Zahlen  $\alpha^r$  ist dabei im allgemeinen weiter nichts bekannt, als daß sie im Intervall (J) liegen und eindeutig bestimmt sind.

Allgemeiner werden wir bei beliebig gegebenen Vorzeichen  $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$  ( $= \pm 1$ ) sagen, in der Ausfüllung gibt es den Würfel

$$c^1 + \epsilon^1 \alpha^1, c^2 + \epsilon^2 \alpha^2, \dots, c^n + \epsilon^n \alpha^n.$$

wobei für die  $\alpha^r$  wieder dasselbe gilt wie vorhin.

Weiter brauchen wir noch den

**Satz B.** Zwei verschiedene Würfel einer lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  haben wenigstens eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinatendifferenz<sup>4)</sup>.

Von jetzt an betrachten wir nur noch *modulartige* lückenlose Ausfüllungen. Einer solchen Ausfüllung gehört zunächst nach § 1 der Nullpunktswürfel  $W_0: 0, \dots, 0$  an, und weil dann jeder Würfel  $W$  als Differenz  $W - W_0$  geschrieben werden kann, folgt aus Satz B sogleich

**Satz C.** Bei einer modulartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln hat jeder vom Nullpunktswürfel verschiedene Würfel wenigstens eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate.

Betrachten wir nun irgendeine modulartige lückenlose Ausfüllung, so gehören ihr nach dem oben Gesagten insbesondere die  $n$  Würfel

$$W_1: 1 + \alpha_1^1, 0 + \alpha_1^2, \dots, 0 + \alpha_1^n$$

$$W_2: 0 + \alpha_2^1, 1 + \alpha_2^2, \dots, 0 + \alpha_2^n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$W_n: 0 + \alpha_n^1, 0 + \alpha_n^2, \dots, 1 + \alpha_n^n$$

an. Da jeder eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate haben muß, ist  $\alpha_1^1 = 0, \dots, \alpha_n^n = 0$ . Man hat also das Schema

$$W_1: 1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots, \alpha_1^n$$

$$W_2: \alpha_2^1, 1, \alpha_2^3, \dots, \alpha_2^n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$W_n: \alpha_n^1, \alpha_n^2, \alpha_n^3, \dots, 1.$$

Dieses nennen wir die **Grundfigur** der betrachteten Ausfüllung.  $W_1, \dots, W_n$  heißen die  $n$  **Grundwürfel** der Ausfüllung. Wichtig ist, daß die  $\alpha_i^i$  stets im Intervall (J) liegen.

<sup>4)</sup> Vgl. I, Satz 9.

Bemerkung. Die Begriffe „Grundfigur“ und „Grundwürfel“ ohne Bezugnahme auf eine Ausfüllung gibt es nicht. Wenn im folgenden häufig die Wortverbindung „eine Grundfigur des  $R_n$ “ gebraucht wird, so ist das immer nur eine Abkürzung für „die Grundfigur einer (gewissen) modulartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln.“

Wenn die Minkowskische Vermutung zutrifft, so sieht man leicht, daß in der Grundfigur nach passender Umnummerierung der Koordinaten und nach der gleichen Umnummerierung der  $n$  Grundwürfel, so daß die Einsen in der Diagonale bleiben, unterhalb der Diagonale lauter Nullen stehen. Denn wenn man die Koordinaten des  $\lambda$ -ten Grundwürfels  $W_\lambda$  in der Minkowskischen Gestalt (1. 3) schreiben will, so findet man der Reihe nach die ganzen Zahlen  $p_1, \dots, p_n$ , und zwar ist speziell  $p_1 = 0, p_2 = 0, \dots, p_{\lambda-1} = 0$ ; also  $\alpha_1^1 = 0, \alpha_2^2 = 0, \dots, \alpha_{\lambda-1}^{\lambda-1} = 0$ .

Es gilt aber auch die Umkehrung: Wenn bei jeder modulartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln die Grundfigur so beschaffen ist, daß nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten und der Grundwürfel unterhalb der Diagonale lauter Nullen stehen, dann trifft die Minkowskische Vermutung zu. In der Tat hat ja dann die Matrix der Grundfigur bereits die nach § 1 von Minkowski vermutete Gestalt, und die Gesamtheit aller Würfel der Ausfüllung ergibt sich aus den Grundwürfeln  $W_1, \dots, W_n$  wie in § 1 in der Gestalt  $p_1 W_1 + \dots + p_n W_n$  mit ganzzahligen  $p_i$ , und zwar jeder Würfel genau einmal.

Wir wollen das Kriterium noch etwas umformen. Zu dem Zweck nennen wir die mit den  $\alpha_i^\mu$  einer Grundfigur gebildeten Produkte

$$\begin{aligned} \alpha_i^\mu \alpha_\mu^\lambda & \quad (\lambda \neq \mu) \\ \alpha_i^\mu \alpha_\mu^\lambda \alpha_\lambda^\nu & \quad (\lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu, \mu \neq \nu) \\ & \dots \dots \dots \\ \alpha_i^{\lambda_1} \alpha_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dots \alpha_{\lambda_{r-1}}^{\lambda_r} \alpha_{\lambda_r}^{\lambda_1} & \quad (\lambda_i \neq \lambda_k \text{ für } i \neq k) \end{aligned}$$

**Zyklen** (zweigliedrige, dreigliedrige, ...,  $r$ -gliedrige,  $r \leq n$ ). Wenn man nun die Koordinaten und Grundwürfel gemäß der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n \end{pmatrix}$$

umnummeriert und die neue Grundfigur mit

$$\begin{aligned} \overline{W}_1: & \quad 1, \beta_1^2, \beta_1^3, \dots, \beta_1^n \\ \overline{W}_2: & \quad \beta_2^1, 1, \beta_2^3, \dots, \beta_2^n \\ & \dots \dots \dots \\ \overline{W}_n: & \quad \beta_n^1, \beta_n^2, \beta_n^3, \dots, 1 \end{aligned}$$

bezeichnet, so ist  $W_1 = \overline{W}_{a_1}$ ,  $\alpha_1^{\mu} = \beta_{a_1}^{\mu}$ . Daher ist jeder  $r$ -gliedrige Zyklus der  $\alpha_1^{\mu}$  gleich einem  $r$ -gliedrigen Zyklus der  $\beta_1^{\mu}$  und umgekehrt. Die Gesamtheit aller Zyklen ist daher gegenüber solchen Umnumerierungen invariant. Wenn nun in der Grundfigur unterhalb der Diagonale lauter Nullen stehen, so sind offenbar alle Zyklen gleich 0, weil jeder Zyklus wenigstens einen Faktor hat, der unterhalb der Diagonale steht. Daher sind, wenn durch eine geeignete Umnumerierung diese Anordnung erzielt werden kann, ebenfalls alle Zyklen gleich 0.

Es gilt aber auch die Umkehrung: Wenn in einer Grundfigur alle Zyklen gleich 0 sind, dann kann durch geeignete Umnumerierung von Koordinaten und Grundwürfeln erreicht werden, daß in der neuen Grundfigur unterhalb der Diagonale lauter Nullen stehen. In der Tat sieht man zunächst, daß bei mindestens einem Grundwürfel alle Koordinaten abgesehen von dem Einser gleich 0 sind. Denn wenn jeder Grundwürfel außer dem Einser noch eine von 0 verschiedene Koordinate hätte,  $W_1$  etwa die Koordinate  $\alpha_1^1$ , sodann  $W_2$  die Koordinate  $\alpha_1^2$ , sodann  $W_3$  die Koordinate  $\alpha_1^3$  usw., so käme man einmal zu einem Index  $\tau$ , der schon vorher da war, etwa  $\tau = \lambda$ , während der vorausgehende Index  $\sigma$  noch nicht da war. Dann wäre aber der Zyklus  $\alpha_1^{\sigma} \alpha_{\mu}^{\tau} \dots \alpha_0^{\sigma} \alpha_{\mu}^{\lambda}$  von 0 verschieden, entgegen der Annahme. Wir wollen einen Grundwürfel, bei dem alle Koordinaten außer dem Einser gleich 0 sind, als  $n$ -ten Grundwürfel  $W_n$  wählen, wodurch auch eine ganz bestimmte Koordinate als die  $n$ -te numeriert wird, damit der Einser von  $W_n$  in der Diagonale steht. Wenn man jetzt von dem Grundwürfel  $W_n$  und von der  $n$ -ten Koordinate absieht, so zeigt eine ganz analoge Überlegung, daß unter den andern Grundwürfeln einer ist, bei dem außer dem Einser und eventuell auch der  $n$ -ten Koordinate alle Koordinaten gleich 0 sind. Diesen wählen wir als  $W_{n-1}$ , wodurch auch eine ganz bestimmte Koordinate als die  $(n-1)$ -te numeriert wird. So fortfahrend, bekommt man die gewünschte Numerierung, bei der in der Grundfigur unterhalb der Diagonale lauter Nullen stehen.

Hiernach läßt sich nun die Minkowskische Vermutung auch folgendermaßen formulieren:

**Umgestaltete Minkowskische Vermutung:** Bei jeder modularartigen lückelosen Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln sind in der Grundfigur alle Zyklen gleich 0.

### § 3.

#### Einige allgemeine Sätze über Grundfiguren.

Beim Beweis für die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung in der soeben angegebenen Formulierung werden wir schrittweise vorgehen, indem wir zuerst das Verschwinden aller zweigliedrigen Zyklen beweisen, dann das Verschwinden aller dreigliedrigen Zyklen, usw. Dabei wird ständig

von einigen allgemeinen Sätzen Gebrauch zu machen sein, die wir in diesem Paragraphen beweisen wollen.

**Satz 1.** Sind  $W_1, \dots, W_n$  die  $n$  Grundwürfel einer Grundfigur des  $R_n$  und sind  $p_1, \dots, p_n$  irgendwelche ganze Zahlen, so ist der Würfel  $p_1 W_1 + \dots + p_n W_n$  entweder der Nullpunktwürfel, oder er hat wenigstens eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz C.

Der Beweis für das Verschwinden aller  $r$ -gliedrigen Zyklen wird stets indirekt geführt; indem wir annehmen, es gäbe einen von 0 verschiedenen  $r$ -gliedrigen Zyklus. Und zwar werden wir stets annehmen, daß speziell der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \dots \alpha_{r-1}^r \alpha_r^1$  von 0 verschieden sei; denn das läßt sich nötigenfalls durch Umnummerieren der  $n$  Koordinaten und der  $n$  Grundwürfel so einrichten, bedeutet also keine Beschränkung der Allgemeinheit.

**Satz 2.** In einer Grundfigur des  $R_n$  sind alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0.

Beweis. Nach dem soeben Gesagten genügt es, das Verschwinden des Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^1$  zu beweisen. Dazu betrachten wir die ersten zwei Grundwürfel

$$W_1: 1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots, \alpha_1^n$$

$$W_2: \alpha_2^1, 1, \alpha_2^3, \dots, \alpha_2^n.$$

Wenn nun  $\alpha_1^2 \alpha_2^1 \neq 0$  wäre, so wäre der Würfel

$$W_1 - W_2: 1 - \alpha_2^1, \alpha_1^2 - 1, \alpha_1^3 - \alpha_2^3, \dots, \alpha_1^n - \alpha_2^n$$

nicht der Nullpunktwürfel und er hätte auch keine von 0 verschiedene ganzzahlige Koordinate (man erinnere sich, daß ja immer  $0 \leq \alpha_i^n < 1$  und jetzt speziell noch  $\alpha_1^2 \neq 0$ ,  $\alpha_2^1 \neq 0$  ist). Das steht aber im Widerspruch mit Satz 1; also ist  $\alpha_1^2 \alpha_2^1 = 0$ . W. z. b. w.

Mit Satz 2 ist die Kunst, was ein beliebiges  $n$  anbelangt, leider bereits zu Ende. Schon das Verschwinden der dreigliedrigen Zyklen vermag ich nicht mehr allgemein, sondern nur noch für kleine Werte von  $n$  zu beweisen. Dabei werden aber dauernd noch einige Sätze gebraucht, die sich immerhin für beliebiges  $n$  formulieren und beweisen lassen, was jetzt geschehen soll.

**Satz 3.** Wenn in einer Grundfigur des  $R_n$  der  $r$ -gliedrige Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \dots \alpha_{r-1}^r \alpha_r^1$ , wo  $r \geq 3$  ist, von 0 verschieden ist, während alle Zyklen mit weniger als  $r$  Gliedern, in denen keine von 1, 2,  $\dots$ ,  $r$  verschiedenen Indizes vorkommen, gleich 0 sind, dann haben die ersten  $r$  Grundwürfel dieser Grundfigur das folgende Aussehen:

$$W_1: 1, \alpha_1^2, 0, \dots, 0, 0, \alpha_1^{r+1}, \dots, \alpha_1^n$$

$$W_2: 0, 1, \alpha_2^3, \dots, 0, 0, \alpha_2^{r+1}, \dots, \alpha_2^n$$

$$\dots$$

$$W_{r-1}: 0, 0, 0, \dots, 1, \alpha_{r-1}^r, \alpha_{r-1}^{r+1}, \dots, \alpha_{r-1}^n$$

$$W_r: \alpha_r^1, 0, 0, \dots, 0, 1, \alpha_r^{r+1}, \dots, \alpha_r^n.$$

Beweis. Es ist zu zeigen, daß alle  $\alpha_i^\mu$  gleich 0 sind, bei denen

$$1 < \lambda + 1 < \mu \leq r$$

oder

$$1 \leq \mu < \lambda \leq r, \text{ wobei nicht beidemale Gleichheit.}$$

Nun gehört ein  $\alpha_1^\mu$  der ersten Sorte dem Zyklus

$$\alpha_1^\mu \alpha_\mu^{\mu+1} \alpha_{\mu+1}^{\mu+2} \dots \alpha_{r-1}^r \alpha_r^1 \alpha_1^2 \dots \alpha_{\lambda-1}^1$$

an. Dieser hat  $r - \mu + \lambda + 1$  Glieder, also weniger als  $r$  Glieder, und es kommen keine von  $1, 2, \dots, r$  verschiedenen Indizes vor, so daß er nach Voraussetzung gleich 0 ist. In dem Zyklus ist aber abgesehen vom Faktor  $\alpha_1^\mu$  jeder Faktor nach Voraussetzung von 0 verschieden; also ist  $\alpha_1^\mu = 0$ . Ein  $\alpha_1^\mu$  der zweiten Sorte gehört dem Zyklus

$$\alpha_1^\mu \alpha_\mu^{\mu+1} \alpha_{\mu+1}^{\mu+2} \dots \alpha_{\lambda-1}^1$$

an, der  $\lambda - \mu + 1$  Glieder, also wieder weniger als  $r$  Glieder hat und keine von  $1, 2, \dots, r$  verschiedenen Indizes enthält. Nun schließt man genau wie vorhin.

**Zusatz zu Satz 3.** Die Sonderrolle der Indizes  $1, 2, \dots, r$  kann natürlich auch von irgendwelchen andern Indizes übernommen werden. Ist z. B. der Zyklus  $\alpha_3^7 \alpha_7^6 \alpha_6^5 \alpha_5^3$  von 0 verschieden, während alle Zyklen mit weniger als vier Gliedern, in denen keine von  $3, 7, 6, 5$  verschiedenen Indizes vorkommen, gleich 0 sind, und schreibt man die Koordinaten und Grundwürfel in der durch den Zyklus bestimmten Reihenfolge  $3, 7, 6, 5, \dots$ , so erhält man das Bild

$$\begin{aligned} W_3: & 1, \quad \alpha_3^7, \quad 0, \quad 0, \quad \dots \\ W_7: & 0, \quad 1, \quad \alpha_7^6, \quad 0, \quad \dots \\ W_6: & 0, \quad 0, \quad 1, \quad \alpha_6^5, \quad \dots \\ W_5: & \alpha_5^3, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad \dots \end{aligned}$$

**Satz 4.** Wenn eine Grundfigur des  $R_n$ , wo  $n \geq 3$  ist, das Aussehen

$$(3.1) \quad \begin{array}{cccccc} W_1: & 1, & \alpha_1^2, & \alpha_1^3, & \dots, & \alpha_1^{n-1}, & \alpha_1^n \\ W_2: & \alpha_2^1, & 1, & \alpha_2^3, & \dots, & \alpha_2^{n-1}, & \alpha_2^n \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n-1}: & \alpha_{n-1}^1, & \alpha_{n-1}^2, & \alpha_{n-1}^3, & \dots, & 1, & \alpha_{n-1}^n \\ W_n: & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \end{array}$$

hat, so daß also alle  $\alpha_n^\mu$  gleich 0 sind, so bilden die  $(n-1)$ -dimensionalen Würfel

$$(3.2) \quad \begin{array}{cccccc} W_1^*: & 1, & \alpha_1^2, & \alpha_1^3, & \dots, & \alpha_1^{n-1} \\ W_2^*: & \alpha_2^1, & 1, & \alpha_2^3, & \dots, & \alpha_2^{n-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n-1}^*: & \alpha_{n-1}^1, & \alpha_{n-1}^2, & \alpha_{n-1}^3, & \dots, & 1 \end{array}$$

eine Grundfigur des  $R_{n-1}$ .

Beweis. Die gegebene Grundfigur des  $R_n$  gehört zu einer gewissen modulartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln. Ist  $W$  irgendein Würfel dieser Ausfüllung, so gehören auch die Würfel  $W + pW_n$ , wo  $p$  alle ganzen Zahlen durchläuft, der Ausfüllung an. Diese Würfel, die in den ersten  $n-1$  Koordinaten übereinstimmen, während sie sich in der  $n$ -ten Koordinate um ganze Zahlen unterscheiden, vereinigen wir zu einer Klasse. So zerfällt die Gesamtheit aller Würfel der Ausfüllung in unendlich viele Klassen. Wir wählen aus jeder Klasse einen Repräsentanten, und zwar denjenigen eindeutig bestimmten Würfel, dessen  $n$ -te Koordinate den Ungleichungen  $0 \leq x^n < 1$  genügt. Insbesondere sind dann die ersten  $n-1$  Grundwürfel die Repräsentanten von  $n-1$  verschiedenen Klassen. Nun denken wir uns alle Repräsentanten irgendwie aufgeschrieben<sup>5)</sup>:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \bar{W}_1: & a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{n-1}, a_1^n \\ \bar{W}_2: & a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{n-1}, a_2^n \\ \bar{W}_3: & a_3^1, a_3^2, \dots, a_3^{n-1}, a_3^n \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die ersten  $n-1$  Grundwürfel

$$(3.4) \quad \begin{aligned} W_1: & 1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots, \alpha_1^{n-1}, \alpha_1^n \\ W_2: & \alpha_2^1, 1, \alpha_2^3, \dots, \alpha_2^{n-1}, \alpha_2^n \\ & \dots \dots \dots \\ W_{n-1}: & \alpha_{n-1}^1, \alpha_{n-1}^2, \alpha_{n-1}^3, \dots, 1, \alpha_{n-1}^n \end{aligned}$$

sind natürlich dabei.

Die Gesamtheit aller Würfel der Ausfüllung wird jetzt durch den Ausdruck

$$\bar{W}_j + pW_n \quad \left( \begin{array}{l} j = 1, 2, 3, \dots \\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right)$$

geliefert, und zwar jeder Würfel genau einmal. Ist daher  $x^1, \dots, x^n$  irgendein Punkt des  $R_n$ , so gibt es genau einen Würfel  $\bar{W}_j + pW_n$ , d. h. genau ein Wertepaar  $j, p$  derart, daß

$$-\frac{1}{2} \leq x^r - a_j^r < \frac{1}{2} \quad (v = \dots, n-1)$$

$$-\frac{1}{2} \leq x^n - (a_j^n + p) < \frac{1}{2}$$

ist. Daraus folgt dann, daß, wenn  $x^1, \dots, x^{n-1}$  irgendein Punkt des  $R_{n-1}$  ist, es genau einen Wert  $j$  gibt, für den

$$-\frac{1}{2} \leq x^r - a_j^r < \frac{1}{2} \quad (v = 1, \dots, n-1)$$

<sup>5)</sup> Es sind abzählbar unendlich viele (vgl. I, Satz 3); aber das ist hier gar nicht wesentlich.

ist. Das besagt aber, daß die  $(n-1)$ -dimensionalen Würfel

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \bar{W}_1^*: & a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{n-1} \\ \bar{W}_2^*: & a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{n-1} \\ \bar{W}_3^*: & a_3^1, a_3^2, \dots, a_3^{n-1} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

eine lückenlose Ausfüllung des  $R_{n-1}$  bilden, und diese ist modular. Denn eine Differenz  $\bar{W}_j - \bar{W}_k$  ist stets gleich einem  $\bar{W}_l + pW_n$ , woraus folgt:  $\bar{W}_j^* - \bar{W}_k^* = \bar{W}_l^*$ ; und das besagt, daß die Ausfüllung (3.5) modular ist.

Da nun unter den  $n$ -dimensionalen Würfeln (3.3) insbesondere die  $n-1$  Würfel (3.4) vorkommen, so kommen unter den  $(n-1)$ -dimensionalen Würfeln (3.5) die  $n-1$  folgenden vor:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} W_1^*: & 1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots, \alpha_1^{n-1} \\ W_2^*: & \alpha_2^1, 1, \alpha_2^3, \dots, \alpha_2^{n-1} \\ & \dots \dots \dots \\ W_{n-1}^*: & \alpha_{n-1}^1, \alpha_{n-1}^2, \alpha_{n-1}^3, \dots, 1. \end{aligned}$$

Diese bilden dann offenbar die Grundfigur der durch die  $(n-1)$ -dimensionalen Würfel (3.5) gelieferten modularartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_{n-1}$ . Da aber die Figur (3.6) mit (3.2) identisch ist, so ist damit Satz 4 bewiesen.

**Satz 5.** Wenn für einen gewissen Wert von  $n$  die Minkowskische Vermutung im  $R_{n-1}$  zutrifft und wenn bei einer gegebenen modularartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$  mit Würfeln unter den  $n$  Grundwürfeln sich einer befindet, dessen Koordinaten außer dem Einser alle gleich 0 sind, so sind bei der Grundfigur dieser Ausfüllung alle Zyklen gleich 0.

**Beweis.** Indem wir die  $n$  Koordinaten und die  $n$  Grundwürfel unserer Ausfüllung entsprechend numerieren, dürfen wir annehmen, daß  $W_n$  derjenige Grundwürfel ist, bei dem außer dem Einser alle Koordinaten gleich 0 sind. Die Grundfigur der Ausfüllung hat dann das Aussehen (3.1). Nach Satz 4 bilden dann die  $(n-1)$ -dimensionalen Würfel (3.2) eine Grundfigur des  $R_{n-1}$ . In dieser sind, da nach Voraussetzung im  $R_{n-1}$  die Minkowskische Vermutung zutrifft, alle Zyklen gleich 0. Dann sind aber auch in der Grundfigur (3.1) alle Zyklen gleich 0. Denn wenn in einem solchen Zyklus der Index  $n$  vorkommt, ist er gleich 0, weil alle  $\alpha_n^u$  gleich 0 sind. Wenn aber der Index  $n$  nicht vorkommt, so ist der Zyklus zugleich ein Zyklus von (3.2), also wieder gleich 0.

**Satz 6.** Wenn von einer Grundfigur des  $R_n$ , wo  $n \geq 3$ , bekannt ist, daß alle Zyklen mit höchstens  $n-1$  Gliedern gleich 0 sind, so sind in dieser Grundfigur auch alle  $n$ -gliedrigen, also überhaupt alle Zyklen gleich 0.

Beweis. Nehmen wir an, daß der  $n$ -gliedrige Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \dots \alpha_{n-1}^n \alpha_n^1$  von 0 verschieden sei, so haben die  $n$  Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$\begin{array}{l} W_1: \quad 1, \alpha_1^2, 0, \dots, 0, 0 \\ W_2: \quad 0, 1, \alpha_2^3, \dots, 0, 0 \\ \dots \dots \dots \\ W_{n-1}: 0, 0, 0, \dots, 1, \alpha_{n-1}^n \\ W_n: \quad \alpha_n^1, 0, 0, \dots, 0, 1. \end{array}$$

Dann hat aber der Würfel  $W_1 + W_2 + \dots + W_n$  keine ganzzahlige Koordinate, was nach Satz 1 nicht möglich ist.

Satz 7. Wenn von einer Grundfigur des  $R_n$ , wo  $n \geq 4$ , bekannt ist, daß alle Zyklen mit höchstens  $n - 2$  Gliedern gleich 0 sind, so sind in dieser Grundfigur auch alle  $(n - 1)$ -gliedrigen, also nach Satz 6 überhaupt alle Zyklen gleich 0.

Beweis. Nehmen wir an, daß der  $(n - 1)$ -gliedrige Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \dots \alpha_{n-2}^{n-1} \alpha_{n-1}^1$  von 0 verschieden sei, so haben die ersten  $n - 1$  Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$\begin{array}{l} W_1: \quad 1, \alpha_1^2, 0, \dots, 0, 0, \alpha_1^n \\ W_2: \quad 0, 1, \alpha_2^3, \dots, 0, 0, \alpha_2^n \\ \dots \dots \dots \\ W_{n-2}: 0, 0, 0, \dots, 1, \alpha_{n-2}^{n-1}, \alpha_{n-2}^n \\ W_{n-1}: \alpha_{n-1}^1, 0, 0, \dots, 0, 1, \alpha_{n-1}^n. \end{array}$$

Nun muß nach Satz 1 der Würfel  $W_1 - W_2 \pm W_3 \pm \dots \pm W_{n-1}$  bei jeder Vorzeichenkombination stets eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate haben, da es offenbar nie der Nullpunktswürfel ist. Aber die ersten  $n - 1$  Koordinaten sind gewiss nicht ganzzahlig, also muß die letzte Koordinate, d. h. das Aggregat

$$\alpha_1^n - \alpha_2^n \pm \alpha_3^n \pm \dots \pm \alpha_{n-1}^n,$$

eine ganze, von 0 verschiedene Zahl sein. Nun kann man aber die Vorzeichen offenbar der Reihe nach so wählen, daß man bei der sukzessiven Hinzufügung des nächsten Aggregatgliedes immer zwischen  $-1$  und  $1$  bleibt, so daß das Resultat gewiß keine ganze, von 0 verschiedene Zahl ist. Unsere Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt.

Satz 8. Wenn von einer Grundfigur des  $R_n$ , wo  $n \geq 5$ , bekannt ist, daß alle Zyklen mit höchstens  $n - 3$  Gliedern gleich 0 sind, so sind in dieser Grundfigur auch alle  $(n - 2)$ -gliedrigen, also nach Satz 7 überhaupt alle Zyklen gleich 0.

Beweis. Nehmen wir an, daß der  $(n - 2)$ -gliedrige Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \dots \alpha_{n-3}^{n-2} \alpha_{n-2}^1$  von 0 verschieden sei, so haben die  $n$  Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$\begin{array}{l} W_1: \quad 1, \alpha_1^2, 0, \dots, 0, \alpha_1^{n-1}, \alpha_1^n \\ W_2: \quad 0, 1, \alpha_2^3, \dots, 0, \alpha_2^{n-1}, \alpha_2^n \\ \dots \dots \dots \\ W_{n-2}: \alpha_{n-2}^1, 0, 0, \dots, 1, \alpha_{n-2}^{n-1}, \alpha_{n-2}^n \\ W_{n-1}: \alpha_{n-1}^1, \alpha_{n-1}^2, \alpha_{n-1}^3, \dots, \alpha_{n-1}^{n-2}, 1, \alpha_{n-1}^n \\ W_n: \quad \alpha_n^1, \alpha_n^2, \alpha_n^3, \dots, \alpha_n^{n-2}, \alpha_n^{n-1}, 1. \end{array}$$

Da alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, ist insbesondere  $\alpha_{n-1}^n \alpha_n^{n-1} = 0$ . Indem wir eventuell die Nummern  $n-1$  und  $n$  bei Koordinaten und Grundwürfeln vertauschen, dürfen wir  $\alpha_n^{n-1} = 0$  annehmen. Wenn dann die Koordinaten

$$(3.7) \quad \alpha_n^1, \alpha_n^2, \dots, \alpha_n^{n-2}$$

auch alle gleich 0 wären, so würden nach Satz 4 die  $(n-1)$ -dimensionalen Würfel

$$\begin{array}{ccccccc} W_1^*: & 1, & \alpha_1^2, & 0, & \dots, & 0, & \alpha_1^{n-1} \\ W_2^*: & 0, & 1, & \alpha_2^3, & \dots, & 0, & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n-2}^*: & \alpha_{n-2}^1, & 0, & 0, & \dots, & 1, & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ W_{n-1}^*: & \alpha_{n-1}^1, & \alpha_{n-1}^2, & \alpha_{n-1}^3, & \dots, & \alpha_{n-1}^{n-2}, & 1 \end{array}$$

eine Grundfigur des  $R_{n-1}$  bilden, bei der nach Voraussetzung alle Zyklen mit höchstens  $n-3$  Gliedern gleich 0 sind. Nach Satz 7, angewandt für  $n-1$  an Stelle von  $n$ , müßte dann auch der  $(n-2)$ -gliedrige Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \dots \alpha_{n-2}^{n-1} \alpha_{n-1}^1$  gleich 0 sein, entgegen der Annahme. Also sind die Zahlen (3.7) nicht alle gleich 0. Indem wir die Nummern der ersten  $n-2$  Koordinaten und Grundwürfel nötigenfalls zyklisch vertauschen, wobei der uns interessierende Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \dots \alpha_{n-2}^{n-1} \alpha_{n-1}^1$  in sich übergeht, dürfen wir speziell  $\alpha_n^n \neq 0$  annehmen. Da aber alle Zyklen mit höchstens  $n-3$  Gliedern nach Voraussetzung gleich 0 sind, ist

$$(3.8) \quad \begin{array}{ll} \alpha_n^3 \alpha_3^n = 0, & \text{also } \alpha_3^n = 0; \\ \alpha_n^3 \alpha_3^4 \alpha_4^n = 0, & \text{also } \alpha_4^n = 0; \\ \dots & \dots \\ \alpha_n^3 \alpha_3^4 \alpha_4^5 \dots \alpha_{n-3}^{n-2} \alpha_{n-2}^n = 0, & \text{also } \alpha_{n-2}^n = 0. \end{array}$$

Dann hat aber der Würfel

$$W_1 - W_2 \pm W_3 \pm \dots \pm W_{n-2}$$

bei geeigneter Wahl der Vorzeichen keine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate und ist auch nicht der Nullpunktswürfel. Denn die ersten  $n-2$  Koordinaten sind überhaupt nicht ganzzahlig, die  $n$ -te Koordinate ist wegen (3.8) gleich  $\alpha_1^n - \alpha_2^n$ , also keine ganze, von 0 verschiedene Zahl. Daher könnte allenfalls die  $(n-1)$ -te Koordinate in Betracht kommen. Diese ist aber gleich dem Aggregat

$$\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1} \pm \alpha_3^{n-1} \pm \dots \pm \alpha_{n-2}^{n-1},$$

also bei passender Wahl der Vorzeichen wieder keine ganze, von 0 verschiedene Zahl (vgl. Beweis von Satz 7). Somit sind wir zu einem Widerspruch gegen Satz 1 gekommen.

## § 4.

Die Minkowskische Vermutung im  $R_n$  für  $n \leq 6$ .

Nach Satz 2 sind in einer Grundfigur des  $R_n$  alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0. Da es für  $n = 2$  Zyklen mit mehr als zwei Gliedern nicht gibt, folgt sofort

**Satz 9.** *Im  $R_2$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.*

Wegen des Verschwindens der zweigliedrigen Zyklen folgt aber weiter aus Satz 6, angewandt auf den Fall  $n = 3$ :

**Satz 10.** *Im  $R_3$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.*

Sodann folgt aus Satz 7, angewandt auf den Fall  $n = 4$ :

**Satz 11.** *Im  $R_4$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.*

Und schließlich folgt noch aus Satz 8, angewandt auf den Fall  $n = 5$ :

**Satz 12.** *Im  $R_5$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.*

Nun kommen wir zum  $R_6$ . Nachdem das Verschwinden der zweigliedrigen Zyklen nach Satz 2 schon feststeht, wenden wir uns zu den dreigliedrigen und nehmen an, daß in einer gewissen Grundfigur des  $R_6$  der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden sei. Nach Satz 3 haben dann die ersten drei Grundwürfel das folgende Aussehen:

$$\begin{aligned} W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, \alpha_1^4, \alpha_1^5, \alpha_1^6 \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, \alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6 \\ W_3: & \alpha_3^1, 0, 1, \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6. \end{aligned}$$

Nun muß nach Satz 1 der Würfel  $-W_1 + W_2 + W_3$  entweder der Nullpunktswürfel sein oder eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate haben. Aber die ersten drei Koordinaten sind

$$-1 + \alpha_1^1, -\alpha_1^2 + 1, \alpha_2^3 + 1,$$

also gewiß nicht ganzzahlig. Daher muß für einen der Indizes  $\nu = 4, 5, 6$  die Zahl  $-\alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \alpha_3^\nu$  ganz und von 0 verschieden, also gleich 1 sein. Wir wollen die Koordinaten und Grundwürfel so numerieren, daß das für  $\nu = 4$  der Fall ist; also ist

$$(4.1) \quad -\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = 1.$$

Analog muß aber auch der Würfel  $W_1 - W_2 + W_3$  eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate haben, und es muß für einen der Indizes  $\nu = 4, 5, 6$  einmal  $\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu + \alpha_3^\nu = 1$  sein. Wegen (4.1) kann das nicht der Index  $\nu = 4$  sein (weil ja  $\alpha_3^4 < 1$  ist), und wir können die Koordinaten und Grundwürfel so numerieren, daß

$$(4.2) \quad \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 = 1$$

ist. Schließlich muß aber auch der Würfel  $W_1 + W_2 - W_3$  eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate haben, und es muß für einen der Indizes

$\nu = 4, 5, 6$  einmal  $\alpha_1' + \alpha_2' - \alpha_3' = 1$  sein. Wegen (4. 1) und (4. 2) kommt dafür aber  $\nu = 4$  oder  $\nu = 5$  nicht in Betracht; also ist

$$(4. 3) \quad \alpha_1^6 + \alpha_2^6 - \alpha_3^6 = 1.$$

Wegen (4. 1), (4. 2), (4. 3) ist gewiß

$$\alpha_2^4 \neq 0, \alpha_3^4 \neq 0, \alpha_1^5 \neq 0, \alpha_3^5 \neq 0, \alpha_1^6 \neq 0, \alpha_2^6 \neq 0,$$

und da alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, folgt hieraus

$$\alpha_4^2 = 0, \alpha_4^3 = 0, \alpha_5^1 = 0, \alpha_5^3 = 0, \alpha_6^1 = 0, \alpha_6^2 = 0.$$

Die letzten drei Grundwürfel haben daher das folgende Aussehen:

$$(4. 4) \quad \begin{array}{l} W_4: \alpha_1^1, 0, 0 \\ W_5: 0, \alpha_5^2, 0 \\ W_6: 0, 0, \alpha_6^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, \alpha_4^6 \\ \alpha_5^4, 1, \alpha_5^6 \\ \alpha_6^4, \alpha_6^5, 1. \end{array} \right.$$

Nun kann in dem rechts abgeteilten Quadrat kein von 0 verschiedener dreigliedriger Zyklus sein. Denn wenn  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^4 \neq 0$  und folglich  $\alpha_3^4 = 0, \alpha_5^5 = 0, \alpha_6^6 = 0$  wäre, so wäre der Würfel  $W_4 + W_5 + W_6$  nicht der Nullpunktswürfel und hätte auch keine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate, was gegen Satz 1 verstößt. Derselbe Widerspruch ergäbe sich, wenn  $\alpha_4^6 \alpha_5^5 \alpha_6^4 \neq 0$  wäre.

Da nun in der Figur (4. 4) in dem rechts abgeteilten Quadrat alle dreigliedrigen und natürlich (nach Satz 2) auch alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, muß in dem Quadrat wenigstens eine Zeile zwei Nullen enthalten. Wir dürfen annehmen, daß es die letzte Zeile ist, weil sich das nötigenfalls durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der Nummern 1, 2, 3 und der Nummern 4, 5, 6 bei Koordinaten und Grundwürfeln erreichen läßt, wobei der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  in sich übergeht und die Relationen (4. 1), (4. 2), (4. 3) erhalten bleiben (nur ihre Reihenfolge ändern). Wegen Satz 5 ist dann  $\alpha_6^3 \neq 0$ , weil ja die Minkowskische Vermutung im  $R_6$  bereits als richtig erkannt ist und der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden angenommen wurde. Dann verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_3 + W_6$  gegen Satz 1. Denn von seinen Koordinaten

$$1 - \alpha_3^1, \alpha_1^2, -1 + \alpha_6^3, \alpha_1^4 - \alpha_3^4, \alpha_1^5 - \alpha_3^5, \alpha_1^6 - \alpha_3^6 + 1$$

ist mindestens die erste nicht gleich 0, und als ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate käme allenfalls die sechste in Betracht, die es aber wegen (4. 3) auch nicht ist.

Somit ergibt sich ein Widerspruch mit der Annahme  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1 \neq 0$ , und wir erhalten zunächst das Resultat, daß bei einer Grundfigur des  $R_6$  alle dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind. Dann folgt aber aus Satz 8, angewandt auf den Fall  $n = 6$ , daß überhaupt alle Zyklen gleich 0 sind, und es ergibt sich

**Satz 13.** Im  $R_6$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.

## § 5.

## Ein Satz über dreigliedrige Zyklen.

**Satz 14.** Wenn in einer Grundfigur des  $R_n$  ein Grundwürfel an einem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt ist, so sind außer dem Einser noch wenigstens fünf seiner Koordinaten von 0 verschieden<sup>6)</sup>.

Beweis. Wir nehmen an, bei einer gewissen Grundfigur wäre es nicht so. Durch passende Numerierung der Koordinaten und Grundwürfel können wir dann erreichen, daß es sich um den Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  handelt, daß ferner  $W_2$  derjenige daran beteiligte Grundwürfel ist, bei dem außer dem Einser noch höchstens vier Koordinaten von 0 verschieden sind, und daß insbesondere die letzten  $n - 6$  Koordinaten von  $W_3$  gleich 0 sind. Die ersten drei Grundwürfel haben dann folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} (5.1) \quad W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, \alpha_1^4, \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, \dots, \alpha_1^n \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, \alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6, \alpha_2^7, \dots, \alpha_2^n \\ W_3: & \alpha_3^1, 0, 1, \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6, 0, \dots, 0. \end{aligned}$$

Genau wie beim Beweis von Satz 13 (vgl. die Formeln (4. 1) und (4. 2)) dürfen wir weiter voraussetzen, daß

$$(5.2) \quad -\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = 1,$$

$$(5.3) \quad \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 = 1$$

ist<sup>7)</sup>. Hiernach ist

$$(5.4) \quad \text{Min}(\alpha_1^4, \alpha_2^4, \alpha_3^4) = \alpha_1^4,$$

$$(5.5) \quad \text{Min}(\alpha_1^5, \alpha_2^5, \alpha_3^5) = \alpha_2^5$$

und wir setzen weiter

$$(5.6) \quad \text{Min}(\alpha_1^6, \alpha_2^6, \alpha_3^6) = 0.$$

<sup>6)</sup> Unter den an dem Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  „beteiligten“ Grundwürfeln sind natürlich die Grundwürfel  $W_1, W_2, W_3$  zu verstehen; analog später bei mehrgliedrigen Zyklen. — Da ein Grundwürfel, der an einem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt ist, nach Satz 3 nebst Zusatz auch eine Koordinate haben muß, die gleich 0 ist, so lehrt Satz 14, daß nichtverschwindende dreigliedrige Zyklen allenfalls für  $n \geq 7$  in Frage kommen können. Wir hätten daher den Satz 14 vorausstellen und beim Beweis von Satz 13 das Verschwinden aller dreigliedrigen Zyklen im  $R_n$  einfach aus Satz 14 schließen und so eine Seite sparen können. Der im vorigen Paragraphen gegebene Spezialbeweis ist aber doch erheblich einfacher als der Beweis von Satz 14, weshalb wir ihn nicht unterdrücken wollten.

<sup>7)</sup> Dagegen dürfen wir nicht voraussetzen, daß  $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 - \alpha_3^7 = 1$  ist. Denn die bei dem Würfel  $W_1 + W_2 - W_3$  notwendige vorhandene ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate könnte ebensogut die siebte oder eine spätere sein ( $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 - \alpha_3^7 = 0 = 1$ ).

Nun gehört unsere Grundfigur zu einer gewissen modulartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$ . In dieser Ausfüllung müssen auch die folgenden beiden Würfel vorhanden sein (vgl. Satz A und die daran angeschlossenen Bemerkungen):

$$W': 1 - \beta^1, 1 - \beta^2, 1 - \beta^3, \alpha_1^4 + \beta^4, \alpha_2^5 + \beta^5, \varrho + \beta^6, \beta^7, \dots, \beta^n,$$

$$W'': \gamma^1, 1 - \gamma^2, 1 + \gamma^3, \alpha_1^4 + \gamma^4, \alpha_2^5 + \gamma^5, \varrho + \gamma^6, \gamma^7, \dots, \gamma^n;$$

dabei sind die  $\beta^r, \gamma^r$  noch unbekannt, man weiß nur:  $0 \leq \beta^r < 1, 0 \leq \gamma^r < 1$ .

Bildet man jetzt den Würfel  $W_1 - W'$ , so ist seine dritte Koordinate gleich  $\beta^3 - 1$ , also  $\neq 0$ . Er ist daher nicht der Nullpunktswürfel und muß folglich nach Satz C eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate haben. Man sieht sofort, daß dafür außer der dritten, die gleich  $\beta^3 - 1$  ist, keine in Betracht kommt; die fünfte und sechste scheiden wegen (5. 5) und (5. 6) aus. Daher ist  $\beta^3 - 1$  ganzzahlig, also  $\beta^3 = 0$ . Wir fassen diese Schlußweise zusammen in die Worte:

$$\text{Aus } W_1 - W' \text{ folgt: } \beta^3 = 0.$$

Ebenso folgt dann

$$\text{aus } W_3 - W': \beta^2 = 0, \quad \text{aus } W_2 - W': \beta^1 = 0,$$

$$\text{aus } W_3 - W'': \gamma^2 = 0, \quad \text{aus } W_2 - W'': \gamma^3 = \alpha_2^3,$$

und unter Berücksichtigung des letzten Resultats

$$\text{aus } W_1 - W'': \gamma^1 = 0.$$

Die Würfel  $W', W''$  sind daher die folgenden:

$$W': 1, 1, 1, \alpha_1^4 + \beta^4, \alpha_2^5 + \beta^5, \varrho + \beta^6, \beta^7, \dots, \beta^n,$$

$$W'': 0, 1, 1 + \alpha_2^3, \alpha_1^4 + \gamma^4, \alpha_2^5 + \gamma^5, \varrho + \gamma^6, \gamma^7, \dots, \gamma^n.$$

Jetzt bilden wir noch acht weitere Würfel, bei denen ebenfalls eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate vorhanden sein muß, wobei aber nicht mehr nur eine einzige in Betracht kommt, sondern mehrere möglich sind. Der einzig mögliche ganzzahlige Wert wird aber jedesmal gleich 1 sein, wie man stets aus den Formeln (5. 4), (5. 5), (5. 6) erkennen wird. So folgt

$$\text{aus } W_1 + W_3 - W' \text{ und aus } W_1 + W_3 - W''$$

unter Benutzung von (5. 3):

$$(A) \quad \beta^5 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_1^6 + \alpha_3^6 - \varrho - \beta^6 = 1,$$

$$(B) \quad \gamma^5 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_1^6 + \alpha_3^6 - \varrho - \gamma^6 = 1;$$

aus  $W_2 + W_3 - W'$  und aus  $W_2 + W_3 - W''$  unter Benutzung von (5. 2):

$$(C) \quad \beta^4 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_2^6 + \alpha_3^6 - \varrho - \beta^6 = 1,$$

$$(D) \quad \gamma^4 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_2^6 + \alpha_3^6 - \varrho - \gamma^6 = 1;$$

aus  $W_3 - W_2 + W'$  und aus  $W_3 - W_1 + W''$ :

$$(E) \alpha_2^4 - \alpha_2^4 + \alpha_1^4 + \beta^4 = 1 \text{ oder } \alpha_3^5 + \beta^5 = 1 \text{ oder } \alpha_3^6 - \alpha_2^6 + \varrho + \beta^6 = 1,$$

$$(F) \alpha_3^4 + \gamma^4 = 1 \text{ oder } \alpha_3^5 - \alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \gamma^5 = 1 \text{ oder } \alpha_3^6 - \alpha_1^6 + \varrho + \gamma^6 = 1;$$

endlich aus  $W_3 + W' - W''$  und aus  $W_3 - W' + W''$ :

$$(G) \alpha_3^4 + \beta^4 - \gamma^4 = 1 \text{ oder } \alpha_3^5 + \beta^5 - \gamma^5 = 1 \text{ oder } \alpha_3^6 + \beta^6 - \gamma^6 = 1,$$

$$(H) \alpha_3^4 - \beta^4 + \gamma^4 = 1 \text{ oder } \alpha_3^5 - \beta^5 + \gamma^5 = 1 \text{ oder } \alpha_3^6 - \beta^6 + \gamma^6 = 1.$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $\varrho = \alpha_1^6$  oder  $\alpha_2^6$  oder  $\alpha_3^6$  ist.

Erster Fall:  $\varrho = \alpha_1^6$ . Jetzt folgt aus (A) und (B):

$$\beta^5 = 0, \gamma^5 = 0.$$

Wenn nun  $\beta^4 = \gamma^4$  wäre, so würde aus (G) und (H) folgen:

$$\alpha_3^6 + \beta^6 - \gamma^6 = 1, \alpha_3^6 - \beta^6 + \gamma^6 = 1,$$

also durch Addition  $2\alpha_3^6 = 2$ , während doch  $\alpha_3^6 < 1$  ist. Ebenso würde die Annahme  $\beta^6 = \gamma^6$  zum Widerspruch  $2\alpha_3^6 = 2$  führen. Somit ist

$$\beta^4 \neq \gamma^4, \beta^6 \neq \gamma^6.$$

Wegen  $\beta^6 \neq \gamma^6$  können  $\beta^4$  und  $\gamma^4$  nach (C) und (D) nicht beide von 0 verschieden sein; wegen  $\beta^4 \neq \gamma^4$  können sie aber auch nicht beide gleich 0 sein. Daher ist

$$\text{entweder } \beta^4 = 0, \gamma^4 \neq 0 \text{ oder } \beta^4 \neq 0, \gamma^4 = 0.$$

Im Fall  $\beta^4 = 0, \gamma^4 \neq 0$  folgt der Reihe nach, weil  $\varrho = \alpha_1^6, \beta^5 = 0, \gamma^5 = 0$  ist, aus (D), (E) mit Rücksicht auf (5.4) und (G):

$$\alpha_2^6 + \alpha_3^6 - \alpha_1^6 - \gamma^6 = 1,$$

$$\alpha_3^6 - \alpha_2^6 + \alpha_1^6 + \beta^6 = 1,$$

$$\alpha_3^6 + \beta^6 - \gamma^6 = 1.$$

Wenn man diese Gleichungen zueinander addiert, nachdem man die letzte mit  $-1$  multipliziert hat, erhält man  $\alpha_3^6 = 1$ , während doch  $\alpha_3^6 < 1$  ist. Im Fall  $\beta^4 \neq 0, \gamma^4 = 0$  folgt der Reihe nach aus (C), (F) mit Rücksicht auf (5.5) und (H):

$$\alpha_2^6 + \alpha_3^6 - \alpha_1^6 - \beta^6 = 1,$$

$$\alpha_3^6 + \gamma^6 = 1,$$

$$\alpha_3^6 - \beta^6 + \gamma^6 = 1.$$

Daher ist

$$\beta^6 = 0, \alpha_2^6 + \alpha_3^6 - \alpha_1^6 = 1.$$

Dann folgt aber aus (E) und (G)

$$\alpha_3^4 - \alpha_2^4 + \alpha_1^4 + \beta^4 = 1,$$

$$\alpha_3^4 + \beta^4 = 1,$$

und hieraus  $\alpha_2^4 = \alpha_1^4$ , was mit (5. 2) im Widerspruch steht. Der erste Fall ist somit unmöglich.

Zweiter Fall.  $\varrho = \alpha_2^6$ . Dieser Fall erledigt sich genau wie der erste, wobei lediglich die Indizes 1, 2, ferner die Indizes 4, 5 sowie die Buchstaben  $\beta, \gamma$  ihre Rollen tauschen. Bei Durchführung des Beweises ist dann die Formel (A) mit (D) zu vertauschen, ferner (B) mit (C), (E) mit (F), (G) mit (H), (5. 2) mit (5. 3), (5. 4) mit (5. 5). So erweist sich der zweite Fall ebenfalls als unmöglich.

Dritter Fall.  $\varrho = \alpha_3^6$ . Jetzt folgt aus (A), (B), (C), (D) der Reihe nach

$$\beta^6 = 0, \gamma^6 = 0, \beta^4 = 0, \gamma^4 = 0.$$

Sodann aus (G) und (H)

$$\alpha_2^6 + \beta^6 - \gamma^6 = 1, \alpha_2^6 - \beta^6 + \gamma^6 = 1$$

und hieraus durch Addition  $2\alpha_2^6 = 2$ , während doch  $\alpha_2^6 < 1$  ist. Daher ist auch der dritte Fall unmöglich.

Die zu Anfang gemachte Annahme stellt sich sonach als widerspruchsvoll heraus, womit Satz 14 bewiesen ist.

## § 6.

### Die Minkowskische Vermutung im $R_7$ .

Wir zeigen zuerst das Verschwinden der dreigliedrigen Zyklen. Nehmen wir an, in einer Grundfigur des  $R_7$  sei der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden, so haben die ersten drei Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$(6.1) \quad \begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3 \\ W_3: \alpha_3^1, 0, 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_1^4, \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7 \\ \alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6, \alpha_2^7 \\ \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6, \alpha_3^7 \end{array} \right.$$

wobei in dem abgeteilten Rechteck nach Satz 14 alle  $\alpha_i^u$  von 0 verschieden sind. Da aber  $\alpha_1^6 \alpha_2^4 = 0$  ist, so haben dann die andern vier Grundwürfel das Aussehen

$$(6.2) \quad \begin{array}{l} W_4: 0, 0, 0 \\ W_5: 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, 0 \\ W_7: 0, 0, 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, \alpha_4^6, \alpha_4^7 \\ \alpha_5^4, 1, \alpha_5^6, \alpha_5^7 \\ \alpha_6^4, \alpha_6^5, 1, \alpha_6^7 \\ \alpha_7^4, \alpha_7^5, \alpha_7^6, 1 \end{array} \right.$$

Nach Satz 14 kann keiner dieser vier Grundwürfel an einem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein; also gibt es in (6. 2) in dem abgeteilten Quadrat keinen solchen Zyklus. Es gibt aber auch keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus. Denn andernfalls könnte durch geeignete Numerierung erreicht werden, daß speziell  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^7 \alpha_7^4 \neq 0$  ist, so daß

das Bild (6.2) nach Satz 3 nebst Zusatz das folgende Aussehen gewinnen würde:

$$\begin{array}{l|l} W_4: & 0, 0, 0 \\ W_5: & 0, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, 0 \\ W_7: & 0, 0, 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, 0, 0 \\ 0, 1, \alpha_5^6, 0 \\ 0, 0, 1, \alpha_6^7 \\ \alpha_7^4, 0, 0, 1. \end{array} \right.$$

Dann würde aber der Würfel  $W_4 + W_5 + W_6 + W_7$  gegen Satz 1 verstoßen.

Daher enthält in der Figur (6.2) das abgeteilte Quadrat überhaupt keinen von 0 verschiedenen Zyklus. Folglich muß es in wenigstens einer Zeile drei Nullen haben (vgl. die Schlußweise S. 420, Mitte), etwa bei  $W_7$ . Dann sind aber bei  $W_7$  außer dem Einser alle Koordinaten gleich 0, was nach Satz 5 mit der Annahme  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1 \neq 0$  in Widerspruch steht, nachdem ja die Minkowskische Vermutung im  $R_8$  zutrifft. Somit sind alle dreigliedrigen Zyklen gleich 0.

Nun beweisen wir das Verschwinden der viergliedrigen Zyklen. Nehmen wir an, daß der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sei, so haben die ersten vier Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$(6.3) \quad \begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0, \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0, \alpha_2^5, \alpha_2^6, \alpha_2^7 \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6, \alpha_3^7 \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1, \alpha_4^5, \alpha_4^6, \alpha_4^7. \end{array}$$

Die letzten drei aber haben, nachdem alle zwei- und dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, bei geeigneter Numerierung das Aussehen

$$(6.4) \quad \begin{array}{l} W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3, \alpha_5^4 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3, \alpha_6^4 \\ W_7: \alpha_7^1, \alpha_7^2, \alpha_7^3, \alpha_7^4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_5^6, \alpha_5^7 \\ 0, 1, \alpha_6^7 \\ 0, 0, 1; \end{array} \right.$$

wegen der Nullen in dem rechts abgeteilten Quadrat vergleiche man die Schlußweise S. 420, Mitte. Wegen Satz 5 muß nun  $W_7$  außer dem Einser noch wenigstens eine von 0 verschiedene Koordinate haben, also eine der Zahlen  $\alpha_7^1, \alpha_7^2, \alpha_7^3, \alpha_7^4$  von 0 verschieden sein. Indem wir die ersten vier Koordinaten und Grundwürfel nötigenfalls zyklisch umnummerieren, wobei der uns interessierende Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  in sich übergeht, können wir annehmen, daß etwa

$$(6.5) \quad \alpha_7^1 \neq 0$$

ist. Aus  $\alpha_7^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_7^1 \alpha_1^2 \alpha_2^7 = 0$  folgt dann

$$(6.6) \quad \alpha_1^7 = 0, \quad \alpha_2^7 = 0.$$

Wenn nun von den Zahlen  $\alpha_3^7, \alpha_4^7$  auch eine gleich 0 wäre, so käme bei den drei Würfeln

$$(6.7) \quad W_1 + W_2 - W_3 - W_4,$$

$$(6.8) \quad W_1 - W_2 + W_3 - W_4,$$

$$(6.9) \quad W_1 - W_2 - W_3 + W_4,$$

von denen offenbar keiner der Nullpunktswürfel ist, als ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate nur die fünfte oder sechste in Betracht. Wegen des Würfels (6.7) wäre also etwa

$$\alpha_1^5 + \alpha_2^5 - \alpha_3^5 - \alpha_4^5 = \pm 1 \text{ und folglich } \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 - \alpha_4^5 \neq \pm 1, \\ \alpha_1^5 - \alpha_2^5 - \alpha_3^5 + \alpha_4^5 \neq \pm 1.$$

Sodann wäre wegen des Würfels (6.8) notwendig

$$\alpha_1^6 - \alpha_2^6 + \alpha_3^6 - \alpha_4^6 = \pm 1 \text{ und folglich } \alpha_1^6 - \alpha_2^6 - \alpha_3^6 + \alpha_4^6 \neq \pm 1.$$

Jetzt bliebe aber bei dem Würfel (6.9) keine Möglichkeit mehr für eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate übrig. Daher ist

$$(6.10) \quad \alpha_3^7 \neq 0, \quad \alpha_4^7 \neq 0.$$

Aus  $\alpha_3^7 \alpha_7^3 = 0, \alpha_4^7 \alpha_7^4 = 0, \alpha_2^3 \alpha_3^7 \alpha_7^2 = 0$  folgt dann aber

$$(6.11) \quad \alpha_7^3 = 0, \quad \alpha_7^4 = 0, \quad \alpha_7^2 = 0.$$

Nach diesen Resultaten ist nun auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 \alpha_7^1$  von 0 verschieden und die Würfel  $W_1, W_2, W_3, W_7$  haben das folgende Aussehen, wobei die Koordinaten in der Reihenfolge 1, 2, 3, 7, 4, 5, 6 geschrieben sind:

$$\begin{array}{lllllll} W_1: & 1, & \alpha_1^2, & 0, & 0, & \alpha_1^5, & \alpha_1^6 \\ W_2: & 0, & 1, & \alpha_2^3, & 0, & 0, & \alpha_2^5, \alpha_2^6 \\ W_3: & 0, & 0, & 1, & \alpha_3^7, & \alpha_3^4, & \alpha_3^5, \alpha_3^6 \\ W_7: & \alpha_7^1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, \end{array}$$

Daraus folgt nun ähnlich wie vorhin, daß für wenigstens einen der drei Würfel

$$W_1 + W_2 - W_3 + W_7$$

$$W_1 - W_2 + W_3 + W_7$$

$$W_1 - W_2 - W_3 + W_7,$$

von denen offenbar keiner der Nullpunktswürfel ist, keine Möglichkeit für eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate besteht. Wegen dieses Widerspruchs gegen Satz 1 sind alle viergliedrigen Zyklen gleich 0. Nach Satz 8, angewandt auf den Fall  $n = 7$ , sind aber jetzt überhaupt alle Zyklen gleich 0, und somit ergibt sich

**Satz 15.** *Im  $R_7$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.*

## § 7.

Das Verschwinden der dreigliedrigen Zyklen im  $R_8$ .

Nehmen wir an, in einer Grundfigur des  $R_8$  sei der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden, so haben die ersten drei Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$(7.1) \quad \begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3 \\ W_3: \alpha_3^1, 0, 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_1^4, \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, \alpha_1^8 \\ \alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6, \alpha_2^7, \alpha_2^8 \\ \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6, \alpha_3^7, \alpha_3^8 \end{array} \right.$$

wobei in dem abgeteilten Rechteck nach Satz 14 in jeder Zeile mindestens vier  $\alpha_i^\mu$  von 0 verschieden sind. Wegen  $\alpha_i^\mu \alpha_j^\nu = 0$  enthält dann das Schema der andern fünf Grundwürfel

$$(7.2) \quad \begin{array}{l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3 \\ W_7: \alpha_7^1, \alpha_7^2, \alpha_7^3 \\ W_8: \alpha_8^1, \alpha_8^2, \alpha_8^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, \alpha_4^6, \alpha_4^7, \alpha_4^8 \\ \alpha_5^4, 1, \alpha_5^6, \alpha_5^7, \alpha_5^8 \\ \alpha_6^4, \alpha_6^5, 1, \alpha_6^7, \alpha_6^8 \\ \alpha_7^4, \alpha_7^5, \alpha_7^6, 1, \alpha_7^8 \\ \alpha_8^4, \alpha_8^5, \alpha_8^6, \alpha_8^7, 1 \end{array} \right.$$

in jeder der ersten drei Koordinatenspalten höchstens eine von 0 verschiedene Zahl. Daraus folgt, daß in (7.2) in dem abgeteilten Quadrat kein von 0 verschiedener dreigliedriger Zyklus enthalten sein kann. Denn wenn etwa  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^4 \neq 0$  wäre, so hätte man mit Rücksicht auf Satz 3 nebst Zusatz das Bild

$$\begin{array}{l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, 0 \\ 0, 1, \alpha_5^6 \\ \alpha_6^4, 0, 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha_4^7, \alpha_4^8 \\ \alpha_5^7, \alpha_5^8 \\ \alpha_6^7, \alpha_6^8 \end{array}$$

und weil in jeder der ersten drei Koordinatenspalten höchstens eine von 0 verschiedene Zahl steht, würde gewiß einer dieser drei Würfel dem Satz 14 widersprechen.

In dem abgeteilten Quadrat von (7.2) kann aber auch kein von 0 verschiedener viergliedriger Zyklus enthalten sein. Denn wenn etwa  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^7 \alpha_7^4 \neq 0$  wäre, so hätte man mit Rücksicht auf Satz 3 nebst Zusatz das Bild

$$\begin{array}{l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3 \\ W_7: \alpha_7^1, \alpha_7^2, \alpha_7^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, 0, 0 \\ 0, 1, \alpha_5^6, 0 \\ 0, 0, 1, \alpha_6^7 \\ \alpha_7^4, 0, 0, 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha_4^8 \\ \alpha_5^8 \\ \alpha_6^8 \\ \alpha_7^8 \end{array}$$

und jetzt hätte, weil in jeder der ersten drei Koordinatenspalten höchstens eine von 0 verschiedene Zahl steht, der Würfel  $W_4 - W_5 \pm (W_6 - W_7)$  bei wenigstens einem der beiden Vorzeichen keine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate und wäre auch nicht der Nullpunktswürfel, was dem Satz 1 widerspricht.

Schließlich kann in dem abgeteilten Quadrat von (7. 2) auch kein von 0 verschiedener *fünfgliedriger* Zyklus enthalten sein. Denn wenn etwa  $\alpha_4^4 \alpha_5^4 \alpha_6^4 \alpha_7^4 \alpha_8^4 \neq 0$  wäre, so hätte man das Bild

$$\begin{array}{l|l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 & 1, \alpha_4^5, 0, 0, 0 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 & 0, 1, \alpha_5^6, 0, 0 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3 & 0, 0, 1, \alpha_6^7, 0 \\ W_7: \alpha_7^1, \alpha_7^2, \alpha_7^3 & 0, 0, 0, 1, \alpha_7^8 \\ W_8: \alpha_8^1, \alpha_8^2, \alpha_8^3 & \alpha_8^4, 0, 0, 0, 1, \end{array}$$

und jetzt würde der Würfel  $W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8$  gegen Satz 1 verstoßen.

Da hiernach das abgeteilte Quadrat in (7. 2) gar keinen von 0 verschiedenen Zyklus enthält, gewinnt das Bild (7. 2) bei geeigneter Numerierung der letzten fünf Koordinaten und Grundwürfel das Aussehen

$$\begin{array}{l|l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 & 1, \alpha_4^5, \alpha_4^6, \alpha_4^7, \alpha_4^8 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 & 0, 1, \alpha_5^6, \alpha_5^7, \alpha_5^8 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3 & 0, 0, 1, \alpha_6^7, \alpha_6^8 \\ W_7: \alpha_7^1, \alpha_7^2, \alpha_7^3 & 0, 0, 0, 1, \alpha_7^8 \\ W_8: \alpha_8^1, \alpha_8^2, \alpha_8^3 & 0, 0, 0, 0, 1; \end{array}$$

wegen der Nullen vergleiche man die Schlußweise auf S. 420, Mitte. Wegen Satz 5 muß nun eine der Zahlen  $\alpha_5^1, \alpha_6^2, \alpha_7^3$  von 0 verschieden sein, nachdem ja die Minkowskische Vermutung im  $R_7$  zutrifft und der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden angenommen ist. Indem wir die ersten drei Koordinaten und Grundwürfel nötigenfalls zyklisch umnummerieren, wobei der uns interessierende Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  in sich übergeht, können wir annehmen, daß

$$\alpha_3^1 \neq 0$$

ist. Nun ist aber  $\alpha_3^1 \alpha_1^3 = 0$ , und da  $W_8$  nach Satz 14 an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein kann, ist auch  $\alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3 = 0$ , also

$$\alpha_1^3 = 0, \alpha_2^3 = 0.$$

Nach Satz 14 ist dann

$$\alpha_1^v \neq 0, \alpha_2^v \neq 0 \quad \text{für } v = 4, 5, 6, 7.$$

Aus  $\alpha_1^7 \alpha_7^1 = 0$  und  $\alpha_2^7 \alpha_7^2 = 0$  folgt jetzt

$$\alpha_7^1 = 0, \alpha_7^2 = 0.$$

Nach Satz 14 kann auch  $W_7$  an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein. Daher ist  $\alpha_3^1 \alpha_1^7 \alpha_7^3 = 0$ ,  $\alpha_3^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$  und folglich

$$\alpha_7^3 = 0, \alpha_7^8 = 0.$$

Hiernach sind aber bei  $W_7$  außer dem Einser alle Koordinaten gleich 0, was nach Satz 5 mit der Annahme  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1 \neq 0$  im Widerspruch steht. Damit ist bewiesen:

*In einer Grundfigur des  $R_8$  sind alle dreigliedrigen Zyklen gleich 0.*

## § 8.

Zwei Hilfssätze über viergliedrige Zyklen im  $R_8$ .

**Hilfssatz 1.** *Wenn in einer Grundfigur des  $R_8$  ein Grundwürfel außer dem Einser nur noch eine von 0 verschiedene Koordinate hat, so kann er an keinem von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt sein.*

Beweis. Wir nehmen an, daß es in einer gewissen Grundfigur doch so sei und daß es sich dabei um den von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  und um den Grundwürfel  $W_4$  handle. Dann haben die ersten vier Grundwürfel, weil alle zwei- und dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, nach Satz 3 das Aussehen

$$(8.1) \quad \begin{array}{l|l} W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: & 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: & \alpha_4^1, 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, \alpha_1^8 \\ \alpha_2^5, \alpha_2^6, \alpha_2^7, \alpha_2^8 \\ \alpha_3^5, \alpha_3^6, \alpha_3^7, \alpha_3^8 \\ 0, 0, 0, 0. \end{array}$$

Da von den drei Würfeln

$$\begin{aligned} W_1 - W_2 + W_3 + W_4 \\ W_1 + W_2 - W_3 + W_4 \\ W_1 - W_2 - W_3 + W_4 \end{aligned}$$

offenbar keiner der Nullpunktswürfel ist, muß nach Satz 1 jeder eine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate haben; es ist aber ausgeschlossen, daß es bei zwei dieser Würfel dieselbe Koordinate ist<sup>9)</sup>; also ist etwa

$$\begin{aligned} \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 &= 1, \\ \alpha_1^6 + \alpha_2^6 - \alpha_3^6 &= 1, \\ \alpha_1^7 - \alpha_2^7 - \alpha_3^7 &= -1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\alpha_1^5 \neq 0, \alpha_3^5 \neq 0, \alpha_1^6 \neq 0, \alpha_2^6 \neq 0, \alpha_2^7 \neq 0, \alpha_3^7 \neq 0,$$

und folglich ist

$$\alpha_1^1 = 0, \alpha_2^2 = 0, \alpha_3^3 = 0, \alpha_4^4 = 0, \alpha_1^2 = 0, \alpha_2^3 = 0.$$

Da aber alle dreigliedrigen Zyklen verschwinden, ist auch  $\alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1 = 0$ ,  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 = 0$ ,  $\alpha_1^3 \alpha_2^4 \alpha_3^1 = 0$ ,  $\alpha_1^4 \alpha_2^1 \alpha_3^2 = 0$ ,  $\alpha_1^5 \alpha_2^6 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_1^6 \alpha_2^7 \alpha_3^8 = 0$ , also

$$\alpha_2^2 = 0, \alpha_3^3 = 0, \alpha_4^4 = 0, \alpha_1^1 = 0.$$

<sup>9)</sup> Vgl. die ausführlichere Begründung in dem analogen Fall der Würfel (6. 7), (6. 8), (6. 9) auf S. 434.

Die Grundfigur hat daher das Aussehen

$$(8.2) \quad \begin{array}{l|l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0 & \alpha_1^5, \alpha_1^6, , \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0 & , \alpha_2^6, \alpha_2^7, \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4 & \alpha_3^5, , \alpha_3^7, \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1 & 0, 0, 0, 0 \\ \hline W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, , , \\ W_6: 0, 0, , 0 & , 1, , \\ W_7: 0, 0, 0, & , , 1, \\ W_8: , , , & , , , 1, \end{array}$$

wobei die eingesetzten  $\alpha_i^u$  alle von 0 verschieden sind, während die Plätze für diejenigen  $\alpha_i^u$ , von denen noch nicht feststeht, ob sie  $= 0$  oder  $\neq 0$  sind, leer gelassen wurden <sup>9)</sup>.

In der Figur (8.2) sind nun in dem rechts unten abgeteilten Quadrat nicht nur alle zwei- und dreigliedrigen, sondern auch alle viergliedrigen Zyklen gleich 0. Denn wenn ein solcher Zyklus von 0 verschieden wäre, so wären alle an diesem Zyklus nicht beteiligten  $\alpha_i^u$  des Quadrats gleich 0 (nach Satz 3 nebst Zusatz) und folglich wäre der Würfel  $W_5 - W_6 - W_7 + W_8$  nicht der Nullpunktswürfel und hätte auch keine ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate, was dem Satz 1 widerspricht. Da somit in dem rechts unten abgeteilten Quadrat von (8.2) alle Zyklen gleich 0 sind, muß wenigstens eine Zeile des Quadrats drei Nullen enthalten (vgl. die Schlußweise S. 420, Mitte). Ist es die erste Zeile, so entsteht ein Widerspruch gegen Satz 5, da ja die Minkowskische Vermutung im  $R_7$  zutrifft. Ist es die zweite Zeile, so muß, damit nicht derselbe Widerspruch entsteht,  $\alpha_6^3 \neq 0$ , also  $\alpha_3^6 = 0$  sein; dann verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_3 - W_4 + W_6$  gegen Satz 1. Ist es die dritte Zeile, so muß, damit kein Widerspruch gegen Satz 5 entsteht,  $\alpha_7^4 \neq 0$  sein; wegen  $\alpha_7^4 \alpha_4^1 \alpha_1^7 = 0$  ist dann aber  $\alpha_1^7 = 0$ , und der Würfel  $W_1 - W_2 - W_4 + W_7$  verstößt gegen Satz 1.

Somit kommen die drei Nullen in der letzten Zeile. Nun muß aber außerdem, da alle zwei- und dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, das Quadrat

$$\begin{array}{l} 1, \alpha_5^6, \alpha_5^7 \\ \alpha_6^5, 1, \alpha_6^7 \\ \alpha_7^5, \alpha_7^6, 1 \end{array}$$

<sup>9)</sup> Beim Lesen der folgenden Beweisführung empfiehlt es sich, die Figur (8.2) für die verschiedenen Fälle immer neu aufzuschreiben und laufend zu ergänzen, sobald von einem  $\alpha_i^u$  erkannt oder angenommen wird, daß es  $= 0$  oder  $\neq 0$  ist. Alsdann wird man, wenn im Text von einem Würfel der Form  $W_i \pm W_u \pm W_v \pm W_e$  gesagt wird, daß aus ihm etwas folgt (stets nach Satz 1), oder daß er gegen Satz 1 verstößt, die Richtigkeit dieser Behauptung stets ohne weiteres erkennen.

in wenigstens einer Zeile zwei Nullen haben. Somit sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall I		Fall II	
$W_5$ : 0, 0, 0, 0	1, 0, 0, $\alpha_5^2$	$W_5$ : 0, 0, 0, 0	1, , ,
$W_6$ : 0, 0, , 0	, 1, ,	$W_6$ : 0, 0, , 0	0, 1, 0, $\alpha_6^2$
$W_7$ : 0, 0, 0, ,	, , 1, ,	$W_7$ : 0, 0, 0, ,	, , 1, ,
$W_8$ : , , , ,	0, 0, 0, 1	$W_8$ : , , , ,	0, 0, 0, 1

## Fall III

$W_5$ : 0, 0, 0, 0	1, , ,
$W_6$ : 0, 0, , 0	, 1, ,
$W_7$ : 0, 0, 0, ,	0, 0, 1, $\alpha_7^2$
$W_8$ : , , , ,	0, 0, 0, 1.

Dabei sind die eingesetzten  $\alpha_i^2$  wirklich von 0 verschieden, weil sonst ein schon erledigter Fall vorläge.

Im Fall I folgt aus  $\alpha_1^5 \alpha_5^2 \alpha_3^1 = 0$  und  $\alpha_3^5 \alpha_5^2 \alpha_3^3 = 0$  zunächst

$$\alpha_3^1 = 0, \quad \alpha_3^3 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_8^4 \neq 0$ , so folgt aus  $\alpha_8^4 \alpha_4^2 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 = 0$ ,  $\alpha_5^2 \alpha_8^4 \alpha_4^5 = 0$ , weiter<sup>10)</sup>  $\alpha_4^2 = 0$ ,  $\alpha_1^2 = 0$ ,  $\alpha_4^5 = 0$ ; dann verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_4 + W_5 - W_8$  gegen Satz 1. Also ist

$$\alpha_8^4 = 0.$$

Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, ist dann

$$\alpha_8^2 \neq 0$$

und aus  $\alpha_5^2 \alpha_2^2 = 0$ ,  $\alpha_5^2 \alpha_2^3 \alpha_3^2 = 0$ ,  $\alpha_5^2 \alpha_8^2 \alpha_2^5 = 0$  folgt

$$\alpha_2^2 = 0, \quad \alpha_3^2 = 0, \quad \alpha_2^5 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_2 - W_3 + W_5 - W_8$  gegen Satz 1. Der Fall I ist also unmöglich.

Im Fall II folgt aus  $\alpha_1^6 \alpha_6^2 \alpha_3^1 = 0$  und  $\alpha_2^6 \alpha_6^2 \alpha_3^2 = 0$  zunächst

$$\alpha_3^1 = 0, \quad \alpha_3^2 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_8^4 \neq 0$ , so folgt aus  $\alpha_8^4 \alpha_4^2 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 = 0$ ,  $\alpha_6^2 \alpha_8^4 \alpha_4^6 = 0$  weiter  $\alpha_4^2 = 0$ ,  $\alpha_1^2 = 0$ ,  $\alpha_4^6 = 0$ ; dann verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_4 + W_6 - W_8$  gegen Satz 1. Also ist

$$\alpha_8^4 = 0.$$

<sup>10)</sup> Die Schlussfolgerung  $\alpha_4^2 = 0$ ,  $\alpha_4^5 = 0$  wäre unnötig, weil das ja schon vorausgesetzt ist. Sie ist aber hier und analog noch mehrmals doch gezogen, damit der Beweis sich wörtlich auf den analogen Fall beim Beweis von Hilfssatz 2 überträgt, wo diese Voraussetzung nicht gemacht ist.

Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, ist dann

$$\alpha_8^3 \neq 0.$$

Aus  $\alpha_8^2 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_8^3 \alpha_3^4 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_8^8 \alpha_3^8 \alpha_3^6 = 0$  folgt daher

$$\alpha_3^8 = 0, \alpha_1^8 = 0, \alpha_3^6 = 0,$$

und sodann aus  $W_1 - W_3 + W_4 - W_8$ :

$$\alpha_1^8 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_3 + W_4 + W_6 + W_8$  gegen Satz 1. Der Fall II ist also ebenfalls unmöglich.

Im Fall III folgt aus  $\alpha_2^7 \alpha_7^8 \alpha_8^2 = 0$  und  $\alpha_3^7 \alpha_7^2 \alpha_8^3 = 0$  zunächst

$$\alpha_8^2 = 0, \alpha_8^3 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_8^1 \neq 0$ , so folgt aus  $\alpha_8^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_8^1 \alpha_7^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^1 \alpha_1^7 = 0$  weiter  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_1^7 = 0$ ; dann verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_2 + W_7 - W_8$  gegen Satz 1. Also ist

$$\alpha_8^1 = 0.$$

Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, ist dann

$$\alpha_8^4 \neq 0.$$

Aus  $\alpha_8^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_1^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^7 = 0$  folgt daher

$$\alpha_4^8 = 0, \alpha_1^8 = 0, \alpha_4^7 = 0.$$

Sodann folgt aus  $W_1 + W_4 - W_7 - W_8$  und aus  $W_1 - W_2 + W_4 - W_8$ :

$$\alpha_1^7 = 0, \alpha_2^8 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_2 + W_4 - W_7 - W_8$  gegen Satz 1. Somit ist auch Fall III unmöglich, womit der Hilfssatz 1 bewiesen ist.

**Hilfssatz 2.** In einer Grundfigur des  $R_8$  sind die vier Grundwürfel

$$\begin{array}{l|l} W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: & 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: & \alpha_4^1, 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, \\ \alpha_2^5, \alpha_2^7, \\ \alpha_3^5, \alpha_3^7, \\ , , , \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^j$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

**Beweis.** Die Grundfigur erfordert genau dieselbe Ergänzung wie beim Beweis von Hilfssatz 1, nämlich:

$$\begin{array}{l|l} W_5: & 0, 0, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, , 0 \\ W_7: & 0, 0, 0, \\ W_8: & , , , \end{array} \quad \begin{array}{l} 1, , , \\ , 1, , \\ , , 1, \\ , , , 1 \end{array}$$

und genau wie dort ergibt sich, daß das rechts abgeteilte Quadrat in wenigstens einer Zeile drei Nullen enthalten muß. Ist es die erste Zeile, so entsteht ein Widerspruch gegen Satz 5. Ist es die zweite Zeile, so muß, damit nicht derselbe Widerspruch entsteht,  $\alpha_6^3 \neq 0$  sein; dann ist aber der Würfel  $W_6$  an dem von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_6^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^6$  beteiligt und verstößt damit gegen Hilfssatz 1. Ist es die dritte Zeile, so muß, damit kein Widerspruch gegen Satz 5 entsteht,  $\alpha_7^4 \neq 0$  sein; dann ist aber der Würfel  $W_7$  an dem von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_7^4 \alpha_4^1 \alpha_1^2 \alpha_2^7$  beteiligt und verstößt damit gegen Hilfssatz 1.

Somit kommen die drei Nullen in der letzten Zeile und es sind die gleichen drei Fälle zu unterscheiden wie beim Beweis von Hilfssatz 1.

Im Fall I kann man wörtlich so schließen wie vorhin oder auch kürzer so: Wegen Hilfssatz 1 kann  $W_5$  an keinem von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt sein. Also ist

$$\alpha_1^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 = 0, \quad \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^2 \alpha_5^2 = 0, \quad \alpha_3^5 \alpha_5^6 \alpha_6^3 = 0, \quad \alpha_4^1 \alpha_1^5 \alpha_5^8 \alpha_8^4 = 0$$

und folglich  $\alpha_5^1 = 0, \alpha_5^2 = 0, \alpha_5^3 = 0, \alpha_5^4 = 0$ , so daß der Würfel  $W_5$  gegen Satz 5 verstößt. Der Fall I ist daher unmöglich.

Im Fall II läßt sich zunächst wörtlich wie vorhin schließen, daß

$$\alpha_8^1 = 0, \quad \alpha_8^2 = 0, \quad \alpha_8^4 = 0, \quad \alpha_8^3 \neq 0, \quad \alpha_3^8 = 0, \quad \alpha_4^8 = 0, \quad \alpha_5^8 = 0$$

ist. Ferner kann jetzt  $W_8$  nach Hilfssatz 1 an keinem von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt sein; daher ist  $\alpha_8^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^8 = 0, \alpha_8^6 \alpha_6^3 \alpha_3^4 \alpha_4^6 = 0$ , also

$$\alpha_1^8 = 0, \quad \alpha_4^6 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $\pm W_1 + W_3 \pm W_4 - W_6 - W_8$  bei passender Vorzeichenkombination gegen Satz 1. Wegen seiner ersten Koordinate ist er nämlich nicht der Nullpunktswürfel, und als ganzzahlige, von 0 verschiedene Koordinate kann nur die fünfte oder siebte in Betracht kommen:

$$\pm \alpha_1^5 + \alpha_3^5 \pm \alpha_4^5,$$

$$\pm \alpha_1^7 + \alpha_3^7 \pm \alpha_4^7.$$

Wenn nun bei  $+$  — die eine ganzzahlige und von 0 verschieden ist, so muß es bei  $-$  die andere sein und bei  $-$  kann es dann keine mehr sein. Der Fall II ist also ebenfalls unmöglich.

Im Fall III läßt sich zunächst wörtlich wie vorhin schließen, daß

$$\alpha_3^2 = 0, \quad \alpha_3^3 = 0, \quad \alpha_6^1 = 0, \quad \alpha_6^4 \neq 0, \quad \alpha_4^6 = 0, \quad \alpha_1^6 = 0, \quad \alpha_4^7 = 0$$

ist. Ferner kann jetzt  $W_8$  nach Hilfssatz 1 an keinem von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt sein; daher ist  $\alpha_7^2 \alpha_8^4 \alpha_1^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0$ , also

$$\alpha_1^7 = 0, \alpha_2^8 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $\pm W_1 \pm W_2 + W_4 - W_7 - W_8$  bei passender Vorzeichenkombination gegen Satz 1. Daher ist auch Fall III unmöglich, womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

### § 9.

Ein weiterer Hilfssatz und das Verschwinden der viergliedrigen Zyklen im  $R_8$ .

**Hilfssatz 3.** In einer Grundfigur des  $R_8$  sind die vier Grundwürfel

$$\begin{array}{l|l} W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: & 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: & \alpha_4^1, 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, \\ , \alpha_2^6, , \\ \alpha_3^5, , , \\ , , \alpha_4^7, \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^j$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

Beweis. Zunächst ist

$$\alpha_5^1 = 0, \alpha_3^5 = 0, \alpha_6^1 = 0, \alpha_6^2 = 0, \alpha_7^1 = 0, \alpha_7^4 = 0$$

und aus  $\alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^2 = 0$ ,  $\alpha_4^1 \alpha_1^5 \alpha_5^4 = 0$ ,  $\alpha_4^1 \alpha_1^6 \alpha_6^4 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_4^7 \alpha_7^3 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_5^2 = 0, \alpha_4^5 = 0, \alpha_6^4 = 0, \alpha_7^3 = 0.$$

Daher erfordert die Grundfigur diesmal die folgende Ergänzung:

$$\begin{array}{l|l} W_5: & 0, 0, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, , 0 \\ W_7: & 0, , 0, 0 \\ W_8: & , , , \end{array} \quad \begin{array}{l} 1, , , \\ , 1, , \\ , , 1, \\ , , , 1. \end{array}$$

Ebenso leicht wie beim Beweis von Hilfssatz 1 erkennt man, daß auch hier das rechts abgeteilte Quadrat keinen von 0 verschiedenen Zyklus enthalten kann; denn zwei- und dreigliedrige gibt es sowieso nicht, und bei einem viergliedrigen würde der Würfel  $W_5 - W_6 - W_7 + W_8$  gegen Satz 1 verstoßen. Somit muß das Quadrat wieder in wenigstens einer Zeile drei Nullen enthalten. Ist es die erste Zeile, so entsteht ein Widerspruch gegen Satz 5. Ist es die zweite Zeile, so muß, damit nicht derselbe Widerspruch entsteht,  $\alpha_6^3 \neq 0$  sein; dann ist aber der Würfel  $W_6$  an dem von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_3^5 \alpha_5^4 \alpha_4^1 \alpha_1^6$  beteiligt und verstößt damit gegen Hilfssatz 1. Ist es die dritte Zeile, so muß, damit kein Widerspruch gegen Satz 5 entsteht,  $\alpha_7^2 \neq 0$  sein; dann ist aber der Würfel  $W_7$  an dem von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^7$  beteiligt und verstößt damit gegen Hilfssatz 1.

Somit kommen die drei Nullen in der letzten Zeile und es sind die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

## Fall I

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_3^8 \\ W_6: 0, 0, , 0 & , 1, , \\ W_7: 0, , 0, 0 & , , 1, \\ W_8: , , , & 0, 0, 0, 1 \end{array}$$

## Fall II

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, , , \\ W_6: 0, 0, , 0 & 0, 1, 0, \alpha_8^8 \\ W_7: 0, , 0, 0 & , , 1 \\ W_8: , , , & 0, 0, 0, 1. \end{array}$$

## Fall III

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, , , \\ W_6: 0, 0, , 0 & , 1, , \\ W_7: 0, , 0, 0 & 0, 0, 1, \alpha_7^8 \\ W_8: , , , & 0, 0, 0, 1. \end{array}$$

Dabei sind die eingesetzten  $\alpha_i^8$  von 0 verschieden, weil sonst ein schon erledigter Fall vorläge.

In den Fällen I und II kann man trotz der etwas geänderten Figuren wörtlich so schließen wie beim Beweis von Hilfssatz 2 (mit Einschluß der dortigen Verweisung auf den Beweis von Hilfssatz 1). Diese Fälle sind also unmöglich.

Im Fall III folgt aus  $\alpha_1^7 \alpha_7^8 \alpha_8^1 = 0$  und  $\alpha_4^7 \alpha_7^8 \alpha_8^4 = 0$  zunächst

$$\alpha_8^1 = 0, \alpha_8^4 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_8^3 \neq 0$ , so folgt aus  $\alpha_8^3 \alpha_8^8 = 0$ ,  $\alpha_8^3 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^3 \alpha_3^7 = 0$  weiter  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_3^7 = 0$ ; dann verstößt aber der Würfel  $W_3 - W_4 + W_7 - W_8$  gegen Satz 1. Also ist

$$\alpha_8^3 = 0.$$

Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, ist dann

$$\alpha_8^2 \neq 0$$

und nach Hilfssatz 1 ist  $W_8$  an keinem von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt. Daher ist

$$\alpha_8^2 \alpha_2^8 = 0, \alpha_8^2 \alpha_2^3 \alpha_3^8 = 0, \alpha_8^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0, \alpha_7^8 \alpha_8^2 \alpha_2^7 = 0, \alpha_7^8 \alpha_8^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0$$

und folglich

$$\alpha_2^8 = 0, \alpha_3^8 = 0, \alpha_4^8 = 0, \alpha_2^7 = 0, \alpha_3^7 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_2 \pm W_3 \pm W_4 - W_7 - W_8$  bei passender Vorzeichenkombination gegen Satz 1. Daher ist auch Fall III unmöglich, womit der Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Um nun zu zeigen, daß im  $R_8$  alle viergliedrigen Zyklen gleich 0 sind, nehmen wir an, in einer gewissen Grundfigur sei der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden. Dann haben die ersten vier Grundwürfel das Aussehen

$$\begin{array}{l|l} W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, 0 \quad \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, \alpha_1^8 \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, 0 \quad \alpha_2^5, \alpha_2^6, \alpha_2^7, \alpha_2^8 \\ W_3: & 0, 0, 1, \alpha_3^4 \quad \alpha_3^5, \alpha_3^6, \alpha_3^7, \alpha_3^8 \\ W_4: & \alpha_4^1, 0, 0, 1 \quad \alpha_4^5, \alpha_4^6, \alpha_4^7, \alpha_4^8 \end{array}$$

wobei diesmal alle  $\alpha_i^v$  eingesetzt sind, nicht nur die sicher von 0 verschiedenen. Nun muß, damit der Würfel  $W_1 - W_2 + W_3 - W_4$  nicht gegen Satz 1 verstößt, für einen gewissen Index  $v \geq 5$

$$\alpha_1^v - \alpha_2^v + \alpha_3^v - \alpha_4^v = \pm 1$$

sein. Wir können so numerieren, daß das für  $v = 5$  gilt. Indem wir dann die ersten vier Koordinaten und Grundwürfel nötigenfalls zyklisch umnumerieren, wodurch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  in sich übergeht, können wir außerdem erreichen, daß das obere Vorzeichen gilt. Daher ist

$$(9.1) \quad \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 - \alpha_4^5 = 1, \text{ also } \alpha_1^5 \neq 0, \alpha_3^5 \neq 0.$$

Damit auch der Würfel  $W_1 + W_2 - W_3 - W_4$  nicht gegen Satz 1 verstößt, muß für einen gewissen Index  $v \geq 5$

$$\alpha_1^v + \alpha_2^v - \alpha_3^v - \alpha_4^v = \pm 1$$

sein. Wegen (9.1) ist  $v \neq 5$ , also etwa  $v = 6$ . Indem wir nötigenfalls bei Koordinaten und Grundwürfeln die Nummer 1 mit 3 und die Nummer 2 mit 4 vertauschen, wodurch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  und die Relation (9.1) in sich übergehen, können wir außerdem erreichen, daß das obere Vorzeichen gilt. Daher ist

$$(9.2) \quad \alpha_1^6 + \alpha_2^6 - \alpha_3^6 - \alpha_4^6 = 1, \text{ also } \alpha_1^6 \neq 0, \alpha_2^6 \neq 0.$$

Schließlich muß, damit auch der Würfel  $W_1 - W_2 - W_3 + W_4$  nicht gegen Satz 1 verstößt, für einen gewissen Index  $v \geq 5$

$$\alpha_1^v - \alpha_2^v - \alpha_3^v + \alpha_4^v = \pm 1$$

sein. Wegen (9.1) und (9.2) ist aber  $v$  von 5 und 6 verschieden. Daher ist etwa  $v = 7$ , und es ist

$$\begin{array}{ll} \text{entweder} & \alpha_1^7 - \alpha_2^7 - \alpha_3^7 + \alpha_4^7 = 1, \quad \text{also } \alpha_1^7 \neq 0, \alpha_4^7 \neq 0, \\ \text{oder} & \alpha_1^7 - \alpha_2^7 - \alpha_3^7 + \alpha_4^7 = -1, \quad \text{also } \alpha_2^7 \neq 0, \alpha_3^7 \neq 0. \end{array}$$

Im ersten Fall liegt hiernach bei den ersten vier Grundwürfeln die nach Hilfssatz 3 und im zweiten Fall die nach Hilfssatz 2 unmögliche Figur vor. Damit ist bewiesen:

*In einer Grundfigur des  $R_8$  sind alle viergliedrigen Zyklen gleich 0.*

## § 10.

Die Minkowskische Vermutung im  $R_8$ .

Jetzt kommen wir zu den fünfgliedrigen Zyklen. Nehmen wir an, daß bei einer Grundfigur des  $R_8$  der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1$  von 0 verschieden sei, so haben die ersten fünf Grundwürfel, da alle Zyklen mit weniger als fünf Gliedern gleich 0 sind, nach Satz 3 das Aussehen

$$\begin{array}{l|l} W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, 0, 0 \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, 0, 0 \\ W_3: & 0, 0, 1, \alpha_3^4, 0 \\ W_4: & 0, 0, 0, 1, \alpha_4^5 \\ W_5: & \alpha_5^1, 0, 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^6, \alpha_1^7, \alpha_1^8 \\ \alpha_2^6, \alpha_2^7, \alpha_2^8 \\ \alpha_3^6, \alpha_3^7, \alpha_3^8 \\ \alpha_4^6, \alpha_4^7, \alpha_4^8 \\ \alpha_5^6, \alpha_5^7, \alpha_5^8 \end{array}$$

Wenn nun für jeden Index  $\mu \geq 6$  immer höchstens zwei  $\alpha_\mu^u$  von 0 verschieden wären und wenn diese  $\alpha_\mu^u$  stets zu einem der fünf Würfelpaare

$$(W_1 W_2), (W_2 W_3), (W_3 W_4), (W_4 W_5), (W_5 W_1)$$

gehören würden, so könnten höchstens drei dieser Paare wirklich vertreten sein und durch zyklische Umnummerierung der ersten fünf Koordinaten und Grundwürfel, wodurch der uns interessierende Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1$  in sich übergeht, ließe sich erreichen, daß ein bestimmtes dieser Paare, etwa das Paar  $(W_1 W_2)$  fehlt; dann würde aber der Würfel  $W_1 + W_2 - W_3 + W_4 - W_5$  gegen Satz 1 verstoßen. Es muß also bei einer Koordinate, etwa bei der sechsten, vorkommen, daß sie für zwei Würfel, die keines der fünf Paare bilden, von 0 verschieden ist. Nötigenfalls durch zyklische Umnummerierung der ersten fünf Koordinaten und Grundwürfel können wir erreichen, daß das bei  $W_1$  und  $W_3$  der Fall ist; dann ist also

$$\alpha_1^6 \neq 0, \alpha_3^6 \neq 0.$$

Da alle Zyklen mit weniger als fünf Gliedern gleich 0 sind, ist

$$\alpha_1^6 \alpha_6^1 = 0, \alpha_2^3 \alpha_3^6 \alpha_6^2 = 0, \alpha_3^6 \alpha_6^3 = 0, \alpha_4^5 \alpha_5^1 \alpha_6^4 = 0, \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^5 = 0$$

und folglich

$$\alpha_6^1 = 0, \alpha_6^2 = 0, \alpha_6^3 = 0, \alpha_6^4 = 0, \alpha_6^5 = 0.$$

Daher muß, damit kein Verstoß gegen Satz 5 vorliegt, etwa

$$\alpha_6^7 \neq 0$$

sein. Dann ist aber weiter

$$\alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^1 = 0, \alpha_2^3 \alpha_3^6 \alpha_6^7 \alpha_7^2 = 0, \alpha_3^6 \alpha_6^7 \alpha_7^3 = 0, \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^5 = 0, \alpha_6^7 \alpha_7^6 = 0$$

und folglich

$$\alpha_7^1 = 0, \alpha_7^2 = 0, \alpha_7^3 = 0, \alpha_7^5 = 0, \alpha_7^6 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_7^4 \neq 0$  wäre, so wäre der Zyklus  $\alpha_1^6 \alpha_2^7 \alpha_3^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1$  von 0 verschieden und die Würfel  $W_1, W_6, W_7, W_4, W_5$  würden, wenn man die Koordinaten in der Reihenfolge 1, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 8 aufschreibt, folgendes Bild geben:

$$\begin{array}{l|l} W_1: & 1, \alpha_1^6, 0, 0, 0 \\ W_6: & 0, 1, \alpha_6^7, 0, 0 \\ W_7: & 0, 0, 1, \alpha_7^4, 0 \\ W_4: & 0, 0, 0, 1, \alpha_4^5 \\ W_5: & \alpha_5^1, 0, 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} \alpha_1^2, 0, \alpha_1^3 \\ 0, 0, \alpha_6^2 \\ 0, 0, \alpha_7^2 \\ 0, 0, \alpha_4^6 \\ 0, 0, \alpha_5^8 \end{array}$$

Die Nullen rechts vom Strich sind nämlich bereits als solche bekannt, die Nullen links vom Strich ergeben sich aus Satz 3 nebst Zusatz. Nun würde aber der Würfel  $W_1 - W_6 \pm W_7 \pm W_4 \pm W_5$  gegen Satz 1 verstoßen, wenn man die Vorzeichen der Reihe nach so wählt, daß

$$\alpha_1^8 - \alpha_6^8 \pm \alpha_7^8 \pm \alpha_4^8 \pm \alpha_5^8$$

zwischen  $-1$  und  $1$  liegt. Daher ist

$$\alpha_7^4 = 0.$$

Damit kein Verstoß gegen Satz 5 vorliegt, muß jetzt

$$\alpha_7^8 \neq 0$$

sein. Weiter ist dann

$$\alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^2 \alpha_8^1 = 0, \alpha_3^8 \alpha_6^7 \alpha_7^2 \alpha_8^3 = 0, \alpha_6^7 \alpha_7^2 \alpha_8^6 = 0, \alpha_7^2 \alpha_8^7 = 0$$

und folglich

$$\alpha_2^1 = 0, \alpha_3^3 = 0, \alpha_3^6 = 0, \alpha_3^7 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_3^2 \neq 0$  oder  $\alpha_3^5 \neq 0$  wäre, so wäre der Zyklus  $\alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_6^7 \alpha_7^2 \alpha_8^2$  bzw.  $\alpha_2^1 \alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^2 \alpha_8^5$  von 0 verschieden und man hätte die Figur

$$\begin{array}{l|l} W_2: & 1, \alpha_2^3, 0, 0, 0 \\ W_3: & 0, 1, \alpha_3^6, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, 1, \alpha_6^7, 0 \\ W_7: & 0, 0, 0, 1, \alpha_7^2 \\ W_8: & \alpha_8^2, 0, 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 0, 0, 0 \\ 0, \alpha_3^4, 0 \\ 0, 0, 0, \text{ bzw. } \\ 0, 0, 0 \\ 0, \alpha_8^4, \alpha_8^5 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} W_5: & 1, \alpha_5^1, 0, 0, 0 \\ W_1: & 0, 1, \alpha_1^6, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, 1, \alpha_6^7, 0 \\ W_7: & 0, 0, 0, 1, \alpha_7^2 \\ W_8: & \alpha_8^5, 0, 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 0, 0, 0 \\ \alpha_1^2, 0, 0 \\ 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0 \\ \alpha_8^3, 0, \alpha_8^4 \end{array}$$

so daß der Würfel  $W_2 + W_3 + W_6 + W_7 - W_8$  bzw.  $W_5 + W_1 + W_6 + W_7 - W_8$  gegen Satz 1 verstoßen würde. Daher ist auch

$$\alpha_3^2 = 0, \alpha_3^5 = 0,$$

und damit  $W_3$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß

$$\alpha_3^4 \neq 0$$

sein. Sonach hat sich für die Grundfigur bis jetzt das Bild ergeben

$W_1$ :	1,	$\alpha_1^2$ ,	0,	0,	0	$\alpha_1^6$ ,	,	
$W_2$ :	0,	1,	$\alpha_2^3$ ,	0,	0	,	,	
$W_3$ :	0,	0,	1,	$\alpha_3^4$ ,	0	$\alpha_3^6$ ,	,	
$W_4$ :	0,	0,	0,	1,	$\alpha_4^5$	,	,	
$W_5$ :	$\alpha_5^1$ ,	0,	0,	0,	1	,	,	
<hr/>								
$W_6$ :	0,	0,	0,	0,	0	1,	$\alpha_6^7$ ,	
$W_7$ :	0,	0,	0,	0,	0	0,	1,	$\alpha_7^8$
$W_8$ :	0,	0,	0,	$\alpha_8^4$ ,	0	0,	0,	1,

wobei die eingesetzten  $\alpha_i^k$  alle von 0 verschieden sind, während die Plätze für diejenigen  $\alpha_i^k$ , von denen noch nicht feststeht, ob sie  $= 0$  oder  $\neq 0$  sind, leer gelassen wurden.

Nun ist aber weiter

$$\alpha_6^7 \alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^5 = 0, \quad \alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1 = 0, \quad \alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1 \alpha_1^2 = 0,$$

$$\alpha_8^4 \alpha_4^5 = 0, \quad \alpha_5^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3 = 0$$

und folglich

$$\alpha_4^5 = 0, \quad \alpha_5^1 = 0, \quad \alpha_1^2 = 0, \quad \alpha_2^3 = 0, \quad \alpha_3^4 = 0, \quad \alpha_4^5 = 0.$$

Wenn jetzt  $\alpha_1^6 \neq 0$  wäre, so würde der Würfel  $W_1 + W_4 - W_5 + W_7 + W_8$  gegen Satz 1 verstoßen. Daher ist

$$\alpha_1^6 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 + W_4 + W_5 - W_6 - W_7 + W_8$  gegen Satz 1.

Damit ist bewiesen, daß im  $R_8$  alle fünfgliedrigen Zyklen gleich 0 sind. Aus Satz 8, angewandt auf den Fall  $n = 8$ , folgt dann aber, daß überhaupt alle Zyklen gleich 0 sind. Daraus ergibt sich

**Satz 16.** *Im  $R_8$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.*

(Eingegangen am 13. 3. 1940.)

# Über die Galoissche Gruppe einer Klasse von trinomischen Gleichungen.

Von

Ph. Vassiliou in Athen.

1. Für die von B. L. van der Waerden angeregte Untersuchung von Gleichungen der Form

$$(1) \quad F(x) = x^n + ax^2 + b,$$

betreffend ihre Affektlosigkeit, hat U. Wegner als erster Kriterien angegeben, wobei er unter anderem  $n$  als ungerade Zahl voraussetzte<sup>1)</sup>.

Im folgenden wollen wir in einer anderen Richtung uns mit der Aufstellung solcher Kriterien beschäftigen, indem wir die Resultate einer Annalen-Arbeit desselben Autors<sup>2)</sup> auf Gleichungen vom Typus (1) übertragen. Als unmittelbare Folge ergibt sich dann ebenfalls eine notwendige Bedingung für die algebraische Auflösbarkeit von rational-irreduziblen Gleichungen der oben genannten Form.

2. Die ganzzahlige Gleichung (1) von Primzahlgrad  $n = p > 3$ , deren Diskriminante wir mit  $\Delta$  bezeichnen, wobei

$$\pm \Delta = 2^2 (p-2)^{p-2} a^p b + p^p b^{p-1}$$

ist, sei rational-irreduzibel.

Man betrachte das Polynom

$$\varphi(z) = z^p F\left(\frac{1}{z}\right) = bz^p + az^{p-2} + 1$$

und nehme eine ungerade Primzahl  $q \neq p$ , so daß  $(q, b) = 1$ ,  $(q, a(p-2)) = 1$  ist. Für  $\varphi(z)$  ist die Gleichungsdiskriminante wieder  $\Delta$ .

Ferner sei

$$\varphi(z) \equiv \varphi_1^{e_1}(z) \dots \varphi_1^{e_2}(z) \pmod{q}$$

die Zerlegung  $\pmod{q}$  in Primfunktionen von  $\varphi(z)$ . Durch einmalige Differentiation bekommt man

$$z^{p-3} \{pbz^2 + (p-2)a\} \equiv \varphi_1^{e_1-1}(z) \dots \varphi_1^{e_2-1}(z) Q(z) \pmod{q}.$$

<sup>1)</sup> U. Wegner, Zur Theorie der affektlosen Gleichungen, Math. Annalen 111 (1935), S. 738–742.

<sup>2)</sup> U. Wegner, Über trinomische Gleichungen von Primzahlgrad, 111 (1935), S. 734–737. Siehe auch B. L. van der Waerden, Die Zerlegungs- und die Trägheitsgruppe als Permutationsgruppen, l. c., S. 731–733.

3. Nun nehmen wir an, daß  $q/\Delta$  ist, also

$$(2) \quad 2^2 (p-2)^{p-2} a^p + p^p b^{p-2} \equiv 0 \pmod{q}.$$

Wegen (2) geht mindestens ein Faktor  $\varphi_i(z)$  in einer höheren als der ersten Potenz in  $\varphi(z) \pmod{q}$  auf. Übrigens ist, mit der Gaußschen Bezeichnung der symbolischen Brüche,  $-\frac{pb}{(p-2)a}$  quadratischer Rest  $\pmod{q}$ , d. h.

$$-\frac{pb}{(p-2)a} \equiv \xi^2,$$

folglich zerfällt der Faktor  $(pbx^2 + (p-2)a)$ ,  $\pmod{q}$  in ein Produkt von zwei linearen Faktoren.

Aus der Tatsache der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfunktionen  $\pmod{q}$ , und da wegen  $(b, q) = 1$  kein Faktor  $\varphi_i(z)$  gleich  $z$  ist, folgt, daß höchstens zwei  $e_i$  größer als Eins sein können.

4. Aus dem oben Gesagten entnimmt man, daß  $F(x) \pmod{q}$ , außer höchstens der zweiten Potenz der linearen Faktoren  $(x - \xi)$  und  $(x + \xi)$ , nur Primfunktenteiler zur ersten Potenz enthält.  $F(x)$  kann aber nicht beide  $\pmod{q}$  inkongruente Faktoren  $(x - \xi)$ ,  $(x + \xi)$  enthalten, sonst hätte man

$$2\xi^p \equiv 0 \pmod{q},$$

was unmöglich sein kann.

Man nehme für das Weitere

$$\xi = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{2 \frac{p-3}{2} \frac{p-1}{2} a^{\frac{p-3}{2}}}{p^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-3}{2}}} \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

Die Zerlegung von  $F(x)$  muß also folgendermaßen aussehen

$$(3) \quad x^p + ax^2 + b \equiv (x - \xi)^2 f_2(x) \dots f_l(x) \pmod{q}.$$

5. Nun ist es leicht zu zeigen, daß  $F(x)$  im Oreschen Sinne regulär ist<sup>3)</sup>. Zu dem Zweck bemerken wir zuerst, daß für die Primfunktionen  $\pmod{q}$ ,  $f_i(x) = f(x)$ , die Entwicklung

$$F(x) = \sigma_0(x) f^\mu(x) + \dots + \sigma_{\mu-1}(x) f(x) + \sigma_\mu(x),$$

wo der Grad von

$$\sigma_i(x) \quad (i = 0, 1, \dots, \mu)$$

kleiner als der Grad von  $f(x)$  ist, wegen (3) liefert

$$\sigma_{\mu-1}(x) \not\equiv 0, \text{ aber } \sigma_\mu(x) \equiv 0 \pmod{q}.$$

<sup>3)</sup> O. Ore, Über die Theorie der algebraischen Körper. Den sjette skandinaviske Matematikerkongress, Kopenhagen 1925, S. 432–433, oder von demselben Autor, Weitere Untersuchungen zur Theorie der algebraischen Körper, Acta Math. 45 (1925), S. 150.

Das zur Entwicklung  $(g, f(x))$  gehörende Newtonsche Hauptpolygon besteht also aus einer Seite  $S$  (mit einer von Null verschiedenen Steigung), welche die beiden Punkte  $(\mu - 1, 0)$  und  $(\mu, \delta_\mu)$  miteinander verbindet. Dabei bedeutet  $\delta_\mu$  die höchste Potenz der Primzahl  $q$ , welche in allen Koeffizienten von  $\sigma_\mu(x)$  aufgeht.

Da auf  $S$  kein Gitterpunkt außer Anfangs- und Endpunkt liegen kann, so können keine mehrfache Primfunktionsteiler der Seite  $S \pmod{S}$  auftreten.

6. Wir kommen jetzt zur Bestimmung des Newtonschen Polygons, welches zur Entwicklung  $(g, x - \xi)$  gehört.

Wir setzen

$F(x) = (x - \xi)^p + \gamma_1(x - \xi)^{p-1} + \dots + \gamma_{p-1}(x - \xi)^2 + \gamma_{p-1}(x - \xi) + \gamma_p$ ,  
mit konstanten Koeffizienten  $\gamma_h$ , wobei

$$\gamma_{p-2} = \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \xi^{p-2} + a, \quad \gamma_{p-1} = p \xi^{p-1} + 2a\xi, \quad \gamma_p = \xi^p + a\xi^2 + b$$

ist.

Sei  $q^\delta$  die genaue Potenz von  $q$ , welche in  $\Delta/b$  aufgeht, und  $\delta$  sei *ungerade*. Dann ist

$$\xi^2 = -\frac{pb}{(p-2)a} + \Delta_1,$$

wobei  $\Delta_1 = \pm \frac{\Delta}{a(p-2)b^{p-2}p^{p-1}}$  eine genau durch die  $\delta$ -te Potenz von  $q$  teilbare Zahl ist.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \text{a) } \gamma_p &= \xi (\xi^2)^{\frac{p-1}{2}} + a\xi^2 + b \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{(pb)^{\frac{p-1}{2}}}{((p-2)a)^{\frac{p-1}{2}}} \xi - \frac{p-b}{2} \\ &\quad + b + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p-1}{2} \frac{(pb)^{\frac{p-3}{2}}}{((p-2)a)^{\frac{p-3}{2}}} \xi \Delta_1 + a\Delta_1 + (\Delta_1^2) \\ &= \frac{a}{p} \Delta_1 + (\Delta_1^2).^4 \\ \text{b) } \gamma_{p-1} &= p(\xi^2)^{\frac{p-1}{2}} + 2a\xi = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p^{\frac{p-1}{2}} \cdot b^{\frac{p-3}{2}}}{(a(p-2))^{\frac{p-3}{2}}} \cdot \frac{p-3}{2} \Delta_1 + (\Delta_1^2). \\ \text{c) } \gamma_{p-2} &\not\equiv 0 \pmod{q}, \end{aligned}$$

<sup>4)</sup> Mit  $(\Delta_1^2)$  bezeichnen wir die Summe von Gliedern, deren jedes mindestens den Faktor  $\Delta_1^2$  besitzt.

denn sonst wäre auch  $2\xi\gamma_{p-2} - \gamma_{p-1} = p(p-2)\xi^{p-1}$  durch  $q$  teilbar, was unmöglich sein kann.

Folglich ist  $\gamma_p$  genau durch die  $\delta$ -te Potenz von  $q$  teilbar,  $\gamma_{p-1}$  mindestens durch  $q^\delta$  und  $\gamma_{p-2} \not\equiv 0 \pmod{q}$ . Also das gesuchte Newtonsche Hauptpolygon besteht wieder aus einer Seite  $T$ , welche durch die Punkte  $(p-2, 0)$  und  $(p, \delta)$  bestimmt wird. Da  $\delta$  ungerade angenommen wurde, so kann wieder auf dieser Seite kein anderer Gitterpunkt außer Anfangs- und Endpunkt liegen, bei  $(\text{mod } T)$  treten also keine mehrfachen Primfunktenteiler der Seite  $T$  auf.

7. Zur Bestimmung des  $q$ -Beitrages im Index  $C$  einer Zahl  $x_1$ , welche die in bezug auf  $q$  reguläre Gleichung  $F(x) = 0$  erfüllt, benutzen wir nun einen Satz von O. Ore<sup>5)</sup>, der besagt, daß dieser Beitrag gleich  $\Sigma mL$  ist, wo  $m$  den Grad der Primfunktenteiler von  $F(x)$  und  $L$  die Anzahl der zwischen dem Hauptpolygon  $(q, g(x))$  und der  $X$ -Achse liegenden Gitterpunkte bedeutet (ausgenommen derjenigen Gitterpunkte, welche auf der  $X$ -Achse oder auf der Ordinate des Endpunktes des Polygons liegen).

In unserem Falle ist  $L = 0$ , sobald  $g(x) \neq x - \xi$ , und für  $g(x) = x - \xi$   $m = 1$ ,  $L = \frac{\delta-1}{2}$ .

Man sieht also, daß  $q$  nach den angenommenen Voraussetzungen genau in der ersten Potenz in der Körperdiskriminante von  $P(x_1)$  aufgehen muß ( $P$  der Körper der rationalen Zahlen).

8. Für eine Primzahl  $q$ , welche ein Teiler von  $\Delta/b$  ist, folgen die Bedingungen  $q \neq 2$ ,  $q \neq p$ ,  $(q, b) = 1$  und  $(q, a(p-2)) = 1$  schon einfach aus  $(a, b) = 1$ ,  $(a, p) = 1$ ,  $(b, 2(p-2)) = 1$ .

Aus den obigen Überlegungen und der Benutzung eines Satzes von B. L. van der Waerden<sup>6)</sup> haben wir, zusammenfassend, folgendes Resultat erhalten:

**Satz.**  $F(x) = x^p + ax^2 + b$  sei eine ganzzahlige, rational-irreduzible Gleichung von Primzahlgrad  $p > 3$ . Weiter sei  $(a, b) = 1$ ,  $(a, p) = 1$ ,  $(b, 2(p-2)) = 1$  und  $q$  eine Primzahl, welche in  $\Delta/b$  in ungerader Potenz enthalten ist, wo  $\Delta$  die Gleichungsdiskriminante bedeutet. Dann besitzt  $F(x) = 0$  in bezug auf  $P$  die symmetrische Gruppe als Galoissche Gruppe.

9. Nachdem die Zerlegung (3) gewonnen ist, hätte man den weiteren Beweisgang darin ändern können, daß man die Berechnung der Diskriminante ganz vermeidet. Folgende einfache und elegante Schlußweise verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von B. L. van der Waerden.

<sup>5)</sup> O. Ore, Bestimmung der Diskriminanten algebraischer Körper, Acta math. 45 (1925), S. 336.

<sup>6)</sup> Siehe seine in der Fußnote <sup>5)</sup> erwähnte Arbeit, Satz II.

Wie auch die Newtonsche Polygonseite ausfällt, jedenfalls kann die Zerlegung der Primzahl  $q$  im Körper  $P(x_1)$  nur so aussehen:

$$(q) = \alpha p_2 p_3 \dots p_1.$$

wobei  $\alpha$  entweder ein Primideal zweiten Grades oder ein Produkt von zwei (gleichen oder verschiedenen) Primidealen ersten Grades ist. Ist nun  $\delta$  ungerade, so teilt  $q$  die Körperdiskriminante, also kommt nur noch der Fall

$$\alpha = p_1^2$$

in Betracht, wobei  $p_1$  vom ersten Grade ist. Nach Satz I der in der Fußnote \*) zitierten Arbeit von van der Waerden enthält nun die Zerlegungsgruppe eine Transposition, also kann die Galoissche Gruppe nur die symmetrische sein (vgl. den Beweis des Satzes II derselben Arbeit). Nachträglich folgt auch, daß die Körperdiskriminante genau durch die erste Potenz von  $q$  teilbar ist, in Übereinstimmung mit dem unter 7. gewonnenen Resultat unserer Rechnung.

(Eingegangen am 27. 12. 1939.)

# Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen.

Von

Hans Petersson in Prag.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung und Inhaltsübersicht . . . . .	453
§ 1. Weierstraßpunkte der automorphen Formen komplexer Dimension . . . . .	459
§ 2. Die Poincaréschen Reihen $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma   F)$ für $r > 2$ , $ v  = 1$ . . . . .	469
§ 3. Die Poincaréschen Reihen $G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N   F)$ . . . . .	476
§ 4. 1. Metrisierung . . . . .	492
2. Beweis der Grundformeln . . . . .	498
§ 5. Anwendung der Metrisierung auf die Poincaréschen Reihen . . . . .	506
§ 6. Metrisierung der Abelschen Differentiale im Zusammenhang mit Integralperioden . . . . .	529

## Einleitung und Inhaltsübersicht.

Im folgenden soll eine Theorie der Poincaréschen Reihen auf der Grundlage einer Metrisierung der automorphen Formen entwickelt werden. Dabei handelt es sich um die allgemeinen automorphen Formen von reeller Dimension  $-r$  mit Multiplikatoren des Betrages Eins, welche zu einer Grenzkreisgruppe  $\Gamma$  von erster Art gehören, d. h. einer Grenzkreisgruppe mit einem endlichen Erzeugendensystem. Insoweit die Darstellung der automorphen Formen durch Poincarésche Reihen in Betracht kommt, wird  $r > 2$ , also die absolute Konvergenz dieser Reihen vorausgesetzt. Nur bei den stark spezialisierten Gruppen  $\Gamma$ , bei denen man durch einen Grenzübergang aus dem Gebiete absoluter Konvergenz an die Reihen von der Dimension  $-2$  herangelangt, wird auch der Fall  $r = 2$ ,  $v = 1$  diskutiert. Den erheblichen Schwierigkeiten, die die Diskussion dieses Falles bietet, entspricht seine zentrale Bedeutung in der Theorie der automorphen Formen: Die Formen der Gruppe  $\Gamma$  mit  $r = 2$  und  $v = 1$  sind die durch Einführung der uniformisierenden Variablen normierten Abelschen Differentiale des  $\Gamma$  zugeordneten algebraischen Gebildes. Von der Gruppe  $\Gamma$  wird, sobald Poincarésche Reihen auftreten, angenommen, daß sie parabolische Substitutionen enthalte.

Die vorliegende Arbeit betrifft zu einem wesentlichen Teil das Problem der expliziten Darstellung der automorphen Formen durch Poincarésche

Reihen. Man zerlegt dieses Problem zweckmäßig in zwei Teilprobleme: Zunächst läßt sich ohne Schwierigkeiten eine Poincarésche Reihe konstruieren, die in endlich vielen vorgegebenen Punkten eines Fundamentalbereichs von  $\Gamma$  Pole mit vorgegebenen Hauptteilen aufweist, soweit die Daten mit den Existenzbedingungen für automorphe Formen verträglich sind; in den parabolischen Fixpunkten (Spitzen) kann unter dieser Einschränkung auch noch das konstante Glied der Entwicklung nach der Ortsvariablen vorgeschrieben werden. Durch diese Konstruktion wird das erste Teilproblem befriedigend gelöst und das Gesamtproblem auf das zweite Teilproblem reduziert, die Darstellung der ganzen, in den Spitzen verschwindenden Formen (oder, wie wir kürzer sagen wollen, der ganzen Spitzenformen) durch Poincarésche Reihen.

Dieses zweite Teilproblem wurde sowohl von Poincaré als auch von Ritter-Fricke gelöst; allerdings besteht die Lösung in einer reinen Existenzaussage und wurde auf erheblichen Umwegen gewonnen. Der bewiesene Satz hat an den genannten beiden Stellen verschiedenen Wortlaut, weil zwei verschiedene Typen von Poincaréschen Reihen zur Darstellung der automorphen Formen benutzt wurden. Er besagt aber in jedem Falle, daß eine von mehreren komplexen Parametern abhängige Poincarésche Reihe ein volles System linear-unabhängiger ganzer Spitzenformen darstellt, wenn man für diese Parameter geeignete Zahlwerte einsetzt; eine Vorschrift zur Bestimmung dieser Werte wurde nicht gegeben. Auch der Satz, den ich vor einigen Jahren über diese Darstellungsfrage bei Gruppen mit parabolischen Substitutionen beweisen konnte<sup>1)</sup>, enthielt ein solches Element der Unbestimmtheit; immerhin tritt in den damals untersuchten Poincaréschen Reihen nur noch eine natürliche Zahl in der Rolle eines Parameters auf, für die dann geeignete Werte zu wählen sind, damit die entstehenden Reihen eine Basis der Schar der ganzen Spitzenformen bilden.

Zum Beweis dieses Satzes bedurfte es — neben einer exakten Neubegründung der von Ritter und Fricke dargestellten Theorie — einer Anzahl von Teiluntersuchungen, in denen von dem eigentlichen Gegenstand des Problems, den ganzen Spitzenformen, überhaupt nicht die Rede war. Dagegen traten automorphe Formen von der Dimension  $-r$  auf, welche in einem Punkte der oberen Halbebene einen frei beweglichen Pol erster Ordnung aufweisen und sich sonst wie ganze Spitzenformen verhalten, ferner die automorphen Formen von der positiven Dimension  $r-2$  mit den Multiplikatoren  $\frac{1}{v}$ . Es erwies sich als nötig, abzählende Betrachtungen einerseits über die Minimalzahl der wirklichen, frei beweglichen Pole dieser Formen von der Dimension  $r-2$ , andererseits über die Perioden, die gewisse Funk-

<sup>1)</sup> Siehe <sup>2)</sup> (E).

tionen von zwei Variablen bei den Substitutionen von  $\Gamma$  aufnehmen, streng durchzuführen. Und zum Schluß mußte die Entwicklung einer komplizierten Poincaréschen Reihe nach den einfachen Reihen, die nur noch von einer natürlichen Zahl als Parameter abhängen, aufgestellt werden. Die Übertragung dieser Untersuchungen auf den Fall  $r = 2$ ,  $v = 1$ , der vorläufig nur bei den Gruppen  $\Gamma$  eines gewissen Spezialtyps durch ein Summationsverfahren zugänglich ist, brachte zudem außerordentliche Schwierigkeiten mit sich, zu deren Überwindung analytische Ausdrücke in fünf komplexen Variablen herangezogen werden mußten.

Die Metrisierung macht nun, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, alle diese Hilfsmittel entbehrlich. Sie bewirkt, daß die Sätze über die Darstellung der ganzen Spitzenformen durch die Poincaréschen Reihen der verschiedensten Typen mit den elementaren Methoden der linearen Algebra bewiesen werden können. Sie führt überdies zu einer Charakterisierung der Poincaréschen Reihen durch innere Eigenschaften und ermöglicht dadurch eine erhebliche Vertiefung der Theorie dieser Ausdrücke, die man bisher nur mit rein rechnerischen Methoden untersucht hat. In diesem Sinne gewinnt man durch die Metrisierung eine im Prinzip vollständige Übersicht einerseits über die linearen Relationen zwischen den Poincaréschen Reihen der verschiedensten Typen, andererseits über die Lösungsmöglichkeiten des Problems, die Erzeugenden einer Teilschar innerhalb der Schar aller ganzen Spitzenformen explizit durch Poincarésche Reihen darzustellen. Neben diesen Erkenntnissen ergeben sich auch Aussagen über gewisse lineare Integralgleichungen und Funktionaloperatoren, deren Bauart sich aus den zur Metrisierung verwendeten Doppelintegralen herleitet, sowie enge Beziehungen zu den Perioden der Abelschen Integrale erster Gattung des der Gruppe  $\Gamma$  zugeordneten algebraischen Gebildes.

Im einzelnen ist der Aufbau der hier niedergelegten Theorie der folgende:

In § 1 wird die Verallgemeinerung des klassischen Begriffs der Weierstraßpunkte auf die allgemeinen automorphen Formen  $\{\Gamma, -r, v\}$  entwickelt, die also zu einer beliebigen Grenzkreisgruppe  $\Gamma$  von erster Art in der komplexen Variablen  $\tau$ , einer beliebigen komplexen Dimension  $-r$  und zu einem beliebigen Multiplikatorsystem  $v$  gehören. Diese Verallgemeinerung konstatiert für irgendeinen bestimmten Punkt  $\tau = \tau_0$  eines Fundamentalbereichs von  $\Gamma$  eine Beziehung zwischen den niedrigsten Ordnungszahlen der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r, v\}$  im Punkte  $\tau_0$  und den Lückenzahlen für die Polordnungen der außerhalb von  $\tau_0$  regulären Formen  $\{\Gamma, r - 2, \frac{1}{v}\}$ . Die Summe der Abweichungen der Lückenzahlen von den normalen Werten, erstreckt über alle Punkte  $\tau_0$  eines Fundamentalbereichs, erweist sich wie in der klassischen Theorie als ein elementarer Ausdruck in den Konstanten der Formen-

schar  $\{\Gamma, -r, v\}$ . Der klassische Fall entsteht aus dem allgemeinen für  $r = 2$ ,  $v = 1$ , weil die ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -2, 1\}$  genau die Abelschen Differentiale von erster Gattung des  $\Gamma$  zugeordneten algebraischen Gebildes darstellen.

Bei den Grenzkreisgruppen  $\Gamma$  mit parabolischen Substitutionen hat sich hinsichtlich der Bauart der Poincaréschen Reihen eine Abänderung des ursprünglichen Ansatzes von Poincaré als zweckmäßig herausgestellt. Von den „Poincaréschen Reihen neuer Art“ werden in der vorliegenden Arbeit nur solche diskutiert, welche sich durch ihre Reihendarstellung als ganze automorphe Formen zu erkennen geben. Diese Bedingung bedeutet eine Einschränkung für den Ansatz dieser Reihen, der wie bei Poincaré durch eine in weitem Maße willkürliche analytische Parameterfunktion

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v z^v$$

bestimmt ist. Die im folgenden getroffene Einschränkung geht möglicherweise etwas weiter, als unbedingt erforderlich wäre: Es wird verlangt, daß

$\sum_{v=0}^{\infty} |\beta_v|$  konvergiert, während es vielleicht ausreicht, daß die Folge  $|\beta_v|$  nicht stärker als eine Potenz  $v^\alpha$  mit einem gewissen festen, von  $r$  abhängigen Exponenten  $\alpha > 0$  anwächst. Im übrigen spielt diese Konvergenzfrage in den folgenden Untersuchungen deswegen keine Rolle, weil es nur darauf ankommt, daß die unendliche Summe der mit  $F(z) = z^r$  gebildeten und mit  $\beta_v$  multiplizierten Poincaréschen Reihen konvergiert.

Aus der Menge der so bestimmten Poincaréschen Reihen  $G_{-r}(\tau, A|F)$ , die in § 2 erneut eingeführt werden, heben sich daher durch die Spezialisierung  $F(z) = z^r$  ( $v \geq 0$  und ganz) die Poincaréschen Reihen  $G_{-r}(\tau, A, v)$  des einfachsten obengenannten Typus heraus. In ihnen tritt nur noch ein ganzes  $v \geq 0$  als Parameter auf, und sie erweisen sich in den folgenden Paragraphen als die Grundelemente des Systems aller Poincaréschen Reihen, welche hier untersucht werden. Eine einfache Konvergenzbetrachtung ermöglicht die Bestimmung der Fourierkoeffizienten der  $G_{-r}(\tau, A, v)$ , wenn  $r > 2$  ist und im übrigen die allgemeinen zu Anfang beschriebenen Verhältnisse vorliegen.

In § 3 werden diese Ergebnisse auf die Formen von der Dimension  $-2$  übertragen. Bei den spezialisierten Gruppen  $\Gamma$ , bei denen der Fall  $r = 2$ ,  $v = 1$  behandelt werden kann, sind die Funktionen  $G_{-2}(\tau, A|F)$  als Werte gewisser analytischer Funktionen  $G_{-2}(s; \tau, A|F)$  von  $s$  für  $s = 0$  erklärt. Nun wird durch die systematische Anwendung der Metrisierung zwar der

oben erwähnte, überaus komplizierte analytische Apparat der Funktionen von fünf komplexen Variablen gespart; es erweist sich aber statt dessen als notwendig, einen genaueren Überblick über das Verhalten der Funktionen  $G_{-2}(s; \tau, A|F)$  in ihrer Abhängigkeit von  $s$  und  $\tau$  zu gewinnen. Insbesondere muß gezeigt werden, daß die  $G_{-2}(s; \tau, A|F)$  gleichmäßig für alle  $\tau$  eines gewissen Bereichs ihrem Nullwerte  $G_{-2}(0; \tau, A|F)$  zustreben, wenn  $s$  gegen Null strebt. Aus diesem Grunde muß der Existenzbeweis für diese Nullwerte reproduziert werden. Er ergibt sich aus einer Reihendarstellung der Funktionen  $G_{-2}(s; \tau, A|F)$ , der man dann auch die Gültigkeit jener Limesbeziehung entnehmen kann.

In § 4 werden zunächst gewisse Doppelintegrale eingeführt, welche zwei gegebene ganze automorphe Formen, von denen eine eine Spitzenform sein muß, miteinander verknüpfen, und welche sich bei den reellen linearen Transformationen auf die Variable der beiden Formen in übersichtlicher Weise umsetzen. Das Skalarprodukt der gegebenen Formen wird durch ein Integral dieser Gestalt, erstreckt über einen Fundamentalbereich der zugehörigen Gruppe, definiert. Die Eigenschaften dieser Integrale ermöglichen dann den Beweis der Grundformeln, d. h. die Berechnung des Skalarprodukts einer beliebigen ganzen Spitzenform mit einer beliebigen der Poincaréschen Reihen  $G_{-\tau}(A|F)$ ,  $\tau \geq 2$ . Die Berechnung geschieht durch die sinngemäße Übertragung des Poissonschen Summationsverfahrens auf die vorliegenden Verhältnisse.

In dem folgenden § 5 findet sich dann die Theorie der Poincaréschen Reihen auf der Grundlage der Metrisierung. Der allgemeine Charakter der Ergebnisse ist hier weiter oben angedeutet worden. Eine Darstellung der Theorie für die zur vollen Modulgruppe gehörigen Formen von gerader Dimension mit Multiplikatoren Eins habe ich an anderer Stelle veröffentlicht<sup>2)</sup>. Beim vorliegenden Aufbau der Theorie bediene ich mich einer anderen Anordnung und größtenteils auch anderer Beweise als in der genannten Darstellung, obwohl sich diese in allen Einzelheiten — natürlich abgesehen von dem Abschnitt über die Operatoren  $T_n$  — wörtlich auf die allgemeinen Formenscharen, die hier untersucht werden, übertragen läßt. Durch die Abänderungen wird eine erhebliche Vereinfachung erzielt.

Im letzten Paragraphen (§ 6) werden die Beziehungen zwischen der Metrisierung der eigentlich-automorphen Formen, von der Dimension  $-2$  und der Riemannschen Theorie der Integralperioden des  $\Gamma$  zugeordneten algebraischen Gebildes  $\mathfrak{G}$  untersucht. Die Greensche Formel der Ebene führt hier zu einer Gleichung, nach der das Skalarprodukt zweier ganzen

<sup>2)</sup> Siehe <sup>3)</sup> (J II).

Spitzenformen von der Dimension  $-2$  durch einen bilinearen Ausdruck in den Perioden der zugehörigen Abelschen Integrale erster Gattung von  $\mathfrak{G}$  dargestellt werden kann. Danach ist jede Aussage über das Skalarprodukt zweier ganzen Spitzenformen zugleich eine Aussage über die Perioden der diesen Formen entsprechenden Integrale erster Gattung.

Bei der Durchführung der Beweise muß ich, um den Umfang der Arbeit in erträglichen Grenzen zu halten, an zahlreichen Stellen die Ergebnisse früherer eigener Untersuchungen heranziehen. Es handelt sich in diesen Ergebnissen um die unentbehrlichen Grundlagen der Theorie, die nicht nochmals dargestellt werden können. Ich hoffe, den Schwierigkeiten, die das Studium der vorliegenden Arbeit aus diesem Grunde bietet, dadurch einigermaßen abhelfen zu können, daß ich die benutzten Literaturstücke im Text durch genaue Stellenangaben zitiere. Die Abhandlungen, aus denen zitiert wird, finden sich in der Fußnote<sup>3)</sup> auf dieser Seite. Die Bezeichnungen und Abkürzungen sind gleichfalls aus diesen Arbeiten, in denen sie bis auf geringfügige Abweichungen miteinander übereinstimmen, entnommen, werden aber größtenteils von neuem erklärt. Außerdem sind die Grundbegriffe der Theorie in (G I), S. 30, 31 unter der Überschrift *Bezeichnungen* zusammengestellt.

<sup>3)</sup> Die nachstehend aufgeführten Abhandlungen des Verf. werden sämtlich durch Abkürzungen zitiert. Das Verzeichnis enthält zuerst die Abkürzung, darauf die Angabe der zugehörigen Abhandlung.

- (B) Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen, *Math. Annalen* 103 (1930), S. 369–436.
- (A) Darstellung der eigentlich-automorphen Formen  $(-2)$ -ter Dimension durch eine Art Poincaréscher Reihen bei gewissen Grenzkreisgruppen, *Math. Annalen* 105 (1931), S. 206–239.
- (E) Ein Fundamentalsatz aus der Theorie der ganzen automorphen Formen, *Math. Annalen* 106 (1932), S. 343–368.
- (F I) Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, *Acta Math.* 58 (1931), S. 169–215.
- (G I) Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, Teil I bis Teil V, *Math. Annalen* bis 115 (1938), S. 23–67, S. 175–204, S. 518–572, S. 670–709; *Math. Zeitschr.*
- (G V) 44 (1938), S. 127–155.
- (J I) Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe, *Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Univ.* 12 (1938), S. 415–472.
- (K I) Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, *Math. Annalen* 116 (1939), S. 401–412.
- (J II) Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 49 (1939), S. 49–75.

In der vorliegenden Arbeit soll unter  $\Gamma$  stets eine Grenzkreisgruppe von erster Art verstanden werden. Die Zahl  $r$  ist nicht immer reell. Es treten aber nur im § 1 automorphe Formen der Klasse  $\{\Gamma, -r, v\}$  mit komplexem  $r$  und einem beliebigen Multiplikatorsystem  $v$  zu  $\Gamma$  und  $-r$  auf. Vom § 2 an wird dagegen, wenn von ganzen automorphen Formen  $\{\Gamma, -r, v\}$  die Rede ist, vorausgesetzt, daß  $r > 0$  und daß  $|v| = 1$  sei. Sobald Poincarésche Reihen untersucht werden, wird angenommen, daß  $\Gamma$  parabolische Substitutionen enthalte, daß  $r > 2$  und daß  $|v| = 1$  sei. Nur bei den speziellen Gruppen  $\Gamma = \Gamma(N)$ , den Hauptkongruenzuntergruppen der Modulgruppe von der Stufe  $N$ , kann  $r$  auch gleich 2 sein; dann ist im übrigen immer  $v = 1$ .

## § 1.

## Weierstraßpunkte der automorphen Formen komplexer Dimension.

Es sei  $\Gamma$  eine beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art [(G I), § 1, 1; § 2, 3],  $r$  komplex,  $v$  ein Multiplikatorsystem zu  $\Gamma$  und  $-r$  [(G I), § 2, 2], und es bedeute  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  die lineare Schar der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r, v\}$ , d. h. der automorphen Formen aus der Klasse  $\{\Gamma, -r, v\}$ , welche Multipla des Ergänzungsdivisors  $\alpha$  dieser Klasse sind [(G II), § 4, 1]. Wir setzen voraus, daß  $\mathfrak{C}_0$  eine nicht identisch verschwindende Funktion enthalte, daß also der Rang  $\mu = \nu_0(-r, v; \alpha)$  von  $\mathfrak{C}_0$  positiv sei. Wir bezeichnen in dieser Arbeit mit  $\sigma_0$  (an Stelle von  $\sigma$ ) die Anzahl der paarweise inäquivalenten parabolischen Fixpunkte von  $\Gamma$ , mit  $\sigma$  den Realteil einer später auftretenden komplexen Variablen  $s$ . Wir schreiben ferner

$$\eta_j = \kappa_j + \vartheta_j, \quad (1 \leq j \leq \sigma_0),$$

$$\bar{n} = \bar{n}(\Gamma, r, v) = r \left( p - 1 + \frac{q}{2} \right) - \sum_{j=1}^{\sigma_0} \eta_j - \sum_{k=1}^{\epsilon_0} e_k - p + 1.$$

Dann gilt der verallgemeinerte Riemann-Rochsche Satz [(G II), (63)] für einen beliebigen Divisor  $\mathfrak{d}$  mit ganzen Exponenten in der Fassung:

$$(1) \quad \nu_0(-r, v; \mathfrak{d}) = -\text{ord } \mathfrak{d} + \bar{n} + \nu_0(r - 2, v^{-1}; \mathfrak{d}^{-1}).$$

Es sei  $\tau = \tau_0$  ein beliebiger Punkt in einem kanonischen Fundamentalbereich  $\mathfrak{R}$  von  $\Gamma$  [(G I), § 2, 3],  $\lambda$  der „Zwangsbeitrag“ (zu den Entwicklungsexponenten der Formen) von  $\mathfrak{C}_0$  (nach der Ortsvariablen) im Punkte  $\tau_0$ , also, wenn  $s_j$  ( $1 \leq j \leq \sigma_0$ ) die parabolischen Spitzen,  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq \epsilon_0$ ) die elliptischen Ecken von  $\mathfrak{R}$  durchläuft,  $\lambda = \eta_j$  ( $\tau_0 = s_j$ ,  $1 \leq j \leq \sigma_0$ ),  $\lambda = e_k$  ( $\tau_0 = \omega_k$ ,  $1 \leq k \leq \epsilon_0$ ),  $\lambda = 0$  sonst. Die Gesamtanzahl der Nullstellen

einer Form von  $\mathfrak{C}_0$  (d. h. die Ordnung ihres Divisors), vermindert um die Summe aller Zwangsbeiträge, hat den Wert

$$a = a(\Gamma, r, v) = r \left( p - 1 + \frac{q}{2} \right) - \sum_{j=1}^q \eta_j - \sum_{k=1}^q \varrho_k = \bar{n} + p - 1.$$

Die Formel (1) nimmt für  $b = (\tau_0)^m$  ( $m$  ganz) die Gestalt an:

$$(2) \quad v_0(-r, v; a(\tau_0)^m) = -m + \bar{n} + v_0(r-2, v^{-1}; (\tau_0)^{-m}).$$

Wir setzen

$$(3) \quad \begin{cases} u_m = u_m(-r, v; \tau_0) = v_0(-r, v; a(\tau_0)^m) - v_0(-r, v; a(\tau_0)^{m+1}) \quad (m \geq 0), \\ u'_m = u'_m(-r, v; \tau_0) = v_0(r-2, v^{-1}; (\tau_0)^{-m}) - v_0(r-2, v^{-1}; (\tau_0)^{-(m+1)}) \quad (m \geq 1) \end{cases}$$

und erhalten aus (2):

$$u_m + u'_{m+1} = 1 \quad (m \text{ ganz und } \geq 0),$$

ferner nach der Definition von  $a$  aus (3):

$$u_m = 0 \quad \text{für } m > a, \quad \mu = v_0(-r, v; a) = \sum_{m=0}^a u_m.$$

Da  $u_m$  und  $u'_{m+1}$  für  $m \geq 0$  offenbar nur die Werte Null und Eins annehmen können, ergibt sich

**Satz 1.** Es sei  $\Gamma$  von erster Art,  $r$  komplex,  $v$  ein Multiplikatorsystem zu  $\Gamma$  und  $-r, \tau = \tau_0$  ein beliebiger Punkt in einem kanonischen Fundamentalbereich  $\mathfrak{R}$  von  $\Gamma$ . Eine natürliche Zahl  $n$  heiße eine Nicht-Lücke, wenn es eine automorphe Form  $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$  gibt, die im Punkte  $\tau = \tau_0$  einen Pol der Ordnung  $n$  aufweist und sonst in  $\mathfrak{R}$  regulär ist; wenn es dagegen eine solche automorphe Form nicht gibt, so heiße  $n$  eine Lücke. (Zur Ausdrucksweise sei erklärt: Ist  $\xi$  der mit kleinstem nicht negativem Realteil versehene Rest mod 1 der Exponenten in der Entwicklung der Formen  $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$  nach der Ortsvariablen von  $\tau = \tau_0$ , so hat eine Form  $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$  in  $\tau_0$  einen Pol der Ordnung  $n$ , wenn ihre Ordnung in diesem Punkte gleich  $-n + \xi$  ist).

Es sei nun  $\mu = v_0(-r, v; a)$ . Dann gibt es in der Folge aller natürlichen  $n$  genau  $\mu$  Lücken

$$n = m_1 + 1, n = m_2 + 1, \dots, n = m_\mu + 1 \quad (0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_\mu \leq a).$$

Es sei weiter  $\lambda$  der Zwangsbeitrag der Schar  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r, v\}$  im Punkte  $\tau = \tau_0$ . Wir sagen: Eine Form aus  $\mathfrak{C}_0$  der Ordnung  $m + \lambda$  im Punkte  $\tau_0$  hat (in bezug auf  $\mathfrak{C}_0$ ) die reduzierte Ordnung  $m$  (im Punkte  $\tau = \tau_0$ ). Dann ist  $m_1$  die niedrigste reduzierte Ordnung der Formen von  $\mathfrak{C}_0$ ,  $m_2$  die niedrigste reduzierte Ordnung derjenigen Formen von  $\mathfrak{C}_0$ , deren

reduzierte Ordnung  $m_1$  übertrifft,  $m_3$  die niedrigste reduzierte Ordnung derjenigen Formen von  $\mathfrak{C}_0$ , deren reduzierte Ordnung  $m_2$  übertrifft, usw.,  $m_\mu$  die reduzierte Ordnung der bis auf einen konstanten Faktor einzigen Form von  $\mathfrak{C}_0$ , deren reduzierte Ordnung  $m_{\mu-1}$  übertrifft.

Als Lückenordnung des Punktes  $\tau = \tau_0$  bezeichnen wir die Zahl

$$(4) \quad \beta(\tau_0) = \beta(\Gamma, -r, v; \tau_0) = \sum_{j=1}^{\mu} (m_j + \lambda - (j-1)),$$

als reduzierte Lückenordnung des Punktes  $\tau = \tau_0$  die Zahl

$$(5) \quad \beta_0(\tau_0) = \beta_0(\Gamma, -r, v; \tau_0) = \beta(\tau_0) - \lambda\mu = \sum_{j=1}^{\mu} (m_j + 1 - j).$$

Aus Satz 1 folgt

**Satz 2.** Es gibt eine Basis von  $\mathfrak{C}_0$ , bestehend aus den Formen  $f(\tau)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) mit den Entwicklungen

$$\gamma(\tau, \tau_0) f_j(\tau) = t^{m_j+1} + t^{m_j+1+1} Q_j(t) \quad (1 \leq j \leq \mu).$$

Dabei ist  $t$  eine Ortsvariable zu  $\tau = \tau_0$  [(G I), S. 35],  $Q_j(t)$  eine bei  $t = 0$  reguläre Potenzreihe in  $t$  und ferner [(G I), (32), (38)]:

$$\gamma(\tau, \tau_0) = (a_1 \tau + a_2)^r, \quad \text{wenn } \tau_0 = -\frac{a_2}{a_1} \text{ parabolische Spitze von } \Gamma$$

(insbesondere  $\tau_0 = \infty$  für  $a_1 = 0$ ),

$$\gamma(\tau, \tau_0) = (\tau - \bar{\omega})^r, \quad \text{wenn } \tau_0 = \omega \text{ elliptische Ecke von } \Gamma,$$

$$\gamma(\tau, \tau_0) = 1, \quad \text{wenn } \tau_0 \text{ nicht Fixpunkt von } \Gamma \text{ ist.}$$

Es sei  $g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_\mu(\tau)$  eine Basis einer  $\mu$ -gliedrigen Schar  $\mathfrak{S}$  von analytischen Funktionen einer komplexen Variablen  $\tau$ . Wir fassen die genannten Funktionen zu dem Vektor

$$(6) \quad g(\tau) = \{g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_\mu(\tau)\}$$

zusammen, nennen diesen wegen der linearen Unabhängigkeit seiner Komponenten einen „Basisvektor“ (über  $\mathfrak{S}$ ) und bezeichnen mit  $W_\tau(g(\tau))$  die Determinante

$$(7) \quad W_\tau(g(\tau)) = \begin{vmatrix} g(\tau) & g'(\tau) & g''(\tau) & \dots & g^{(\mu-1)}(\tau) \end{vmatrix} \\ = \|g_j^{(k-1)}(\tau)\| \\ (j, k = 1, 2, \dots, \mu).$$

In ihrer ersten Spalte steht der Vektor  $g(\tau)$  und in ihrer  $k$ -ten Spalte ( $2 \leq k \leq \mu$ ) der Vektor

$$(8) \quad g^{(k-1)}(\tau) = \{g_1^{(k-1)}(\tau), g_2^{(k-1)}(\tau), \dots, g_\mu^{(k-1)}(\tau)\}.$$

dessen oberer Index die Anzahl der Differentiationen seiner Komponenten nach der Variablen  $\tau$  angibt. Die Variable, nach der in der Darstellung (7) differenziert wird, erscheint als Index an dem Funktionszeichen der Wronski-Determinante  $W_{\tau}(g(\tau))$ . Ist  $g_1(\tau) = Ag(\tau)$  ein weiterer Basisvektor über  $\mathfrak{S}$ , also  $A$  eine konstante umkehrbare Matrix des Grades  $\mu$ , so gilt

$$W_{\tau}(g_1(\tau)) = \|A\| W_{\tau}(g(\tau)).$$

Wir benötigen im folgenden zwei Eigenschaften dieser Wronski-Determinante:

1. Es sei  $\tau = \tau_0$  ein innerer Punkt oder ein Randpunkt des Regularitätsgebietes  $\mathfrak{G}$  der Funktionen von  $\mathfrak{S}$ , und es sei  $f(\tau)$  in  $\mathfrak{G}$ , soweit dort  $0 < |\tau - \tau_0| < \varrho$  für ein gewisses festes  $\varrho > 0$  zutrifft, regulär. Dann ist

$$(9) \quad W_{\tau}(f(\tau)g(\tau)) = (f(\tau))^n W_{\tau}(g(\tau)) \quad \text{für } \tau \in \mathfrak{G}, 0 < |\tau - \tau_0| < \varrho.$$

Denn es gilt für alle ganzen  $k \geq 1$  und für die in (9) angegebenen  $\tau$ :

$$(f(\tau)g(\tau))^{(k-1)} = f(\tau)g^{(k-1)}(\tau) + \sum_{v=1}^{k-1} \binom{k-1}{v} f^{(v)}(\tau)g^{(k-1-v)}(\tau).$$

Daher ergibt sich zunächst

$$f(\tau)W_{\tau}(g(\tau)) = \|g(\tau), g'(\tau), g''(\tau), \dots, g^{(n-2)}(\tau), (f(\tau)g(\tau))^{(n-1)}\|.$$

Ersetzt man die vorletzte Spalte dieser Determinante durch  $(f(\tau)g(\tau))^{(n-2)}$ , so erhält man analog  $(f(\tau))^2 W_{\tau}(g(\tau))$  und in dieser Weise fortfahrend die rechte Seite der Gleichung (9).

2. Es sei  $z = z(\tau)$  für  $\tau$  in  $\mathfrak{G}$  und  $0 < |\tau - \tau_0| < \varrho$  regulär und eindeutig, ferner jedes  $g_j(\tau)$  gemäß

$$g_j(\tau) = h_j(z) = h_j(z(\tau)) \quad (1 \leq j \leq \mu)$$

auf der genannten Punktmenge als reguläre und unverzweigte, aber nicht notwendig eindeutige Funktion von  $z$  darstellbar. Bezeichnet ein Stern die einfache Ableitung nach  $z$ , ein oberer Index  $n$  in eckigen Klammern die  $n$ -fache Ableitung nach  $z$ , so gilt für den durch  $g_j(\tau) = h_j(z(\tau))$  erklärten Zweig der Funktion  $h_j(z)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ):

$$g_j'(\tau) = h_j^*(z) z'(\tau), \quad g_j''(\tau) = h_j^{**}(z) (z'(\tau))^2 + h_j^*(z) z''(\tau),$$

$$g_j^{(n)}(\tau) = h_j^{[n]}(z) (z'(\tau))^n + \sum_{k=1}^{n-1} h_j^{[k]}(z) F_{n,k}(\tau)$$

$$(z = z(\tau), \tau \in \mathfrak{G}, 0 < |\tau - \tau_0| < \varrho, n \text{ ganz und } \geq 0).$$

Hier ist  $F_{n,k}(\tau)$  eine Linearkombination mit konstanten Koeffizienten von Produkten der Gestalt  $z^{(m_1)}(\tau) z^{(m_2)}(\tau) \dots z^{(m_c)}(\tau)$  ( $m_i \geq 1$  für  $1 \leq i \leq c$ ), deren „Exponentensumme“  $m_1 + m_2 + \dots + m_c$  den Wert  $n$  hat. Wird

$$h(z) = \{h_1(z), h_2(z), \dots, h_{\mu}(z)\} = h(z(\tau)) = g(\tau)$$

geschrieben und  $h^*(z)$ ,  $h^{**}(z)$ , ebenso  $h^{(k-1)}(z)$  ( $2 \leq k \leq \mu$ ) analog zu (8) definiert, so findet sich

$$W_{\tau}(g(\tau)) = z'(\tau) \| h(z), h^*(z), h^{**}(z) (z'(\tau))^2 + h^*(z) z''(\tau), g'''(\tau), \dots, g^{(\mu-1)}(\tau) \| \\ = (z'(\tau))^{1+2} \| h(z), h^*(z), h^{**}(z), g'''(\tau), \dots, g^{(\mu-1)}(\tau) \|.$$

$$(10) W_{\tau}(g(\tau)) = (z'(\tau))^{1+2+\dots+(\mu-1)} W_{\tau}(h(z)) \quad (z = z(\tau), \tau \in \mathfrak{G}, 0 < |\tau - \tau_0| < \varrho).$$

Es sei nunmehr  $\mathfrak{G}$  die Schar  $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_0(\Gamma, -r, v)$  und

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_{\mu}(\tau)\}$$

ein beliebiger, aber bestimmter Basisvektor über  $\mathfrak{G}_0$ . Wir setzen

$$(11) \quad \Phi(\tau) = W_{\tau}(q(\tau))$$

und beweisen jetzt, daß  $\Phi(\tau)$  eine (nicht identisch verschwindende) ganze Spitzenform einer gewissen, durch  $\Gamma, r, v$  eindeutig bestimmten Formenklasse  $\{\Gamma, -r^*, v^*\}$  darstellt.

Zu diesem Zweck wenden wir zunächst (10) mit  $z = L\tau$ , ( $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ ) und  $g(\tau) = q(\tau) = h(z)$  an. Dann ist bei entsprechender Erklärung von  $f(z)$ :

$$q(z) = v(L)(\gamma\tau + \delta)^r g(\tau) = f(z) h(z),$$

und es kommt nach (9), (10) und (11):

$$\Phi(z) = W_{\tau}(q(z)) = (v(L))^{\mu} (\gamma\tau + \delta)^{r\mu} W_{\tau}(h(z)) \\ = (v(L))^{\mu} (\gamma\tau + \delta)^{r\mu + \mu(\mu-1)} W_{\tau}(g(\tau)),$$

also

$$(12) \quad \Phi(L\tau) = (v(L))^{\mu} (\gamma\tau + \delta)^{r\mu + \mu(\mu-1)} \Phi(\tau).$$

Wir schreiben demgemäß  $r^* = \mu(r + \mu - 1)$ ,  $v^*(L) = (v(L))^{\mu}$  für  $L \in \Gamma$ .

Es sei ferner  $t$  eine der üblichen Ortsvariablen zu dem willkürlichen Punkte  $\tau = \tau_0$  von  $\mathfrak{A}$ ,  $\lambda$  der Zwangsbeitrag von  $\mathfrak{G}_0$  im Punkte  $\tau_0$ ,  $g(\tau)$  irgendein Basisvektor über  $\mathfrak{G}_0$ . Dann ist

$$(13) \quad \gamma(\tau, \tau_0) g(\tau) = t^{\lambda} \mathfrak{R}(t), \quad \mathfrak{R}(t) = \{R_1(t), R_2(t), \dots, R_{\mu}(t)\},$$

$R_j(t)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) eine bei  $t = 0$  reguläre Potenzreihe in  $t$ , und daher nach (9) und (10):

$$(14) \quad (\gamma(\tau, \tau_0))^{\mu} W_{\tau}(g(\tau)) = t^{\lambda\mu} W_{\tau}(\mathfrak{R}(t)) = t^{\lambda\mu} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} W_t(\mathfrak{R}(t)).$$

Die parabolische Spitze  $s$  von  $\Gamma$  werde wie früher durch  $s = A^{-1} \infty$  gegeben, wo  $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$  eine reelle Matrix der Determinante 1 bezeichnet.

Die durch Wahl von  $A$  bestimmte Ortsvariable  $t = e^{2\pi i \frac{A\tau}{N}}$  ( $N > 0$ ) zum Punkte  $\tau = \tau_0 = s$  spezialisiert (14) zu

$$(a_1\tau + a_2)^{\mu} W_{\tau}(g(\tau)) = \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} (a_1\tau + a_2)^{-\mu(u-1)} t^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\mu(u-1)} W_t(\Re(t)),$$

$$(15) \quad (a_1\tau + a_2)^{\mu} W_{\tau}(g(\tau)) = \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{\frac{1}{2}\mu(u-1)} t^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\mu(u-1)} W_t(\Re(t)).$$

Also verhält sich  $W_{\tau}(g(\tau))$  in der Spitze  $\tau = \tau_0 = s$  von  $\Gamma$  wie eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r^*, v^*\}$ , deren reduzierte Ordnung dort mindestens gleich  $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$  ist. Der Faktor  $t^{\lambda\mu}$  auf der rechten Seite von (15) steht im Einklang mit der Beziehung  $v^* = v^{\mu}$ . Der Realteil des Zwangsbeitrages der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r^*, v^*\}$  im Punkte  $\tau = \tau_0 = s$  ist höchstens gleich  $\Re \lambda\mu$ ; er ist dann und nur dann gleich  $\Re \lambda\mu$ , wenn  $0 < \Re \lambda \leq \frac{1}{\mu}$ .

Für die elliptische Ecke  $\omega$  von der inhomogenen Ordnung  $l$  setze man wie üblich  $t = \left(\frac{\tau - \omega}{\tau - \bar{\omega}}\right)^l$ ,  $\lambda = \varrho = \frac{a}{l}$  ( $0 \leq a \leq l-1$ ,  $a$  ganz). Dann entsteht aus (14):

$$(\tau - \bar{\omega})^{\mu} W_{\tau}(g(\tau)) = (l(\omega - \bar{\omega}))^{\frac{1}{2}\mu(u-1)} (\tau - \bar{\omega})^{-\mu(u-1)} t^{\lambda\mu + \left(1 - \frac{1}{l}\right)\frac{\mu(u-1)}{2}} W_t(\Re(t)),$$

$$(16) \quad (\tau - \bar{\omega})^{\mu} W_{\tau}(g(\tau)) = (l(\omega - \bar{\omega}))^{\frac{1}{2}\mu(u-1)} t^{\lambda\mu - \frac{1}{l}\frac{\mu(u-1)}{2} + \frac{\mu(u-1)}{2}} W_t(\Re(t)).$$

Ist  $E$  die normierte Erzeugende der Gruppe der  $L$  aus  $\Gamma$  mit dem elliptischen Fixpunkt  $\omega$  von der inhomogenen Ordnung  $l$  und  $\varrho^*$  der Zwangsbeitrag der ganzen Formen  $\{\Gamma, -r^*, v^*\}$  im Punkte  $\tau = \tau_0 = \omega$ , so findet man nach (G I), (37):

$$v^*(E) = e^{\pi i \frac{r^*}{l} + 2\pi i \varrho^*} = v(E)^u = e^{\pi i \frac{r^*}{l} + 2\pi i \varrho^*},$$

$$\varrho^* \equiv \varrho\mu - \frac{1}{l} \frac{\mu(\mu-1)}{2} \pmod{1}.$$

Wendet man schließlich (14) auf einen Nicht-Fixpunkt  $\tau = \tau_0$  in  $\mathfrak{R}$  an, so ergibt sich

$$(17) \quad W_{\tau}(g(\tau)) = W_t(\Re(t))$$

und insgesamt aus (12), (15), (16), (17) der behauptete Sachverhalt, daß jede Wronski-Determinante  $W_{\tau}(g(\tau))$  eine (nicht identisch verschwindende) ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r^*, v^*\}$  darstellt.

Zur Bestimmung der Ordnung von  $\Phi(\tau)$  im gegebenen Punkte  $\tau = \tau_0$  untersuchen wir das Verhalten der Funktion  $W_t(\Re(t))$ , nachdem wir für  $g(\tau)$  den Vektor mit den Komponenten  $f_j(\tau)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) aus Satz 2 gewählt

haben. Es sei  $n$  eine natürliche Zahl. Wir schreiben  $\mathfrak{R}^*(t) = t^n \mathfrak{R}(t)$  und finden bei hinreichend großem natürlichem  $n$ :

$$R_j^*(t) = t^n R_j(t) = t^{m_j + n} + \{\text{Glieder mit } t^{m_j + n + 1}\},$$

$$R_j^{*(k-1)}(t) = (m_j + n)_{k-1} t^{m_j + n - k + 1} P_{j,k}(t) \quad (j, k = 1, 2, \dots, \mu),$$

wo  $(x)_0 = 1$ ,  $(x)_m = x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)$  für ganzes  $m \geq 1$  und  $P_{j,k}(t)$  eine bei  $t=0$  reguläre Potenzreihe in  $t$  mit  $P_{j,k}(0) = 1$  bezeichnet. Danach ergibt sich mit der durch (5) erklärten Bedeutung von  $\beta_0(\tau_0)$ :

$$W_t(\mathfrak{R}(t)) = t^{-n\mu} W_t(\mathfrak{R}^*(t)) = t^{-n\mu} \|(m_j + n)_{k-1} t^{m_j + n - k + 1} P_{j,k}(t)\|,$$

$$W_t(\mathfrak{R}(t)) = t^{\beta_0(\tau_0)} \|(m_j + n)_{k-1} P_{j,k}(t)\|.$$

Die letzte Determinante  $D(t) = \|(m_j + n)_{k-1} P_{j,k}(t)\|$  ist eine bei  $t=0$  reguläre analytische Funktion von  $t$ ; ihr Wert  $D(0)$  für  $t=0$  ist

$$D(0) = \|(m_j + n)_{k-1}\| = \|(m_j + n)^{k-1}\| = \prod_{1 \leq k < j \leq \mu} (m_j - m_k) > 0.$$

Also hat  $W_t(\mathfrak{R}(t))$  im Punkte  $t=0$  die Ordnung  $\beta_0(\tau_0)$ , und wir haben folgenden Satz bewiesen:

**Satz 3.** Es sei unter den Voraussetzungen von Satz 1

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\mu(\tau)\}$$

ein Basisvektor über der Schar  $\mathfrak{C}_0$  der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r, v\}$ . Dann ist erstens die Wronski-Determinante

$$\Phi(\tau) = W_\tau(q(\tau)) = \|\varphi_j^{(k-1)}(\tau)\| \quad (j, k = 1, 2, \dots, \mu)$$

eine nicht identisch verschwindende ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r^*, v^*\}$ , wo

$$r^* = r\mu + \mu(\mu-1), \quad v^*(L) = (v(L))^\mu \text{ für alle } L \subset \Gamma.$$

Die Entwicklungen der Form  $\Phi(\tau)$  in den Spitzen und Ecken, sowie in den Nichtfixpunkten eines Fundamentalbereichs von  $\Gamma$  sind durch (15), (16), (17) gegeben. Dabei bezeichnet  $t$  eine der üblichen Ortsvariablen zu dem betreffenden Punkt  $\tau = \tau_0$ , man hat  $g(\tau)$  durch  $q(\tau)$  zu ersetzen und danach  $\mathfrak{R}(t)$  durch (13) zu erklären.

Zweitens gilt:  $W_t(\mathfrak{R}(t))$  ist eine bei  $t=0$  reguläre Funktion von  $t$ , die im Punkte  $t=0$  die Ordnung  $\beta_0(\tau_0)$  aufweist.

Wir sind nun in der Lage, die Summe  $B$  der reduzierten Lückenordnungen  $\beta_0(\tau_0)$ , erstreckt über sämtliche Punkte  $\tau_0$  eines Fundamentalbereichs  $\mathfrak{R}$  von  $\Gamma$ , zu bestimmen. Denn einerseits ist die Ordnung des Divisors von  $\Phi(\tau)$

gleich  $r^*(p-1+\frac{g}{2})$ ; andererseits erhält man aus (14), (15), (16), (17) und Satz 3 mit Rücksicht auf (G II), (55):

$$\begin{aligned} r^*(p-1+\frac{g}{2}) &= \sum_{\tau_0 \in \mathfrak{A}} \beta_0(\tau_0) + \mu \sum_{j=1}^{n_0} \eta_j + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \sigma_0 \\ &\quad + \mu \sum_{i=1}^{n_0} e_i + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \sum_{i=1}^{n_0} \left(1 - \frac{1}{i}\right), \\ (18) \quad B &= \sum_{\tau_0 \in \mathfrak{A}} \beta_0(\tau_0) = \mu a + \mu(\mu-1)(p-1). \end{aligned}$$

Wir formulieren dieses Ergebnis als

**Satz 4.** Es sei  $\mu$  der Rang der Schar  $\mathfrak{C}_0$  und  $a$  die Anzahl der Nullstellen einer Form von  $\mathfrak{C}_0$ , vermindert um die Summe ihrer Zwangsbeiträge bezüglich  $\mathfrak{C}_0$  in allen Ecken und Spitzen. Dann gibt (18) die Summe  $B$  der reduzierten Lückenordnungen  $\beta_0(\tau_0)$ , erstreckt über alle Punkte  $\tau_0$  eines Fundamentalbereichs von  $\Gamma$ .

Die klassische Theorie der Weierstraßpunkte findet sich in dieser allgemeinen Theorie als Spezialfall  $r=2$ ,  $v=1$  wieder. Hier ist  $\mu=p$ ,  $a=2p-2$ , und die rechte Seite von (18) erhält den Wert  $(p-1)p(p+1)$ .

Im folgenden sollen die oben eingeführten Lückenzahlen  $m_j+1$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) durch eine weitere, von der Wahl der Basis  $f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_\mu(\tau)$  der Schar  $\mathfrak{C}_0$  unabhängige Eigenschaft gekennzeichnet werden. Zu diesem Zweck fassen wir zunächst irgendein geordnetes System von  $\mu$  Formen  $\chi_1(\tau), \chi_2(\tau), \dots, \chi_\mu(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  gemäß

$$r(\tau) = \{\chi_1(\tau), \chi_2(\tau), \dots, \chi_\mu(\tau)\}$$

zu dem „Formenvektor  $r(\tau)$  über  $\mathfrak{C}_0$ “ zusammen. Die Entwicklung dieses Formenvektors nach der Ortsvariablen  $t$  eines Punktes  $\tau = \tau_0$  von  $\mathfrak{A}$  hat die Gestalt

$$(19) \quad \gamma(\tau, \tau_0) r(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1}, \quad b_n = \{d_{1,n}, d_{2,n}, \dots, d_{\mu,n}\}.$$

$b_n$  heißt der  $n$ -te Koeffizientenvektor der Entwicklung von  $r(\tau)$  im Punkte  $\tau = \tau_0$ .

Ist  $A$  irgendeine konstante Matrix von  $\mu$  Zeilen und Spalten, so gilt im Sinne der Matrizenmultiplikation

$$\gamma(\tau, \tau_0) (A r(\tau)) = \sum_{n=0}^{\infty} (A b_n) t^{n+1}$$

Wie man leicht einsieht, ist  $r(\tau)$  dann und nur dann Basisvektor über  $\mathfrak{C}_0$ , wenn es ein System von  $\mu$  ganzen Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_\mu \geq 0$  gibt, so daß

die Determinante  $||b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_\mu}||$ , in deren  $k$ -ter Spalte der Vektor  $b_{n_k}$  steht, ungleich Null ausfällt. Ein solches System ganzer Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_\mu$  nennen wir ein **Hauptsystem**. Jedes System von  $\mu$  nicht negativen ganzen Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_\mu$  heißt geordnet, wenn  $n_{j+1} > n_j$  für  $1 \leq j \leq \mu - 1$ . Die Tatsache der linearen Unabhängigkeit endlich vieler Koeffizientenvektoren  $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_\mu}$ , sowie allgemeiner die Maximalzahl linear unabhängiger unter diesen Koeffizientenvektoren eines Basisvektors  $r(\tau)$  ist von der Auswahl dieses Basisvektors unabhängig. Das gleiche gilt von den linearen Relationen, die zwischen den sämtlichen Koeffizientenvektoren  $b_n$  ( $n \geq 0$ ) eines Basisvektors  $r(\tau)$  über  $\mathbb{C}_0$  bestehen. Jeder Basisvektor  $r(\tau)$  ist als solcher durch die Matrix  $[b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_\mu}]$ , in deren  $k$ -ter Spalte der Vektor  $b_{n_k}$  steht, eindeutig bestimmt, wenn die Indizes  $n_1, n_2, \dots, n_\mu$  ein Hauptsystem bilden. Zu jedem Hauptsystem gibt es einen (demnach eindeutig bestimmten) Basisvektor derart, daß die zu  $[b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_\mu}]$  analoge Matrix mit der Einheitsmatrix zusammenfällt. Diesen Basisvektor nennen wir den dem gegebenen Hauptsystem zugeordneten Hauptvektor. Nach Satz 2 bilden die dort und in Satz 1 genannten Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_\mu$  ein geordnetes Hauptsystem, und man bestimmt den zugehörigen Hauptvektor durch eine „Dreieckstransformation“ aus dem Vektor mit den Komponenten  $f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_\mu(\tau)$  (Satz 2).

Um nun die gewünschte Kennzeichnung aussprechen zu können, erklären wir eine lexicographische Anordnung innerhalb der Menge aller geordneten Systeme ganzer Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_\mu \geq 0$ . Von zwei verschiedenen solchen geordneten Systemen  $n_1, n_2, \dots, n_\mu$  und  $n'_1, n'_2, \dots, n'_\mu$  heißt das erste kleiner als das zweite, wenn die von Null verschiedene Differenz  $n_j - n'_j$  mit kleinstem Index  $j = 1, 2, 3, \dots, \mu$  negativ ist. In diesem Sinne gilt:

**Satz 5.** *Das System  $m_1, m_2, \dots, m_\mu$  aus Satz 1 ist bei der genannten lexicographischen Anordnung unter allen geordneten Hauptsystemen das kleinste.*

Wir bezeichnen dieses eindeutig bestimmte kleinste geordnete Hauptsystem als das **Grundsystem** zum Punkte  $\tau = \tau_0$ . Für alle Punkte  $\tau = \tau_0$  von  $\mathfrak{R}$  mit höchstens endlich vielen, nämlich mit höchstens

$$B = \mu\alpha + \mu(\mu - 1)(p - 1)$$

Ausnahmen ist das Grundsystem durch die Zahlen  $0, 1, 2, \dots, \mu - 1$  gegeben. Die Ausnahmepunkte, d. h. die Punkte mit  $\beta_0(\tau_0) > 0$  nennen wir die **Weierstraßpunkte** der Formenklasse  $\{\Gamma, -r, v\}$ .

Im Falle  $p = 0$  gilt nach den Formeln zu Anfang dieses Paragraphen

$$\alpha = \bar{n} - 1, \quad \mu = \bar{n} + v_0(r - 2, v^{-1}; \langle 1 \rangle), \quad B = \mu(\bar{n} - \mu).$$

$B$  verschwindet für  $\mu > 0$  also immer; auch folgt, daß  $v_0(r-2, v^{-1}; \langle 1 \rangle) = 0$  ist, d. h. daß keine ganzen Formen  $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$  existieren. (Das Produkt einer solchen Form mit einer Form aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  stellt ein Abelsches Differential erster Gattung dar.)

Ist  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  reell und  $ad - bc = 1$ , ordnet man ferner jeder Form  $f(\tau)$  der Klasse  $\{\Gamma, -r, v\}$  die Funktion  $f^*(\tau)$  zu, die durch die Relation  $f(\tau) = (c\tau + d)^{-r} f^*(S\tau)$  mit  $f(\tau)$  verknüpft ist, so erfüllen diese  $f^*(\tau)$  die Klasse  $\{S\Gamma S^{-1}, -r, v'_{S^{-1}}\}$  [vgl. (B), S. 379]. Die in diesem Paragraphen genannten Eigenschaften der Form  $f(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  im Punkte  $\tau = \tau_0$  kommen der Form  $f^*(\tau)$  im Punkte  $\tau = S\tau_0$  zu. In diesem Sinne übertragen sich insbesondere die Aussagen über Ordnungen, Lücken und Lückenzahlen, ebenso die Eigenschaften einer Basis in bezug auf diese Begriffe. Der Übergang von der Formenklasse  $\{\Gamma, -r, v\}$  zu der Formenklasse  $\{\Gamma, -r^*, v^*\}$ , ebenso der Übergang zu der Formenklasse  $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ , ist mit der genannten Transformation, d. h. mit dem Übergang zu der Formenklasse  $\{S\Gamma S^{-1}, -r, v'_{S^{-1}}\}$  vertauschbar [vgl. (B), § 1].

Daß sich auch die Erklärung der Wronski-Determinante  $\Phi(\tau)$  bei dieser Transformation nicht ändert, erkennt man so: Wir setzen

$$z = S\tau, \quad q(\tau) = (c\tau + d)^{-r} q^*(S\tau) = (c\tau + d)^{-r} q^*(z)$$

und erhalten nach (9) und (10)

$$W_*(q(\tau)) = (c\tau + d)^{-\mu r} W_*(q^*(z)) = (c\tau + d)^{-\mu r - \mu(\mu-1)} W_*(q^*(z)).$$

Erklärt man also  $\Phi^*(\tau)$  durch  $\Phi(\tau) = (c\tau + d)^{-r} \Phi^*(S\tau)$ , so ist  $\Phi^*(\tau)$  die Wronski-Determinante der Basis  $q^*(\tau)$  von  $\mathfrak{C}_0(S\Gamma S^{-1}, -r, v'_{S^{-1}})$ .

Ist  $\tau = \tau_0$  nicht Fixpunkt von  $\Gamma$ , so stimmt die Ordnung der Form  $f(\tau)$  aus der Klasse  $\{\Gamma, -r, v\}$  im Punkte  $\tau = \tau_0$  mit der Ordnung der Form  $f^*(\tau)$  aus der Klasse  $\{S\Gamma S^{-1}, -r, v'_{S^{-1}}\}$  im Punkte  $\tau = S\tau_0$  überein. Ein entsprechender Sachverhalt besteht für die Lücken und Lückenzahlen in einem Nichtfixpunkt  $\tau = \tau_0$ . In Übereinstimmung hiermit zeigt die soeben gewonnene Aussage über die Wronski-Determinante  $\Phi(\tau)$ , daß die (gegenüber der Basiswahl invariante) Lückenordnung des Punktes  $\tau = \tau_0$  in bezug auf die Formenschar  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  mit der Lückenordnung des Punktes  $\tau = S\tau_0$  in bezug auf die Formenschar  $\mathfrak{C}_0(S\Gamma S^{-1}, -r, v'_{S^{-1}})$  zusammenfällt. Ist insbesondere  $\tau_0$  nicht Weierstraßpunkt der Klasse  $\{\Gamma, -r, v\}$ , so ist  $S\tau_0$  nicht Weierstraßpunkt der Klasse  $\{S\Gamma S^{-1}, -r, v'_{S^{-1}}\}$ .

## § 2.

Die Poincaréschen Reihen  $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma | F)$  für  $r > 2, |v| = 1$ .

Es sei  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Substitutionen ( $\sigma_0 > 0$ ) und dem parabolischen Fixpunkt  $\tau = \infty$ ,  $r > 2$  und  $v$  ein Multiplikatorsystem zu  $\Gamma$  und  $-r$  mit  $|v(L)| = 1$  für alle  $L$  aus  $\Gamma$ .  $\Gamma$  ist in (G I) als Gruppe von reellen Matrizen der Determinante Eins erklärt und enthält die Matrix  $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Das Innere des Grenzkreises

ist also die obere Halbebene  $\mathfrak{H}$  der komplexen Variablen  $\tau$ . Es sei  $s = A^{-1}\infty$  ein parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$  (dabei  $A$  eine reelle zweireihige Matrix der Determinante Eins) und  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|$  konvergent.

$P = A^{-1} U^{N'} A$  ( $N' > 0$ ) erzeuge zusammen mit der Matrix  $-I$  die Gruppe der parabolischen Matrizen von  $\Gamma$  mit dem Fixpunkt  $s$  [(G I), § 2, 2], es sei  $v(P) = e^{2\pi i x}$  ( $0 \leq x < 1$ ) [vgl. (G I), (20)], und es bezeichne  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  ein volles Vertretersystem der Linksklassen in der Nebengruppe  $A\Gamma$  nach der Gruppe der Potenzen von  $U^{N'}$ . (Dies bedeutet, daß  $\Gamma$  von links nach der Gruppe  $\mathfrak{S}$  der Potenzen von  $P$  reduziert wird.  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  ist ein volles System von Matrizen der Nebengruppe  $A\Gamma$  mit verschiedenen zweiten Zeilen.) Dann setzen wir [(G V), § 1, 5], wenn  $v(M)$  für  $M = AL \subset A\Gamma$  durch

$$v(M) = v(AL) = v(A) \sigma(A, L) v(L)$$

mit willkürlichem  $v(A)$  des Betrages Eins erklärt wird,

$$(20) G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma | F) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} e^{2\pi i x \frac{M\tau}{N'}} F\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{N'}}\right) (v(M))^{-1} (m_1 \tau + m_2)^{-r}.$$

Dabei bezeichnet  $\{m_1, m_2\}$  die zweite Zeile der Matrix  $M$  aus  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ ; diese Beziehung wird allgemein durch  $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$  ausgedrückt. Zur Bestimmung des Zweiges der vieldeutigen Funktion  $(m_1 \tau + m_2)^{-r}$  vgl. (G I), § 2, 1.

Nach (G V), § 2 konvergiert die Reihe (20) gleichmäßig absolut für

$$(21) \quad \tau = x + iy \quad (x \text{ reell, } y > 0), \quad |x| \leq \xi, \quad y \geq \alpha \quad (\xi > 0, \alpha > 0).$$

Dies gilt sogar dann, wenn man im einzelnen Glied der Reihe (20)  $\tau$  durch eine von  $M$  abhängige komplexe Zahl  $\tau_M$  ersetzt, falls diese nur den Ungleichungen (21) genügt [(G V), § 2, Hilfssatz 3]. Die Poincarésche Reihe  $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma | F)$  stellt eine (vielleicht identisch verschwindende) ganze automorphe Form  $\{\Gamma, -r, v\}$  dar. Sie verschwindet in allen Spitzen von  $\Gamma$ , welche zu  $s = A^{-1}\infty$  nicht äquivalent sind; in der Spitze  $s = A^{-1}\infty$

hingegen verschwindet sie dann und nur dann, wenn  $\kappa > 0$  ist, oder wenn  $\kappa = 0$  und zugleich  $F(0) = 0$  ist [(B), § 2].

Bezeichnet  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine zweireihige reelle Matrix der Determinante Eins,  $v_1(L')$  für  $L' = S^{-1}LS \subset S^{-1}\Gamma S$  das Multiplikatorsystem

$$v_1(L') = \frac{\sigma(L, S)}{\sigma(S, L')} v(L) = v'_S(L') \quad [(B), § 1],$$

so besteht mit willkürlichem  $v(AS)$  des Betrages Eins die Transformationsformel [(G V), § 1, (17)]:

$$(22) \quad G_{-r}(S\tau, v, A, \Gamma|F) = \frac{v_1(AS)}{v(A)\sigma(A, S)} (c\tau + d)^r G_{-r}(\tau, v_1, AS, S^{-1}\Gamma S|F).$$

(Hinsichtlich der Wahl von  $v(A)$  und  $v(AS)$  ist zu betonen, daß diesen Symbolen, falls  $A \subset \Gamma$  bzw. falls  $AS \subset S^{-1}\Gamma S$ , die durch  $v$  bzw. durch  $v$  und  $S$  bereits bestimmten Werte erteilt werden müssen.)

Wird  $R_\nu(z) = z^\nu$  ( $\nu$  ganz und  $\geq 0$ ) und zur Abkürzung

$$(23) \quad G(\tau, A, \nu) = G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu) = G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|R_\nu)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$(24) \quad G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu G(\tau, A, \nu).$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut gleichmäßig für  $y \geq \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ; da die Reihe  $\sum_{\mu \in \mathfrak{G}(A, \Gamma)} |m_1\tau + m_2|^{-r}$  eine periodische Funktion von  $\tau$  ist, konvergiert sie, und es konvergieren daher die Reihen  $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F)$  absolut gleichmäßig für  $y \geq \alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Dies gilt indessen nicht mehr nach der Ersetzung von  $\tau$  durch die verschiedenen  $\tau_\mu$ , wenn deren Realteile nicht beschränkt sind. (Z. B.  $\tau_\mu = -\frac{m_2}{m_1} + i\alpha$  für  $m_1 \neq 0$ .)

Wir untersuchen zunächst die Abhängigkeit der einzelnen Reihe  $G(\tau, A, \nu)$  von der Wahl der Matrix  $A$  bei fest gegebener Spitze  $s = A^{-1}\infty$ . Ist  $B$  eine reelle zweireihige Matrix der Determinante Eins mit  $B^{-1}\infty = A^{-1}\infty$ , so hat  $BA^{-1}$  die Form  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = U^i D_a(\xi, a \text{ reell})$  [(G I), Bezeichnungen].

Man findet  $P = B^{-1}U^{a^2}B$ , ferner bei willkürlichem  $v(B)$  mit  $|v(B)| = 1$ , wenn der triviale Fall  $d > 0$  beiseite gelassen wird, nach (G I), (9), (11) und (B), (11), (12):

$$\arg(dm_1\tau + dm_2) = \arg(m_1\tau + m_2) + \pi - 2\pi\nu(D_a, M),$$

$$v(U^i D_a M) = v(B)\sigma(D_a A, L)v(L) = \frac{v(B)}{v(A)} \frac{1}{\sigma(D_a, A)} v(M)\sigma(D_a, M) (M = AL \subset A\Gamma).$$

Daher gilt für  $B = U^{\xi} D_a A$ :

$$(25) \quad G(\tau, B, \nu) = e^{\frac{2\pi i (r+s)\xi}{a^2 N'}} \frac{v(A)}{v(B)} \sigma(D_a, A) d^{-r} G(\tau, A, \nu).$$

Es soll nun die Reihenentwicklung eines beliebigen  $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu)$  mit  $\nu + \kappa > 0$  nach der Ortsvariablen  $t$  einer beliebigen Spitze  $\zeta = B^{-1} \infty$  von  $\Gamma$  aufgestellt werden. Sei also  $B$  eine reelle zweireihige Matrix der Determinante Eins,  $\{b_1, b_2\}$  ihre zweite Zeile und  $\zeta = B^{-1} \infty$  ein parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$ . Die der Matrix  $B$  in bezug auf  $\Gamma$  zugeordneten,  $N'$  und  $\kappa$  entsprechenden Zahlen nennen wir  $N^*$  bzw.  $\varrho$ . Wir schreiben in ausführlicher Bezeichnung

$$(26) \quad G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu) = (b_1 \tau + b_2)^{-r} \sum_{n+\varrho > 0} c_n^*(v, \Gamma, A, B, \nu) e^{\frac{2\pi i B \tau}{N^*} (n+\varrho)}$$

Ersetzt man hier  $\tau$  durch  $S\tau$ , wo  $S$  eine zweireihige reelle Matrix mit der Determinante Eins angibt, so erhält man aus (22), (26) die Reihenentwicklung der Form  $G_{-r}(\tau, v'_s, AS, S^{-1}\Gamma S, \nu)$  nach der Ortsvariablen der Spitze  $S^{-1}\zeta$  der Gruppe  $S^{-1}\Gamma S$ . Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich

$$(27) \quad c_n^*(v'_s, S^{-1}\Gamma S, AS, BS, \nu) = \frac{v(A)\sigma(A, S)}{v_s(AS)\sigma(B, S)} c_n^*(v, \Gamma, A, B, \nu).$$

Diese Formel zeigt für  $S = B^{-1}$ , daß sich die  $c_n^*(v, \Gamma, A, B, \nu)$  von den Fourierkoeffizienten der Reihe  $G_{-r}(\tau, v'_s, AB^{-1}, B\Gamma B^{-1}, \nu)$  nur um einen von  $n$  und  $\nu$  unabhängigen Faktor unterscheiden. Daher genügt es, die Koeffizienten in (26) für  $B = I$  zu bestimmen.

Ein System  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  ist ein vollständiges, einfach besetztes System von Matrizen  $M$  der Nebengruppe  $A\Gamma$  mit verschiedenen zweiten Zeilen; denn zwei reelle unimodulare Matrizen  $M_1, M_2$  haben dann und nur dann die gleiche zweite Zeile, wenn sie sich um einen vorderen Faktor  $U^{\xi}$  mit reellem  $\xi$  unterscheiden. Es enthalte  $A\Gamma$  eine Matrix  $M$  mit  $\underline{M} = \{0, m_2\}$ . Dann ist  $s \sim \infty(\Gamma)$ . Zwei Matrizen der Form  $U^{\xi} D_a$  ( $\xi, a$  reell), die beide in  $A\Gamma$  liegen, unterscheiden sich nach (G I), Satz 1 um einen vorderen Faktor  $\pm U^{\beta}$  ( $\beta$  reell). Daher enthält  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  dann und nur dann eine Matrix  $M$ , in deren zweiter Zeile das erste Element verschwindet, wenn  $s \sim \infty(\Gamma)$ ; ist  $s \sim \infty(\Gamma)$ , so enthält  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  genau zwei solche Matrizen. Sie haben die Form  $\pm U^{\xi} D_a$  mit festem  $a > 0$  und festem reellem  $\xi$ .

Es seien  $U^N$  ( $N > 0$ ) und  $-I$  Erzeugende der Gruppe der parabolischen Matrizen von  $\Gamma$  mit dem Fixpunkt  $\tau = \infty$ . Ist  $\{m_1, m_2\}$  die zweite Zeile

eines festen  $M$  aus  $A \Gamma$  und  $m_1 \neq 0$ , so sind die zweiten Zeilen  $\{m_1, m_2 + l m_1 N\}$  der  $M U^{lN} \subset A \Gamma$  paarweise verschieden, wenn  $l$  die ganzen Zahlen durchläuft. Diese Vektoren  $\{m_1, m_2 + l m_1 N\}$  ( $m_1, m_2$  fest,  $l$  ganz und variabel) fassen wir zu einer Klasse zusammen; alle Vektoren einer Klasse haben die gleiche erste Komponente  $m_1$ . Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{R}(A)$  das System der verschiedenen  $m_1$ ; die als linke untere Elemente der Matrizen  $M$  aus  $A \Gamma$  auftreten. Dann erhält man die Vertreter der Klassen von Vektoren  $\{m_1, m_2\} = \underline{M}$  ( $M \subset A \Gamma$ ) mit einem festen  $m_1 \neq 0$  aus  $\mathfrak{R}(A)$  in der Gestalt eines vollen Systems solcher Vektoren  $\{m_1, j\}$ , deren zweite Komponenten  $j$  einander mod  $m_1 N$  nicht kongruent sind. Ein hierdurch zu gegebenem  $m_1 \neq 0$  aus  $\mathfrak{R}(A)$  erklärtes System solcher  $j$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{R}(m_1)$ . Nun ermitteln wir zu jedem Vektor  $\{m_1, j\}$  mit  $m_1 \neq 0$ ,  $m_1 \in \mathfrak{R}(A)$ ,  $j \in \mathfrak{R}(m_1)$  zwei reelle Zahlen  $h, k$  derart, daß  $V = \begin{pmatrix} h & k \\ m_1 & j \end{pmatrix} \subset A \Gamma$ ; bei gegebenen  $m_1, j$  ist  $h \bmod m_1 N'$  vermöge  $V \subset A \Gamma$  eindeutig bestimmt. Wählt man zu  $\{m_1, j\}$  ein festes Paar  $\{h, k\}$  aus, so bilden die Matrizen

$$(28) \quad M_0 = V U^{lN} = \begin{pmatrix} h & k \\ m_1 & j \end{pmatrix} U^{lN} \text{ mit } m_1 \neq 0, m_1 \in \mathfrak{R}(A), j \in \mathfrak{R}(m_1), l \text{ ganz}$$

ein volles System  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  falls nicht  $s \sim \infty (\Gamma)$ . Für  $s \sim \infty (\Gamma)$  besteht ein System  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  aus den Matrizen (28) und aus zwei weiteren Matrizen der Gestalt  $\pm U^{\pm} D_a$  ( $a > 0$ ). Den folgenden Entwicklungen liegt das soeben bestimmte System  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$  zugrunde.

Wir bedienen uns der nachstehenden Bezeichnungen: Es sei

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(A, \Gamma) \text{ das System der } V = \begin{pmatrix} h & k \\ m_1 & j \end{pmatrix} \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma) \\ \text{mit } m_1 \neq 0, m_1 \in \mathfrak{R}(A), j \in \mathfrak{R}(m_1), \\ \varepsilon_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{wenn eine Matrix } \pm U^{\pm} D_a \subset A \Gamma \text{ } (\xi, a \text{ reell, } a \neq 0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \bar{v}(M) = \overline{v(M)} = (v(M))^{-1} \quad (M \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma)), \\ v(U^N) = e^{2\pi i \eta} \quad (0 \leq \eta < 1), \\ \bar{v}(m_1, j) = \bar{v}(V) \text{ für } V \subset \mathfrak{B}(A, \Gamma), \\ \sigma_{m_1} = e^{\frac{\pi i r}{2} \frac{1 - \operatorname{sgn} m_1}{2}} \quad (m_1 \neq 0), \\ w = w(\tau; m_1, j) = \frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N} (m_1 \neq 0, m_1 \in \mathfrak{R}(A), j \in \mathfrak{R}(m_1)), \\ \mu_2 \doteq \frac{r+x}{N N' m_1^2} (m_1 \neq 0, m_1 \in \mathfrak{R}(A), r+x > 0). \end{array} \right.$$

Dann ergibt sich nach dem Vorgehen in (F), § 1

$$\begin{aligned}
 G^*(\tau, A, \nu) &= G(\tau, A, \nu) - 2\varepsilon_0(A) e^{2\pi i \frac{\nu+\eta}{N}(\tau+d^2\bar{\nu})} \bar{\nu} (U^2 D_\nu) d^{-r} \\
 &= N^{-r} \sum_{\substack{m_1 \in \mathfrak{R}(A) \\ m_1 \neq 0}} \sigma_{m_1} |m_1|^{-r} \sum_{j \in \mathfrak{R}(m_1)} \bar{\nu}(m_1, j) e^{2\pi i \frac{\Lambda(\nu+\eta)}{m_1 N}} f(w), \\
 f(w) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \eta l - 2\pi i \mu_2 (w+l)^{-1}} (w+l)^{-r} \\
 &= \sum_{n+\eta > 0} e^{2\pi i (n+\eta)w} K_r(n+\eta, \mu_2), \\
 K_r(\mu_1, \mu_2) &= \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} e^{-2\pi i \mu_1 z - 2\pi i \frac{\mu_2}{z}} x^{-r} dz \quad (\alpha > 0).
 \end{aligned}$$

Um in der Darstellung der Funktion  $G^*(\tau, A, \nu)$  die Summationen über  $m_1$  und über  $n$  miteinander vertauschen zu können, beweisen wir den folgenden Satz:

**Satz 6.** Es sei  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit dem parabolischen Fixpunkt  $\tau = \infty$ ,  $s = A^{-1} \infty$  ein beliebiger parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$  (dabei  $A$  eine reelle Matrix der Determinante Eins),  $\mathfrak{R}(A)$  das System der verschiedenen  $m_1$  in den Matrizen  $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$  aus  $A\Gamma$ ; bei festem  $m_1 \in \mathfrak{R}(A)$ ,  $m_1 \neq 0$  bezeichne  $\mathfrak{R}^*(m_1)$  die Menge,  $E(m_1)$  die Anzahl der in diesen Matrizen  $M$  auftretenden verschiedenen  $m_2$  mit  $0 \leq m_2 < |m_1|N$ . Dann konvergiert für jedes  $r > 2$  die Summe

$$\sum_{\substack{m_1 \in \mathfrak{R}(A) \\ m_1 \neq 0}} E(m_1) |m_1|^{-r}.$$

Beweis. Nach (GV), § 2, 1 konvergiert die Summe  $\sum_{\substack{M \in \mathfrak{G}(A, \Gamma) \\ m_1 \neq 0}} |m_1 \tau + m_2|^{-r}$

für jedes  $\tau$  mit positivem Imaginärteil und für jedes  $r > 2$ . Es sei  $m_1 \neq 0$ ,

$m_1 \in \Re(A)$ . Wir wählen  $\Re(m_1)$  so, daß  $\left| \frac{j}{m_1 N} \right| \leq \frac{1}{2}$  für  $j \in \Re(m_1)$  und setzen  $\tau = i \frac{N}{2}$ . Dann ist

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N} + l \right|^{-r} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{i}{2} + \frac{j}{m_1 N} + l \right|^{-r} \geq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (1 + |l|)^{-r} > 1,$$

$$N^r \sum_{\substack{N \in \mathfrak{E}(A, \Gamma) \\ m_1 \neq 0}} \left| m_1 i \frac{N}{2} + m_2 \right|^{-r}$$

$$> \sum_{\substack{m_1 \in \Re(A) \\ m_1 \neq 0}} |m_1|^{-r} \sum_{j \in \Re(m_1)} 1 = \sum_{\substack{m_1 \in \Re(A) \\ m_1 \neq 0}} E(m_1) |m_1|^{-r}.$$

Auf Grund dieses Satzes läßt sich die genannte Vertauschung ausführen. Es ergibt sich zunächst

$$G^*(\tau, A, v) = N^{-r} \sum_{n+\eta > 0} e^{\frac{2\pi i (n+\eta) \tau}{N}}$$

$$\times \sum_{\substack{m_1 \in \Re(A) \\ m_1 \neq 0}} \sigma_{m_1} |m_1|^{-r} \left( \sum_{j \in \Re(m_1)} \bar{v}(m_1, j) e^{\frac{2\pi i (n+\eta) j}{m_1 N} + 2\pi i \frac{(v+x)h}{m_1 N'}} \right) K_r \left( n+\eta, \frac{v+x}{NN' m_1^2} \right)$$

und damit der folgende Satz:

**Satz 7.** Die Poincarésche Reihe

$$G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v) = \sum_{N \in \mathfrak{E}(A, \Gamma)} e^{\frac{2\pi i (v+x) \frac{N\tau}{N'}}} \bar{v}(M) (m_1 \tau + m_2)^{-r},$$

die eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r, v\}$  darstellt, hat in den Bezeichnungen (29) die Fourierentwicklung

$$G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v) = 2e_0(A) e^{\frac{2\pi i (v+\eta)}{N} (\tau + d^2 \bar{z})} \bar{v}(U^k D_a) d^{-r} + G_{-r}^*(\tau, v, A, \Gamma, v),$$

$$G_{-r}^*(\tau, v, A, \Gamma, v) = \sum_{n+\eta > 0} a_n(v, \Gamma, A, v) e^{\frac{2\pi i (n+\eta) \tau}{N}},$$

$$a_n(v, \Gamma, A, v) = \frac{2\pi}{N} e^{-\pi i \frac{r}{2}} \left( \frac{v+x}{N'} \right)^{-\frac{r-1}{2}} \left( \frac{n+\eta}{N} \right)^{\frac{r-1}{2}}$$

$$\times \sum_{\substack{m_1 \in \Re(A) \\ m_1 \neq 0}} \sigma_{m_1} |m_1|^{-1} W_{m_1}(v, \Gamma, A; n, v) J_{r-1} \left( \frac{4\pi}{|m_1|} \sqrt{\frac{v+x}{N'} \frac{n+\eta}{N}} \right),$$

$$W_{m_1}(v, \Gamma, A; n, v) = \sum_{j \in \Re(m_1)} \bar{v}(m_1, j) e^{\frac{2\pi i (n+\eta) j}{m_1 N} + 2\pi i \frac{(v+x)h}{m_1 N'}}.$$

Unter  $J_{r-1}(z)$  ist hierbei die Besselsche Funktion von erster Art und der Ordnung  $r-1$  zu verstehen.

Die damit aufgestellten Entwicklungskoeffizienten der ganzen Spitzenformen  $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v)$  befolgen eine merkwürdige Symmetrieregeln, die ungefähr besagt, daß  $c_n^*(v, \Gamma, A, B, v)$  bei gleichzeitiger Vertauschung von  $n$  und  $v$ ,  $A$  und  $B$  — abgesehen von einem elementaren Faktor — in sich übergeht. Diese Symmetrieregeln soll später aus der Metrisierung abgeleitet werden. In dem einfachsten Spezialfall, in dem  $\Gamma$  mit der vollen Modulgruppe zusammenfällt, ist diese Regel in (J I) direkt an der Reihendarstellung von  $c_n^*(v, \Gamma, A, B, v)$  ohne Benutzung der Metrisierung nachgewiesen worden [(J I), (36)].

Wir benötigen für eine Untersuchung des § 5 noch eine Abschätzung der Größen  $(v + \kappa)^{r-1} a_n(v, \Gamma, A, v)$ , wenn  $(v + \kappa)(n + \eta)$  über alle Grenzen wächst. Die Abschätzung ergibt sich nach dem Vorgehen in (F), § 3 aus der letzten Formel vor Satz 7 der vorliegenden Arbeit, wenn darin

$$\begin{aligned} (v + \kappa)^{r-1} K_r(n + \eta, \mu_2) &= K_r\left((v + \kappa)(n + \eta), \frac{1}{NN'm_1^2}\right) \\ &= O\left(\left((v + \kappa)(n + \eta)\right)^{r-1}\right) \\ &\quad (|m_1| \geq \sqrt{(v + \kappa)(n + \eta)}), \\ (v + \kappa)^{r-1} K_r(n + \eta, \mu_2) &= O\left(\left((v + \kappa)(n + \eta)\right)^{\frac{r-1}{2}} |m_1|^{r-1}\right) \\ &\quad (|m_1| \leq \sqrt{(v + \kappa)(n + \eta)}) \end{aligned}$$

eingetragen wird. Führt man die in (F), § 3 angegebene Zerlegung der Summe über  $m_1$  mit dem Teilpunkt  $t = \sqrt{(v + \kappa)(n + \eta)}$  aus, so findet man für den zweiten Bestandteil ( $|m_1| \geq t$ ) die Abschätzung

$$\begin{aligned} O\left(\left((v + \kappa)(n + \eta)\right)^{r-1} \sum_{\substack{|m_1| \geq t \\ m_1 \in \mathfrak{R}(A)}} E_{m_1} |m_1|^{-r}\right) &= O\left(\left((v + \kappa)(n + \eta)\right)^{\frac{r}{2} + \varepsilon}\right) \\ &\quad \left(0 < \varepsilon < \frac{r-2}{2}\right), \end{aligned}$$

wenn  $E_{m_1} = E(m_1)$  gesetzt wird; denn es ist

$$|m_1|^{-r} = |m_1|^{-r+2+\varepsilon} |m_1|^{-2-\varepsilon} \leq \left((v + \kappa)(n + \eta)\right)^{-\frac{r}{2} + 1 + \frac{\varepsilon}{2}} |m_1|^{-2-\varepsilon},$$

und  $\sum_{\substack{m_1 \neq 0, \\ m_1 \in \mathfrak{R}(A)}} E_{m_1} |m_1|^{-2-\varepsilon}$  konvergiert ( $0 < \varepsilon < r - 2$ ). Der erste Bestandteil ( $|m_1| \leq t$ ) läßt sich durch

$$O\left(\left((v + \kappa)(n + \eta)\right)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{0 < |m_1| \leq t \\ m_1 \in \mathfrak{R}(A)}} E_{m_1} |m_1|^{-1}\right) = O\left(\left((v + \kappa)(n + \eta)\right)^{\frac{r}{2} + \varepsilon}\right)$$

abschätzen, da

$$\sum_{\substack{m_1 \in \mathfrak{R}(A) \\ 0 < |m_1| \leq t}} E_{m_1} |m_1|^{-1} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathfrak{R}(A) \\ 0 < |m_1| \leq t}} E_{m_1} |m_1|^{-2-\varepsilon} |m_1|^{1+\varepsilon} = O(t^{1+\varepsilon}).$$

Die sämtlichen, hier mit dem  $O$ -Zeichen geschriebenen Größenvergleiche gelten gleichmäßig für  $\nu + \kappa > 0$ ,  $\eta + \eta > 0$ ,  $(\nu + \kappa)(\eta + \eta) \geq 1$  und die betreffenden  $m_1 \neq 0$  aus  $\mathfrak{R}(A)$ . — Wir erhalten also den folgenden

**Satz 7a.** Für  $\nu + \kappa > 0$ ,  $\eta + \eta > 0$  und  $(\nu + \kappa)(\eta + \eta) \rightarrow +\infty$  gilt die Abschätzung

$$(\nu + \kappa)^{r-1} a_n(\nu, \Gamma, A, \nu) = O\left(\left((\nu + \kappa)(\eta + \eta)\right)^{r+\varepsilon}\right)$$

gleichmäßig in  $n$  und  $\nu$ . In den Fällen  $\{\Gamma(N), -r, 1\}$  mit ganzem  $r \geq 2$  kann der Exponent  $\frac{r}{2} + \varepsilon$  durch  $\frac{r}{2} - \frac{1}{6} + \varepsilon$  ersetzt werden.

### § 3.

Die Poincaréschen Reihen  $G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N | F)$ .

Es seien  $s, \tau, \tau_0$  komplexe Zahlen<sup>4)</sup>,

$s = \sigma + it$  ( $\sigma, t$  reell),  $\tau = x + iy$ ,  $\tau_0 = x_0 + iy_0$  ( $x, x_0$  reell,  $y > 0, y_0 > 0$ ).

Die Hauptkongruenzuntergruppe der Modulgruppe von der Stufe  $N$  wird mit  $\Gamma(N)$  bezeichnet. Sie besteht aus den ganzzahligen Matrizen  $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  der Determinante Eins, die elementweise der Kongruenz  $L \equiv I \pmod{N}$  genügen. Die Matrix  $-I$  ist demnach dann und nur dann in  $\Gamma(N)$  enthalten, wenn  $N = 1$  oder  $N = 2$ ; für  $N > 2$  wird  $\Gamma(N)$  durch „Adjunktion“ der Matrix  $-I$  zu einer Grenzkreisgruppe im bisher gebrauchten Sinne. Diese Adjunktion verändert die Struktur der Gruppe nur unwesentlich, weil  $\Gamma(N)$  für  $N > 2$  keine elliptischen Matrizen enthält, und weil die Anzahl der parabolischen Fixpunkte eines kanonischen Fundamentalbereichs von  $\Gamma(N)$  gerade ist [vgl. (G III), § 8].

Ist  $A \subset \Gamma(1)$ ,  $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} z^{\nu}$ ,  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\beta_{\nu}|$  konvergent, so setzen wir für  $\sigma > 0$  und mit der üblichen Bedeutung der Potenz  $|m_1 \tau_0 + m_2|^{-s}$ :

$$G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N | F) = \sum_{M \in \mathfrak{A}(\tau, \tau_0, N)} F\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}}\right) (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s},$$

wo wie bisher  $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$ . Die Matrix  $A$  sei in der Gestalt  $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$

<sup>4)</sup> Zur Einführung des Parameters  $\tau_0$  vgl. (E), § 3.

vorgelegt. Die Reihe konvergiert absolut gleichmäßig in sämtlichen Variablen, wenn

$$y \geq \alpha_0, y_0 \geq \alpha_0, \sigma \geq \alpha_0 \quad (\alpha_0 > 0), \quad |x| \leq \xi, \quad |x_0| \leq \xi \quad (\xi > 0).$$

Sie stellt bei festem  $\tau_0$  und festem  $s$  mit  $\sigma > 0$  eine in  $\mathfrak{H}$  reguläre analytische Funktion von  $\tau$ , bei festen  $\tau$  und  $\tau_0$  eine im Gebiete  $\sigma > 0$  reguläre analytische Funktion von  $s$  dar. Es gilt für jedes  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ :

$$(31) \quad G_{-2}(s; S\tau, S\tau_0, A, N|F) = (c\tau + d)^2 |c\tau_0 + d|^2 G_{-2}(s; \tau, \tau_0, AS, N|F),$$

ferner für  $A_1 \equiv A_2 \pmod{N}$ ,  $A_1 \in \Gamma(1)$ ,  $A_2 \in \Gamma(1)$ :

$$(32) \quad G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A_1, N|F) = G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A_2, N|F),$$

überdies für ganzes  $b$ , wenn  $F^*(z) = F\left(e^{\frac{2\pi i b}{N}} z\right)$  gesetzt wird:

$$(33) \quad G_{-2}(s; \tau, \tau_0, \pm U^b A, N|F) = G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F^*),$$

und schließlich mit  $R_\nu(z) = z^\nu$  ( $\nu$  ganz und  $\geq 0$ ):

$$(34) \quad G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|R_\nu).$$

Die Reihe  $G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$  soll nun als Funktion von  $s$  über die Gerade  $\sigma = 0$  hinüber analytisch fortgesetzt werden. Zu diesem Zweck bedienen wir uns des Verfahrens in (A), § 1. Es sei  $\varepsilon_1(N) = 2$  oder 1, je nachdem  $N \leq 2$  oder  $N > 2$ . Wir schreiben  $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$  für  $M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma(N))$  und setzen

$$(34a) \quad G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F) = H_1(s, \tau, \tau_0|F) + H_2(s, \tau, \tau_0|F) + H_3(s, \tau, \tau_0|F),$$

wo bei festen  $A$  und  $F = F(z)$ :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1(s, \tau, \tau_0) = H_1(s, \tau, \tau_0|F) = \varepsilon_0(A) \varepsilon_1(N) F\left(e^{\frac{2\pi i \tau + \bar{\tau}}{N}}\right), \\ H_2(s, \tau, \tau_0) = H_2(s, \tau, \tau_0|F) \\ \quad = \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma(N)) \\ m_1 \neq 0}} F\left(e^{\frac{2\pi i m_0}{m_1 N}}\right) (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s}, \\ H_3(s, \tau, \tau_0) = H_3(s, \tau, \tau_0|F) \\ \quad = \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma(N)) \\ m_1 \neq 0}} Q_M(\tau|F) (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s} \end{array} \right.$$

mit

$$(36) \quad Q_N(\tau|F) = \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v e^{2\pi i \frac{m_0 v}{m_1 N}} \left( e^{\frac{-2\pi i v}{N m_1 (m_1 \tau + m_2)}} - 1 \right).$$

Hier ist  $w = e^{\frac{-2\pi i}{N m_1 (m_1 \tau + m_2)}}$  dem Betrage nach kleiner als Eins. Daraus folgt, wenn  $y = \Im \tau \geq \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ):

$$|w^v - 1| = |w - 1| \left| \sum_{k=0}^{v-1} w^k \right| \leq |w - 1| v \leq \frac{2\pi}{N} \frac{1}{|m_1 (m_1 \tau + m_2)|} e^{2\pi \alpha_0^{-1} v};$$

denn  $|e^z - 1| \leq |z| e^{|z|}$  und

$$\frac{2\pi}{|N m_1 (m_1 \tau + m_2)|} \leq \frac{2\pi}{N m_1^2 y} \leq 2\pi \alpha_0^{-1}.$$

Also gilt

$$(37) \quad |Q_N(\tau|F)| \leq 2\pi e^{2\pi \alpha_0^{-1}} \left( \sum_{v=1}^{\infty} v |\beta_v| \right) \frac{1}{|m_1 (m_1 \tau + m_2)|} \\ = C_1(\alpha_0) \frac{1}{|m_1 (m_1 \tau + m_2)|}.$$

Dabei bezeichnet  $C_1 = C_1(\alpha_0)$  eine Konstante, die nur von  $\alpha_0$  abhängt. ( $F(z)$  ist eine feste Funktion.) In ähnlicher Weise soll den bei den späteren Abschätzungen auftretenden Konstanten  $C_i$  ( $i \geq 2$ ) gelegentlich die Angabe beigefügt werden, von welchen Parametern sie abhängen.

Nach (37) und (G V), Hilfssatz 3 konvergiert die Reihe  $H_3(s, \tau, \tau_0|F)$  absolut gleichmäßig auf dem Gebiete  $y \geq \alpha_0$ ,  $y_0 \geq \alpha_0$ ,  $\sigma \geq -1 + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ),  $|\tilde{x}| \leq \xi$ ,  $|x_0| \leq \xi$  ( $\xi > 0$ ), und ihre Werte sind dort beschränkt. Die Funktion  $H_3(s, \tau, \tau_0|F)$  besitzt dort ferner die absolut gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung

$$H_3(s, \tau, \tau_0|F) = \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v H_3(s, \tau, \tau_0|R_v) \quad (R_v(z) = z^v).$$

Der Nullwert  $H_3(\tau|F) = H_3(0, \tau, \tau_0|F)$  hängt von  $\tau_0$  nicht ab und ist eine in  $\mathfrak{H}$  reguläre analytische Funktion von  $\tau$ . Diese ist periodisch mit der Periode  $N$ , das konstante Glied der Fourierreihe von  $H_3(\tau|F)$  verschwindet. Überdies ist  $\frac{1}{v} H_3(s, \tau, \tau_0|R_v)$  auf dem genannten Gebiete gleichmäßig für  $v \geq 1$  beschränkt.

Zur Untersuchung von  $H_2(s, \tau, \tau_0|F)$  wenden wir das Poissonsche Summationsverfahren an. Zunächst ergibt sich für  $\sigma > 0$ :

$$(38) \quad H_2(s, \tau, \tau_0|F) = \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 \pmod{N} \\ m_1 \neq 0}} |m_1|^{-2-s} \sum_{\substack{j \pmod{m_1 N} \\ (j, m_1) = 1 \\ j \equiv a_2 \pmod{N}}} F\left(e^{2\pi i \frac{j\tau}{m_1 N}}\right) f(s, w, w_0).$$

Hier ist  $h$  zu dem gegebenen  $j$ , das den Bedingungen der inneren Summation genügt, durch die Kongruenzen

$$(39) \quad hj \equiv 1 + m_1 a_3 \pmod{m_1 N}, \quad h \equiv a_0 \pmod{N}$$

$\pmod{m_1 N}$  eindeutig bestimmt.  $w$  und  $w_0$  stehen zur Abkürzung für

$$w = \frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N} \quad \text{und} \quad w_0 = \frac{\tau_0}{N} + \frac{j}{m_1 N}.$$

$f(s, w, w_0)$  bezeichnet eine Reihe von Partialbrüchen, für die wir gleich ihre Umformung auf Grund des Poissonschen Summationsverfahrens angeben:

$$(40) \quad f(s, w, w_0) = N^{-2-s} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (w+l)^{-2} |w_0+l|^{-s} \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(s, \tau, \tau_0) e^{2\pi i \frac{jn}{m_1 N}},$$

$$(40a) \quad A_n(s, \tau, \tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau+u)^{-2} |\tau_0+u|^{-s} e^{-2\pi i n \frac{u}{N}} \frac{du}{N}.$$

Bei geeigneter (symmetrischer) Erklärung der Zweige der vieldeutigen Funktionen  $(\tau_0+u)^{-\frac{s}{2}}$  und  $(\bar{\tau}_0+u)^{-\frac{s}{2}}$  von  $u$  erhält man für dieses Integral die Darstellung

$$(40b) \quad A_n(s, \tau, \tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau+u)^{-2} (\tau_0+u)^{-\frac{s}{2}} (\bar{\tau}_0+u)^{-\frac{s}{2}} e^{-2\pi i n \frac{u}{N}} \frac{du}{N}.$$

In dieser Darstellung läßt sich das Integral, wenn  $n \neq 0$ , durch Umbiegen des Integrationsweges umformen und abschätzen. Wir führen diese Operation zunächst für beschränkte  $\tau, \tau_0$  aus. Sei also

$$(41) \quad |x| \leq \xi, \quad |x_0| \leq \xi \quad (\xi \geq 2N); \quad \alpha_1 \leq y \leq \alpha_2,$$

$$\alpha_1 \leq y_0 \leq \alpha_2 \quad (0 < \alpha_1 < \alpha_2); \quad \sigma \geq -1 + \alpha_1, \quad |s| \leq \xi' \quad (\xi' > 0)$$

und  $n \neq 0$ . Wir wählen als abgeänderten Integrationsweg  $\mathfrak{L}$  den Rand eines in der oberen ( $n < 0$ ) oder in der unteren ( $n > 0$ ) Halbebene gelegenen Vertikalhalbstreifens, dessen Horizontalstrecke in der Distanz  $\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{2}$  von der reellen Achse liegt und aus den Punkten mit  $|\operatorname{Re} u| \leq 2\xi$  besteht. Dann ergibt sich unter der Voraussetzung (41):

$$(42) \quad |A_n(s, \tau, \tau_0)| \leq C_2(\xi, \xi', \alpha_1, \alpha_2) e^{-2\pi |n| \frac{\alpha_0}{N}} \quad (n \neq 0).$$

Zweitens beweisen wir eine in  $y$ ,  $y_0$  und  $\sigma$  gleichmäßige Abschätzung des Integrals  $A_n(s, \tau, \tau_0)$ , wenn  $y$  und  $y_0$  beide hinreichend groß und miteinander „vergleichbar“ sind. Sei also

$$(43) \quad |x| \leq \xi, \quad |x_0| \leq \xi (\xi \geq 2N); \quad y \geq h, \quad y_0 \geq h (h \geq 2\xi);$$

$$\sigma \geq -1 + \alpha_1 (\alpha_1 > 0), \quad |s| \leq \xi' (\xi' > 0)$$

und überdies für ein festes  $\vartheta$  mit  $0 < \vartheta < 1$ :

$$(44) \quad y_0 \geq \vartheta y, \quad y \geq \vartheta y_0, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \vartheta y.$$

Als abgeänderten Integrationsweg wählen wir wieder den oben genannten Linienzug  $\mathfrak{L}$  mit  $\alpha_0 = \frac{1}{2} \vartheta y$ . Dann ist

$$\varphi(u) = (\tau + u)^{-2} (\tau_0 + u)^{-\frac{\sigma}{2}} (\overline{\tau}_0 + u)^{-\frac{\sigma}{2}}$$

auf  $\mathfrak{L}$  beschränkt, wenn  $\sigma \geq 0$ . Ferner ist  $\varphi(u)$  auch für  $\sigma < 0$  auf den Vertikalgeraden von  $\mathfrak{L}$  beschränkt, wenn dort  $\frac{\Im m u}{y}$  oberhalb einer geeigneten Schranke liegt. Das Reststück von  $\mathfrak{L}$  hat eine Länge  $\leq C_3(\xi, h, \vartheta)y$ , und es ist auf dem Reststück

$$|\varphi(u)| \leq C_4 y^{-\sigma} \quad (\sigma < 0).$$

Daher findet man unter den Voraussetzungen (43) und (44)

$$(42a) \quad |A_n(s, \tau, \tau_0)| \leq C_5 e^{-\pi \frac{|n|}{N} \vartheta y} \quad (n \neq 0, \sigma \geq 0),$$

$$|A_n(s, \tau, \tau_0)| \leq C_5 y^{-\sigma} e^{-\pi \frac{|n|}{N} \vartheta y} \quad (n \neq 0, \sigma < 0)$$

und insgesamt

$$(45) \quad |A_n(s, \tau, \tau_0)| \leq C_6 e^{-\frac{\pi}{2} \vartheta \frac{|n|}{N} y}$$

$C_4, C_5, C_6$  und die sogleich auftretenden Konstanten  $C_7, C_8, C_9, C_{10}$  hängen von den sämtlichen Schranken in (43), (44) ab.

Für  $n = 0$  muß eine genauere Untersuchung vorgenommen werden. Zunächst sieht man direkt: Unter den Voraussetzungen (41) ist  $A_0(s, \tau, \tau_0)$  beschränkt; unter den Voraussetzungen (43) und (44) gilt sogar

$$(46) \quad |A_0(s, \tau, \tau_0)| \leq C_7 y^{-1-\sigma}.$$

Wir setzen für komplexes  $z$ :

$$(47) \quad e^s = 1 + e_1(z) = 1 + z + e_2(z), \quad \text{so daß}$$

$$|e_1(z)| \leq |z| e^{|z|}, \quad |e_2(z)| \leq \frac{1}{2} |z|^2 e^{|z|}.$$

Diese Zerlegung gibt für  $z = -s \log |\tau_0 + u|$  bei reellem  $\log |\tau_0 + u|$ , weil  $A_0(0, \tau, \tau_0) = 0$  ist,

$$A_0(s, \tau, \tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + u)^{-2} e_1(-s \log |\tau_0 + u|) \frac{du}{N} \\ = -\frac{s}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + u)^{-2} \log |\tau_0 + u| du + \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + u)^{-2} e_2(-s \log |\tau_0 + u|) \frac{du}{N}.$$

Wir benutzen die zweite Darstellung und schreiben

$$(48) \quad A'(\tau, \tau_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + u)^{-2} \log |\tau_0 + u| du,$$

$$(49) \quad A_0(s, \tau, \tau_0) = \frac{s}{N} A'(\tau, \tau_0) + A^*(s, \tau, \tau_0).$$

Über das Verhalten der Summanden auf der rechten Seite in (49) erfährt man folgendes:

1.  $A'(\tau, \tau_0)$  hat, wie eine Rechnung zeigt, den Wert

$$(50) \quad A'(\tau, \tau_0) = -\frac{\pi i}{\tau - \bar{\tau}_0}.$$

2. Zur Untersuchung von  $A^*(s, \tau, \tau_0)$  nehmen wir an, daß  $|s| \leq \alpha_3$  für ein festes positives  $\alpha_3 < 1$  gelte. Dann folgt aus (47)

$$|A^*(s, \tau, \tau_0)| \leq \frac{1}{2N} |s|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau + u|^{-2} (\log |\tau_0 + u|)^2 (|\tau_0 + u|^{|s|} + |\tau_0 + u|^{-|s|}) du,$$

und daher gilt unter den Voraussetzungen (41)

$$(51) \quad |A^*(s, \tau, \tau_0)| \leq C_9 |s|^2 \quad (|s| \leq \alpha_3, \alpha_3 < 1),$$

hingegen unter den Voraussetzungen (43), (44):

$$(52) \quad |A^*(s, \tau, \tau_0)| \leq C_{10} |s|^2 y^{-1+|s|} (\log y)^2 \quad (|s| \leq \alpha_3, \alpha_3 < 1).$$

Die Konstanten  $C_9$  und  $C_{10}$  hängen außer von den Schranken in (41) bzw. (43), (44) noch von  $\alpha_3$  ab. Im übrigen läßt sich die Funktion  $A_0(s, \tau, \tau)$  ( $\tau_0 = \tau$ ) explizit bestimmen. Man findet durch eine elementare Rechnung

$$(52a) \quad A_0(s, \tau, \tau) = -\frac{\sqrt{\pi}}{N} \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{(2+s)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)} s y^{-1-s}.$$

Daraus folgt nach (49), (51) in Übereinstimmung mit (50):

$$A'(\tau, \tau) = -\frac{\pi}{2} y^{-1}.$$

Auf Grund der Abschätzung (42) ergibt sich nun aus (38) und (40) für  $\sigma > 0$ :

$$H_2(s, \tau, \tau_0 | F) = \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 \pmod{N} \\ m_1 \neq 0}} |m_1|^{-2-s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_{m_1}(n, A | F) A_n(s, \tau, \tau_0),$$

wo

$$(58) \quad W_{m_1}(n, A | F) = \sum_{\substack{j \bmod m_1 N \\ (j, m_1) = 1 \\ j \equiv a_2 \pmod{N}}} e^{2\pi i \frac{jn}{m_1 N}} F\left(e^{2\pi i \frac{A}{m_1 N}}\right).$$

Da offenbar

$$(54) \quad |W_{m_1}(n, A | F)| \leq C_{11}(F) |m_1|,$$

so kann man die Summationen über  $m_1$  und  $n$  in der letzten Darstellung von  $H_2(s, \tau, \tau_0 | F)$  vertauschen, so daß

$$(55) \quad \begin{aligned} H_2(s, \tau, \tau_0 | F) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D(s, n, A | F) A_n(s, \tau, \tau_0) \quad (\sigma > 0), \\ D(s, n, A | F) &= \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 \pmod{N} \\ m_1 \neq 0}} |m_1|^{-2-s} W_{m_1}(n, A | F) \quad (\sigma > 0). \end{aligned}$$

Die analytische Fortsetzung der Funktionen  $H_2(s, \tau, \tau_0 | F)$  beruht wesentlich auf den Eigenschaften der Koeffizienten  $W_{m_1}(n, A | F)$  dieser Dirichlet-Reihen  $D(s, n, A | F)$ . Wir schreiben  $R_\nu(z) = z^\nu$  ( $\nu$  ganz und  $\geq 0$ ) und

$$(55a) \quad W_{m_1}(n, A, \nu) = W_{m_1}(n, A | R_\nu), \quad D(s, n, A, \nu) = D(s, n, A | R_\nu).$$

Dann gilt

$$(56) \quad W_{m_1}(n, A | F) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu W_{m_1}(n, A, \nu),$$

$$(57) \quad W_{m_1}(n, A, \nu) = \sum_{\substack{j \bmod m_1 N \\ (j, m_1) = 1 \\ j \equiv a_2 \pmod{N}}} e^{2\pi i \frac{jn + A\nu}{m_1 N}},$$

wo  $h$  mit  $j$  durch (39) verknüpft ist. Die elementare Arithmetik der Kongruenzgruppen lehrt, daß die Summationsbedingungen in (57) für  $h$  soviel bedeuten, wie

$$(58) \quad h \bmod m_1 N, \quad (h, m_1) = 1, \quad h \equiv a_0 \pmod{N}.$$

Da demnach die Kloostermansche Summe (57) auch mit der Summationsbedingung (58) geschrieben werden kann, wo  $h$  und  $j$  durch die gleichen Kongruenzen (39) verknüpft sind, wie vorher, besteht die Symmetrieformel

$$(59) \quad W_{m_1}(n, A, \nu) = W_{m_1}(\nu, \hat{A}, n), \quad \text{wenn } A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in \Gamma(1), \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Zur Anwendung der Ergebnisse von Salié und Davenport über die Kloostermanschen Summen müssen wir die Ausdrücke (57) einer Umformung unterziehen. Wir setzen

$$A' = U^{k_1} A U^{k_2} = \begin{pmatrix} a'_0 & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_1 a_1 & a_3 + k_1 a_2 + k_2 a_0 + k_1 k_2 a_1 \\ a_1 & a_2 + k_2 a_1 \end{pmatrix},$$

wo die ganzen Zahlen  $k_1$  und  $k_2$  so bestimmt werden sollen, daß

$$(a'_0, N) = (a'_2, N) = 1.$$

Erklärt man  $j'$  und  $h'$  durch  $j' = j + k_2 m_1$ ,  $h' = h + k_1 m_1$ , so bedeutet die Summationsbedingung (57):

$$j' \bmod m_1 N, \quad (j', m_1) = 1, \quad j' \equiv a'_2 \pmod{N};$$

entsprechend bedeutet (58):

$$h' \bmod m_1 N, \quad (h', m_1) = 1, \quad h' \equiv a'_0 \pmod{N},$$

und  $j h \equiv 1 + m_1 a_3 \pmod{m_1 N}$  ist mit  $j' h' \equiv 1 + m_1 a'_3 \pmod{m_1 N}$  gleichwertig. Daher gilt

$$W_{m_1}(n, A, \nu) = e^{-2\pi i \frac{k_2 n + k_1 \nu}{N}} W_{m_1}(n, A', \nu),$$

und es kann also bei der Abschätzung der Summen (57) angenommen werden, daß  $(a_0, N) = (a_2, N) = 1$ .

Das erwähnte Resultat von H. Salié<sup>5)</sup> besagt: Es seien  $u, v, \lambda, A, q$  ganze Zahlen mit  $A|q, A > 0, q > 0$ . Man setze

$$S(u, v; \lambda, A; q) = \sum_{\substack{0 \leq x \leq q \\ (x, q) = 1 \\ x \equiv \lambda \pmod{A}}} e^{2\pi i \frac{ux + vx}{q}} \quad (x \bar{x} \equiv 1 \pmod{q}).$$

<sup>5)</sup> H. Salié, Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen., Math. Zeitschr. 36 (1932), S. 263–278.

Dann gilt gleichmäßig in sämtlichen Variablen

$$(60) \quad S(u, v; \lambda, A; q) = O\left(q^{\frac{2}{3}+\varepsilon} (u, q)^{\frac{1}{3}}\right) \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Um diesen Satz auf die Summe  $W_{m_1}(n, A, v)$  anzuwenden, schreiben wir

$$\alpha = 1 + m_1 a_3 \quad (\alpha \equiv 1 + a_1 a_3 = a_0 a_2 \pmod{N}), \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} m_1$$

und erklären  $j'$  durch  $h \equiv j' \alpha \pmod{m_1 N}$ . Dann sind wegen  $(a_0 a_2, N) = 1$  die Voraussetzungen der Abschätzung (60) erfüllt. Man erhält in den Bezeichnungen von (60)

$$W_{m_1}(n, A, v) = S(n\varepsilon, v\varepsilon\alpha; a_2, N; |m_1 N|) = O\left(|m_1|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} (n, m_1 N)^{\frac{1}{3}}\right),$$

also — nun für beliebige  $A \subset \Gamma(1)$ :

$$(61) \quad |\dot{W}_{m_1}(n, A, v)| \leq C_{12}(\varepsilon) |m_1|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} |n|^{\frac{1}{3}} \quad (\varepsilon > 0, n \neq 0),$$

und nach (59)

$$(62) \quad |W_{m_1}(n, A, v)| \leq C_{12}(\varepsilon) |m_1|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} v^{\frac{1}{3}} \quad (\varepsilon > 0, v > 0).$$

Aus (56), (61), (62) ergibt sich mithin

$$(63) \quad |W_{m_1}(n, A|F)| \leq C_{13}(\varepsilon) |m_1|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} |n|^{\frac{1}{3}} \quad (\varepsilon > 0, n \neq 0),$$

$$(64) \quad |W_{m_1}(0, A|F) - \beta_0 W_{m_1}(0, A, 0)| \leq C_{14}(\varepsilon) |m_1|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

Nach (63) ist die Dirichlet-Reihe  $D(s, n, A|F)$ , wenn  $n \neq 0$ , für  $\sigma > -\frac{1}{3}$  absolut konvergent und erfüllt die Ungleichung

$$(65) \quad |D(s, n, A|F)| \leq C_{14}(\alpha_0) |n|^{\frac{1}{3}} \quad (n \neq 0, \sigma \geq -\frac{1}{3} + \alpha_0, \alpha_0 > 0).$$

Ferner setzen wir  $F(z) = \beta_0 + F_0(z)$ . Dann finden wir

$$W_{m_1}(0, A|F) = \beta_0 W_{m_1}(0, A, 0) + W_{m_1}(0, A|F_0),$$

$$D(s, 0, A|F) = \beta_0 D(s, 0, A, 0) + D(s, 0, A|F_0).$$

$$(65a) \quad D(s, 0, A|F_0) \text{ ist nach (64) für } \sigma > -\frac{1}{3} \text{ absolut konvergent}$$

und für  $\sigma \geq -\frac{1}{3} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) beschränkt.

Wir zerlegen nun die rechte Seite der ersten Gleichung (55) gemäß

$$H_2(s, \tau, \tau_0|F) = \beta_0 D(s, 0, A, 0) A_0(s, \tau, \tau_0) + H_2^*(s, \tau, \tau_0|F),$$

$$(66) \quad H_2^*(s, \tau, \tau_0|F) = D(s, 0, A|F_0) A_0(s, \tau, \tau_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} D(s, n, A|F) A_n(s, \tau, \tau_0)$$

in zwei Bestandteile und erkennen, daß  $H_2^*(s, \tau, \tau_0|F)$  bei festen  $\tau, \tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  eine für  $\sigma > -\frac{1}{2}$  reguläre analytische Funktion von  $s$  darstellt. Für festes  $s$  mit  $\sigma > -\frac{1}{2}$  und festes  $\tau_0 \in \mathfrak{H}$  ist  $H_2^*(s, \tau, \tau_0|F)$  eine in  $\mathfrak{H}$  reguläre analytische Funktion von  $\tau$ . Unter den Voraussetzungen (41) und für  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) ist die Summe auf der rechten Seite von (66) nach (65), (42), (45) gleichmäßig absolut konvergent, also  $H_2^*(s, \tau, \tau_0|F)$  beschränkt; das gleiche gilt unter den Voraussetzungen (43), (44), wenn  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$ . Der Nullwert

$$H_2^*(0, \tau, \tau_0|F) = H_2^*(\tau|F)$$

hängt von  $\tau_0$  nicht ab und ist daher eine für  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$  reguläre analytische Funktion von  $\tau$ . Er hat die Fourierentwicklung

$$(67) \quad H_2^*(\tau) = H_2^*(\tau, A|F) = \frac{-4\pi^2}{N^2} \sum_{n=1}^{\infty} n D(0, n, A|F) e^{\frac{2\pi i n \tau}{N}}.$$

Wenn  $\beta_0 = F(0) = 0$ , so fällt  $H_2(s, \tau, \tau_0|F)$  mit  $H_2^*(s, \tau, \tau_0|F)$  zusammen.

Um  $H_2^*(s, \tau, \tau_0|F)$  in die entsprechenden, mit  $F(z) = R_\nu(z) = z^\nu$  ( $\nu \geq 0$ ) gebildeten Funktionen aufzuspalten, schreiben wir nun ausführlicher

$$\begin{aligned} H_2(s; \tau, \tau_0, A, N|F) &= H_2(s, \tau, \tau_0|F), \\ H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu) &= H_2(s, \tau, \tau_0|R_\nu), \\ (67a) \quad G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu) &= G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|R_\nu), \\ H_2^*(s, \tau, \tau_0, A|F) &= H_2^*(s, \tau, \tau_0|F), \end{aligned}$$

so daß für  $\nu > 0$ :

$$H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu) = H_2^*(s, \tau, \tau_0, A|R_\nu).$$

Man erhält zunächst aus (55), (56) und (61) für  $n \neq 0$ ,  $\sigma > -\frac{1}{2}$ :

$$D(s, n, A|F) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu D(s, n, A, \nu).$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut gleichmäßig, wenn  $n$  fest und  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ). Analog folgt aus (62) die für  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) absolut konvergente Entwicklung

$$D(s, 0, A|F_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu D(s, 0, A, \nu).$$

Dabei gilt für  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ):

$$(67b) \quad |D(s, n, A, v)| \leq C_{15}(\alpha_0) |n|^{\frac{1}{2}} (n \neq 0), \quad |D(s, 0, A, v)| \leq C_{15}(\alpha_0) v^{\frac{1}{2}} (v > 0).$$

Also wird

$$\begin{aligned} H_2^*(s, \tau, \tau_0, A | F) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \beta_n D(s, 0, A, v) A_n(s, \tau, \tau_0) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} D(s, n, A, v) A_n(s, \tau, \tau_0) \\ (68) \quad &= \beta_0 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} D(s, n, A, 0) A_n(s, \tau, \tau_0) \\ &\quad + \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, v). \end{aligned}$$

Alle Reihen in (68) konvergieren unter den Voraussetzungen (41) und ebenso unter den Voraussetzungen (43), (44) absolut gleichmäßig, wenn überdies  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ).

Die letzten Ergebnisse unserer Untersuchungen reichen für  $\beta_0 = 0$  bereits hin, um die analytische Fortsetzung der Funktion  $H_2(s; \tau, \tau_0, A, N | F)$  über die Gerade  $\sigma = 0$  hinüber vollziehen zu können. Es erübrigt daher nur noch eine Diskussion der Dirichlet-Reihen  $D(s, 0, A, 0)$ .

Wir bezeichnen den Vektor  $\{a_1, a_2\}$  mit  $a$  und setzen

$$\begin{aligned} D(s, a) &= D(s, 0, A, 0) = \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 \pmod{N} \\ m_1 \neq 0}} \gamma(m_1, a_2) |m_1|^{-2-s}, \\ \gamma(m_1, a_2) &= W_{m_1}(0, A, 0) = \sum_{\substack{j \pmod{m_1 N} \\ (j, m_1) = 1 \\ j \equiv a_2 \pmod{N}}} 1, \end{aligned}$$

ferner für einen beliebigen ganzzahligen Vektor  $b = \{b_1, b_2\}$ :

$$\begin{aligned} \beta(m_1, b_2) &= \sum_{\substack{j \pmod{m_1 N} \\ j \equiv b_2 \pmod{N}}} 1 = |m_1|, \\ (69) \quad \zeta(s, b) &= \sum_{\substack{m_1 \equiv b_1 \pmod{N} \\ m_1 \neq 0}} |m_1|^{-1-s} = \sum_{\substack{m_1 \equiv b_1 \pmod{N} \\ m_1 \neq 0}} \beta(m_1, b_2) |m_1|^{-2-s} \end{aligned}$$

Mit diesen Funktionen  $\zeta(s, b)$  bilden wir nach dem Vorgang von Hecke<sup>\*)</sup> den Ausdruck

$$K(s, a) = \sum_{\substack{k \bmod N \\ (k, N) = 1}} \left( \sum_{\substack{n=1 \\ nk \equiv 1 \pmod{N}}}^{\infty} \mu(n) n^{-s} \right) \zeta(s, ka),$$

wo  $\mu(n)$  die Möbiussche Funktion angibt. Hier tragen wir für  $\zeta(s, ka)$  die Reihendarstellung (69) ein, multiplizieren die Summen über  $n$  und  $m_1$  aus und ersetzen die innerste Summe  $\beta(m_1, ka_2)$  durch

$$\sum_{\substack{l \bmod am_1 N \\ l \equiv a_2 \pmod{N} \\ l \equiv 0 \pmod{a}}} 1 = |m_1| = \beta(m_1, ka_2).$$

Dann ergibt sich nach elementaren Umformungen

$$K(s, a) = D(s, a),$$

also

$$D(s, a) = \sum_{\substack{k \bmod N \\ (k, N) = 1}} \left( \sum_{\substack{n=1 \\ nk \equiv 1 \pmod{N}}}^{\infty} \mu(n) n^{-s} \right) \zeta(s, ka).$$

Nun ist  $s\zeta(s, ka)$  offenbar eine ganze Funktion von  $s$ , die für  $s = 0$  den Wert  $\frac{2}{N}$  annimmt. Daher ist auch

$$(69a) \quad D^*(s, a) = s D(s, a)$$

eine ganze Funktion von  $s$ , und es gilt, wenn  $\sigma_0(N) = \varepsilon_1(N) \frac{N^2}{2} \prod_{q|N} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)$  die Anzahl der parabolischen Spitzen eines kanonischen Fundamentalbereichs von  $\Gamma(N)$  bezeichnet,

$$D^*(0, a) = \frac{6N \varepsilon_1(N)}{\pi^2 \sigma_0(N)}.$$

Aus diesem Sachverhalt und den Darstellungen (66) und (49) resultiert jetzt die endgültige Zerlegung der Funktion  $H_2(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$  in der Gestalt

$$(70) \quad H_2(s; \tau, \tau_0, A, N|F) = \frac{-\pi i}{N} \beta_0 D^*(s, a) \frac{1}{\tau - \bar{\tau}_0} + \beta_0 D(s, a) A^*(s, \tau, \tau_0) \\ + D(s, 0, A|F_0) A_0(s, \tau, \tau_0) \\ + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} D(s, n, A|F) A_n(s, \tau, \tau_0).$$

<sup>\*)</sup> E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hanseischen Univ. 5 (1927), S. 199–224.

Die letzte Summe konvergiert, wie bei (66) festgestellt, auf den durch (41) bzw. (43), (44) beschriebenen Bereichen absolut gleichmäßig, wenn überdies  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ).

Von dem ersten Gliede auf der rechten Seite stellen wir fest, daß sein Nullwert

$$(70a) \quad \frac{-6i\epsilon_1(N)}{\pi\sigma_0(N)} \frac{1}{\tau - \tau_0} \cdot \beta_0$$

von  $A$  nicht abhängt. Zur Diskussion des zweiten Gliedes bemerken wir, daß  $A^*(s, \tau, \tau_0)$  bei festen  $\tau, \tau_0$  eine für  $\sigma > -1$  reguläre Funktion von  $s$  darstellt, die für  $s = 0$  in mindestens zweiter Ordnung verschwindet. Daraus und aus (51), (52) folgt, daß die durch

$$s \varphi(s, \tau, \tau_0) = D(s, a) A^*(s, \tau, \tau_0) \quad (\sigma > -1)$$

erklärte analytische Funktion  $\varphi(s, \tau, \tau_0)$  von  $s$  unter den Voraussetzungen (41) wie unter den Voraussetzungen (43), (44) beschränkt ist ( $\sigma \geq -1 + \alpha_0$ ). Ferner stellt  $D(s, a) A^*(s, \tau, \tau_0)$  bei festen  $\tau, \tau_0$  eine für  $\sigma > -1$  reguläre analytische Funktion von  $s$ , bei festen  $s, \tau_0$  eine für  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$  reguläre analytische Funktion von  $\tau$  dar.

Nun folgt aus (66), (68) und (70) zunächst

$$(72) \quad H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, 0) = \frac{-\pi i}{N} D^*(s, a) \frac{1}{\tau - \tau_0} + D(s, a) A^*(s, \tau, \tau_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} D(s, n, A, 0) A_n(s, \tau, \tau_0) \quad (\sigma > -\frac{1}{2}),$$

$$(73) \quad H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D(s, n, A, \nu) A_n(s, \tau, \tau_0)$$

und hieraus die für  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) und unter den Voraussetzungen (41) wie unter den Voraussetzungen (43), (44) absolut gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(74) \quad H_2(s; \tau, \tau_0, A, N | F) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu).$$

Die Funktion  $H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, 0)$  ist unter den genannten Voraussetzungen und für  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) beschränkt. Die Funktion  $H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu)$  ( $\nu > 0$ ) genügt, wenn (41) oder (43) und (44) gelten und überdies  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) ist, der Abschätzung

$$(75) \quad |H_2(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu)| \leq C_{17} r^{\frac{1}{2}}.$$

wo  $C_{17}$  nur von den Schranken in (41), bzw. (43), (44) sowie von  $\alpha_0$  abhängt.

Aus den in diesem Paragraphen gewonnenen Erkenntnissen erhalten wir zusammenfassend:

**Satz 8.** Es sei  $N$  eine natürliche Zahl,  $\Gamma(N)$  die Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe  $N$  innerhalb der Modulgruppe  $\Gamma(1)$ ,  $F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v z^v$ ,

$\sum_{v=1}^{\infty} v |\beta_v|$  konvergent. Man bilde mit den komplexen Variablen  $s = \sigma + it$ ,  $\tau = x + iy$ ,  $\tau_0 = x_0 + iy_0$  ( $\sigma > 0$ ,  $y > 0$ ,  $y_0 > 0$ ) und mit irgendeinem  $A$  aus  $\Gamma(1)$  ( $A = \{a_1, a_2\}$ ) die durch (30) erklärte Reihe  $G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$ , in der  $m_1, m_2$  alle Paare teilerfremder ganzer Zahlen mit  $m_i \equiv a_i \pmod{N}$  ( $i = 1, 2$ ) durchläuft und  $M$  irgendeine Matrix aus  $A \Gamma(N)$  mit  $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$  bedeutet. Diese Reihe stellt bei festen  $\tau, \tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  eine für  $\sigma > 0$  analytische Funktion von  $s$  dar, die bis an die Gerade  $\sigma = -\frac{1}{2}$  heran analytisch fortsetzbar ist. Die analytische Fortsetzung ist eine für  $\sigma > -\frac{1}{2}$ ,  $y > 0$ ,  $y_0 > 0$  eindeutige Funktion, die sich bei festen  $\tau, \tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  als Funktion von  $s$ , bei festen  $\tau_0 \subset \mathfrak{H}$ ,  $s$  als Funktion von  $\tau$  regulär-analytisch verhält. Insbesondere ist also der Nullwert  $G_{-2}(0; \tau, \tau_0, A, N|F)$  bei festem  $\tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  eine für  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$  reguläre analytische Funktion von  $\tau$ . Wenn  $F(0) = 0$  (also  $\beta_0 = 0$ ), so hängt

$$G_{-2}(\tau, A, N|F) = G_{-2}(0; \tau, \tau_0, A, N|F)$$

von  $\tau_0$  nicht ab und stellt eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma(N), -2, 1\}$  dar. Wird  $F(z) = \beta_0 + F_0(z)$  gesetzt, so gilt für  $\sigma > -\frac{1}{2}$ ,  $y > 0$ ,  $y_0 > 0$ :

$$G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F) = \beta_0 G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N, 0) + G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F_0).$$

Der Nullwert

$$G_{-2}(\tau, \tau_0, A, N, 0) = G_{-2}(0; \tau, \tau_0, A, N, 0) \quad (F(z) = R_0(z) = 1)$$

hängt in jedem Falle von  $\tau_0$  ab und stellt für kein  $\tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  eine Modulform in den Variablen  $\tau$  dar. Dagegen ist die Differenz zweier solcher, mit  $F(z) = 1$  und mit zwei nach  $\Gamma(N)$  inäquivalenten Matrizen  $A_1, A_2$  aus  $\Gamma(1)$  gebildeten Nullwerte von  $\tau_0$  unabhängig, kann also als Differenz der Nullwerte der genannten Funktionen unter der Bedingung  $\tau = \tau_0$  erklärt werden und fällt deshalb mit einer nicht identisch verschwindenden Linearkombination von Teilwerten  $N$ -ter Stufe der Weierstraßischen  $g$ -Funktion zusammen<sup>7)</sup>. Versteht

<sup>7)</sup> E. Hecke, a. a. O. \*).

man unter  $\Lambda(s, \tau, \tau_0)$  irgendeine endliche Linearkombination von Funktionen  $G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$  mit beliebigen  $A = A_i$  und mit beliebigen  $F(z) = F_i(z)$ , so ist der Nullwert  $\Lambda(0, \tau, \tau_0)$  dann und nur dann von  $\tau_0$  unabhängig, wenn die entsprechend gebildete Linearkombination der  $F_i(0)$  verschwindet. Dies bedeutet mithin sowohl, daß  $\Lambda(0, \tau, \tau)$  eine analytische Funktion von  $\tau$  ist, als auch, daß der Nullwert  $\Lambda(0, \tau, \tau_0)$  eine Modulform in der Variablen  $\tau$  darstellt.

Unter den Voraussetzungen (41), ebenso wie unter den Voraussetzungen (43), (44) (insbesondere also auch für  $\tau = \tau_0$ ) gilt mit  $F(z) = R_\nu(z) = z^\nu$  ( $\nu \geq 0$ ) in der Bezeichnung von (67a):

$$|G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N, 0)| \leq C_{18} \quad (\sigma \geq -1 + \alpha_0, \alpha_0 > 0),$$

$$|G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu)| \leq C_{19} \nu \quad (\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0, \alpha_0 > 0),$$

$$G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu G_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N, \nu).$$

Diese Summe konvergiert absolut gleichmäßig für  $\sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ).

Die Fourierkoeffizienten der ganzen Spitzenformen  $G_{-2}(\tau, A, N|R_\nu)$  ( $\nu > 0$ ) sind in (F), § 2 bestimmt worden. Es ergeben sich dabei diejenigen Ausdrücke, die aus den Reihendarstellungen des Satzes 7 durch die formale Spezialisierung  $\Gamma = \Gamma(N)$ ,  $r = 2$ ,  $v = 1$  hervorgehen.

Im folgenden Paragraphen soll die Metrisierung erklärt und u. a. auf die Nullwerte  $G_{-2}(0; \tau, \tau, A, N|F)$  angewendet werden. Dabei wird benutzt, daß die Funktion  $G_{-2}(s; \tau, \tau, A, N|F)$  ( $\tau = \tau_0$ ) gleichmäßig für alle  $\tau$  in einem abgeschlossenen, in § enthaltenen Vertikalhalbstreifen ihrem Nullwert zustrebt, wenn  $s \rightarrow 0$ . Um dies zu beweisen, genügt es offenbar reichlich, zu zeigen: Die Ableitung  $G'_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$  der genannten Funktion nach  $s$  ist unter den Voraussetzungen (41), wie unter den Voraussetzungen (43), (44) beschränkt, falls überdies die Ungleichungen

$$(76) \quad |s| \leq \alpha_3 \quad (0 < \alpha_3 < 1), \quad \sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0 \quad (\alpha_0 > 0)$$

bestehen.

Zum Beweis dieser Aussage bezeichnen wir die Ableitung einer von  $s$  und anderen Variablen abhängigen Funktion  $\Phi(s, \dots)$  nach  $s$  mit  $\Phi'(s, \dots)$ . Man hat dann nach (34a) und (67a)

$$G'_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F) = H'_2(s; \tau, \tau_0, A, N|F) + H'_3(s; \tau, \tau_0|F),$$

$$H'_3(s; \tau, \tau_0|F) = - \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma(N)) \\ m_1 \neq 0}} Q_M(\tau|F) (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s} \log |m_1 \tau_0 + m_2|.$$

Nach (37) ist also  $H'_3(s; \tau, \tau_0 | F)$  bei festem  $F(z)$  und wenn  $y \geq \alpha_0$ ,  $y_0 \geq \alpha_0$ ,  $\sigma \geq -1 + \alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) beschränkt. Ferner erhält man für  $F(z) = R_\nu(z)$  ( $\nu > 0$ ) die Abschätzung

$$(77) \quad |H'_3(s; \tau, \tau_0 | R_\nu)| \leq C_{20} \nu (y \geq \alpha_0, y_0 \geq \alpha_0, \sigma \geq -1 + \alpha_0, \alpha_0 > 0).$$

Bei der Untersuchung von  $H'_2(s; \tau, \tau_0, A, N | F)$  bedienen wir uns der unter den Voraussetzungen (41), (76) wie unter den Voraussetzungen (43), (44), (76) gleichmäßig konvergenten Reihendarstellung (70). Es wird danach

$$(78) \quad \begin{aligned} H'_2(s; \tau, \tau_0, A, N | F) &= \frac{-\pi i}{N} \beta_0 D^{*'}(s, a) \frac{1}{\tau - \tau_0} + \beta_0 D'(s, a) A^*(s, \tau, \tau_0) \\ &+ \beta_0 D(s, a) A^{*'}(s, \tau, \tau_0) + D'(s, 0, A | F_0) A_0(s, \tau, \tau_0) + D(s, 0, A | F_0) A'_0(s, \tau, \tau_0) \\ &+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \{ D'(s, n, A | F) A_n(s, \tau, \tau_0) + D(s, n, A | F) A'_n(s, \tau, \tau_0) \}. \end{aligned}$$

Die nun abzuleitenden Ungleichungen, Abschätzungen und Aussagen über die Beschränktheit einzelner Bestandteile oder des ganzen Ausdrucks auf der rechten Seite von (78) beziehen sich stets auf die genannten Voraussetzungen.

Zunächst ist das erste Glied auf der rechten Seite ersichtlich beschränkt, ebenso nach (51) und (52) das zweite, da  $s^2 D'(s, a)$  eine ganze Funktion von  $s$  darstellt. Zur Untersuchung des dritten und fünften Gliedes zerlegen wir  $A'_0(s, \tau, \tau_0)$  gemäß (47), (49) in zwei Summanden nach dem Schema

$$\begin{aligned} A'_0(s, \tau, \tau_0) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + u)^{-2} |\tau_0 + u|^{-s} \log |\tau_0 + u| \frac{du}{N} \\ &= \frac{1}{N} A'(\tau, \tau_0) + A^{*'}(s, \tau, \tau_0) \\ &= \frac{1}{N} A'(\tau, \tau_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + u)^{-2} e_1(-s \log |\tau_0 + u|) \log |\tau_0 + u| \frac{du}{N}, \end{aligned}$$

wo

$$|A^{*'}(s, \tau, \tau_0)| \leq \frac{|s|}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau + u|^{-2} (\log |\tau_0 + u|)^2 (|\tau_0 + u|^{|s|} + |\tau_0 + u|^{-|s|}) du.$$

Also gelten für  $A^{*'}(s, \tau, \tau_0)$  diejenigen Ungleichungen, die man aus (51) und (52) erhält, indem man auf der rechten Seite den Faktor  $|s|^2$  durch  $|s|$  ersetzt. Daher ist das dritte und auch das fünfte Glied beschränkt.

Die Integraldarstellung von  $A'_n(s, \tau, \tau_0)$  für  $n \neq 0$  geht aus der rechten Seite von (40b) dadurch hervor, daß dem Integranden der Faktor

$$-\frac{1}{2} \{ \log(\tau_0 + u) + \log(\overline{\tau_0} + u) \}$$

angefügt wird. Das zur Untersuchung von  $A_n(s, \tau, \tau_0)$  angewendete Verfahren zeigt hier, daß  $A'_n(s, \tau, \tau_0)$  unter den Voraussetzungen (41) der Abschätzung (42) genügt. Unter den Voraussetzungen (43), (44) dagegen erhält man diejenigen Ungleichungen, die aus (42a) entstehen, indem auf der rechten Seite der Faktor  $\log y$  angefügt wird. Insgesamt also gelten für  $A'_n(s, \tau, \tau_0)$  wie für  $A_n(s, \tau, \tau_0)$  die Ungleichungen (42) und (45).

Schließlich findet man durch gliedweise Differentiation der Dirichlet-Reihe  $D(s, n, A|F)$ , daß die in (65), (65a) und (67b) formulierten Aussagen richtig bleiben, wenn man dort überall  $D$  durch  $D'$  ersetzt (und nötigenfalls die Konstanten ändert).

Damit ist die Behauptung und der folgende Satz bewiesen:

**Satz 9.** (Bezeichnungen aus Satz 8). Unter den Voraussetzungen (41), (76), sowie unter den Voraussetzungen (43), (44), (76) ist die Ableitung  $G'_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$  der durch (30) erklärten Funktion nach  $s$  beschränkt.  $G'_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$  ist bei festen  $\tau, \tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  eine für  $\sigma > -\frac{1}{2}$  analytische Funktion von  $s$  und bei festen  $s, \tau_0$  ( $\sigma > -\frac{1}{2}, y_0 > 0$ ) eine für  $y > 0$  analytische Funktion von  $\tau$ . Es bestehen ferner die im letzten Absatz des Textes von Satz 8 angegebenen Tatsachen, wenn man dort überall  $G_{-2}$  durch  $G'_{-2}$  ersetzt. Im Vertikalhalbstreifen  $|x| \leq \xi, y \geq \alpha_0$  ( $\xi > 0, \alpha_0 > 0$ ) strebt die Funktion  $G'_{-2}(s; \tau, \tau, A, N|F)$  ( $\tau = \tau_0$ ) gleichmäßig gegen ihren Nullwert, wenn  $s \rightarrow 0$ .

Die Aussage über das analytische Verhalten von  $G'_{-2}(s; \tau, \tau_0, A, N|F)$  bei festen  $s = 0$  und  $\tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  folgt aus (78) durch Betrachtung der zweiten Ableitung  $A^{*''}(s, \tau, \tau_0)$  von  $A^*(s, \tau, \tau_0)$  nach  $s$  im Punkte  $s = 0$ .

#### § 4.

##### 1. Metrisierung.

Es sei  $\tau$  eine feste reelle Zahl,  $s$  komplex,  $f(\tau)$  eine in  $\mathfrak{H}$  stetige Funktion von  $\tau$ ,  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine reelle Matrix der Determinante Eins. Wir setzen [vgl. (K I), 1]:

$$(79) \quad \begin{aligned} f|S &= f(\tau) | S = f(S\tau) (c\tau + d)^{-s} | c\tau + d|^{-s}, \\ f(\tau)|S &= f(\tau) | S, \quad f(\tau)|S = f(\tau) | S. \end{aligned}$$

(r, s)                      (r, 0)                      (s)                      (0, s)

Dann gilt mit  $\sigma = \sigma^{(\tau)}$ , wenn  $S_1$  und  $S_2$  zwei reelle Matrizen der Determinante Eins bedeuten,

$$(80) \quad f(\tau) \Big|_{\substack{(r,s) \\ S_1 S_2}} S_1 S_2 = \sigma(S_1, S_2) \left( f(\tau) \Big|_{\substack{(r,s) \\ S_1}} \right) \Big|_{\substack{(r,s) \\ S_2}}.$$

Es sei  $f(\tau)$  eine ganze Form  $\{\Gamma, -r, v\}$ , wo  $\Gamma$  von erster Art,  $r > 0$ ,  $|v| = 1$ . Dann ist  $f(\tau)|S$  nach (B), S. 379 eine ganze Form  $\{S^{-1}\Gamma S, -r, v'_s\}$ ,

wo

$$v'_s(L') = v(L) \frac{\sigma(L, S)}{\sigma(S, L')} \quad \text{für } L' = S^{-1}LS \subset S^{-1}\Gamma S.$$

Hat ferner  $f(\tau)$  in der Spitze  $\zeta = A^{-1}\infty$  von  $\Gamma$  die Entwicklung

$$(81) \quad f(\tau) = (a_1\tau + a_2)^{-r} \sum_{n+s \geq 0} \alpha_n e^{\frac{2\pi i(n+s)\tau}{N}},$$

[ $A$  reell,  $\|A\| = 1$ ,  $\underline{A} = \{a_1, a_2\}$ ;  $-I$  und  $P = P_\zeta = A^{-1}U^{N'}A$  (82) ( $N' > 0$ ) erzeugen die Gruppe der parabolischen Matrizen von  $\Gamma$  mit dem Fixpunkt  $\zeta = A^{-1}\infty$ ;  $v(P) = e^{2\pi i x}$  ( $0 \leq x < 1$ )],

so erhält man die Fourierreihe

$$(83) \quad f_A(\tau) = \sum_{n+s \geq 0} \alpha_n e^{\frac{2\pi i(n+s)\tau}{N}}$$

nach (79), (80) aus

$$(83a) \quad f(\tau) = f_A(\tau)|A, \quad f_A(\tau) = \sigma(A, A^{-1})f(\tau)|A^{-1}$$

und damit in  $f_A(\tau)$  eine ganze Form  $\{A\Gamma A^{-1}, -r, v'_{A^{-1}}\}$ . Der Zusammenhang zwischen den Entwicklungen von  $f(\tau)$  und  $f(\tau)|S$  in den Spitzen  $\zeta$  und  $S^{-1}\zeta$  beruht auf der Formel

$$f(\tau)|S = \sigma(A, S)^{-1} f_A(\tau)|AS.$$

Die Invarianzeigenschaft von  $f(\tau)$  gegenüber den Matrizen  $L$  aus  $\Gamma$  bedeutet

$$(84) \quad f(\tau)|L = v(L)f(\tau) \quad (L \in \Gamma).$$

Die Transformationsformel (22) nimmt in dieser Symbolik die Gestalt

$$G_{-, (\tau, v, A, \Gamma|F)}|S = \frac{v_1(AS)}{v(A)\sigma(A, S)} G_{-, (\tau, v_1, AS, S^{-1}\Gamma S|F)} \quad (v_1 = v'_s)$$

an, aus der insbesondere

$$(85) \quad G_{-, (\tau, v, I, \Gamma|F)}|A = v_2(A) G_{-, (\tau, v_2, A, A^{-1}\Gamma A|F)} \quad (v_2 = v'_A),$$

$$G_{-, (\tau, v, A, \Gamma|F)}|A^{-1} = \frac{1}{v(A)\sigma(A, A^{-1})} G_{-, (\tau, v_3, I, A\Gamma A^{-1}|F)}$$

$$(v_3 = v'_{A^{-1}})$$

hervorgeht. Analog bedeutet (31) für  $\tau = \tau_0$  und mit der Bezeichnung

$$G_{-2}(s, \tau, A, N|F) = G_{-2}(s; \tau, \tau, A, N|F)$$

nach (79), daß

$$G_{-2}(s, \tau, A, N|F) \Big|_{(2, s)} S = G_{-2}(s, \tau, AS, N|F) \quad (A \subset \Gamma(1)', S \subset \Gamma(1)).$$

Daher gilt hier

$$(86) \quad G_{-2}(s, \tau, A, N|F) \Big|_{(2, s)} A^{-1} = G_{-2}(s, \tau, I, N|F).$$

Zur Erklärung der Metrisierung verabreden wir eine Benennung für diejenigen Bereiche, über die das Metrisierungsintegral im folgenden erstreckt werden wird. Es sei  $\mathfrak{N}$  die Menge der parabolischen Fixpunkte von  $\Gamma$ . Eine Punktmenge  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{H} + \mathfrak{N}$  heißt ein zulässiger Bereich (in bezug auf  $\Gamma$ ), wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1.  $\mathfrak{B}$  besteht aus endlich vielen abgeschlossenen Teilen (Komponenten), die zu je zweien höchstens endlich viele Punkte in  $\mathfrak{H}$  gemein haben.
2. Jede Komponente besteht aus einem (nicht leeren) Gebiet und dessen Rand.
3. Der Rand jeder Komponente besteht aus endlich vielen nichteuklidischen Strecken und Halbgeraden.
4.  $\mathfrak{B}$  hat mit dem Rande von  $\mathfrak{H}$  nur endlich viele Punkte gemein, die alle der Menge  $\mathfrak{N}$  angehören.

Nun sei  $\mathfrak{B}$  ein zulässiger Bereich, der ganz im Innern von  $\mathfrak{H}$  liegt,  $\tau$  eine komplexe Zahl. Sind  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  zwei in  $\mathfrak{H}$  stetige Funktionen, so definieren wir

$$(87) \quad W_r(f, \varphi; \mathfrak{B}) = W_r(f(\tau), \varphi(\tau); \mathfrak{B}) = \iint_{\mathfrak{B}} f(\tau) \overline{\varphi(\tau)} y^r \frac{dx dy}{y^2}.$$

Offenbar gilt

$$(88) \quad W_r(\varphi, f; \mathfrak{B}) = \overline{W_r(f, \varphi; \mathfrak{B})}.$$

Es sei von jetzt an  $r$  reell, und es seien  $s_1, s_2$  zwei komplexe Zahlen. Dann besteht die Transformationsformel

$$(89) \quad W_{r+s} \left( f \Big|_{(r, s_1)} S, \varphi \Big|_{(r, s_2)} S; S^{-1} \mathfrak{B} \right) = W_{r+s}(f, \varphi; \mathfrak{B}) \cdot \left( s = \frac{s_1 + s_2}{2} \right).$$

Zum Beweis schreiben wir  $\tau' = S\tau = x' + iy'$ , so daß  $y' = \frac{y}{|c\tau + d|^2}$ . Für den Integranden auf der linken Seite von (89) ergibt sich nach der Erklärung von  $(c\tau + d)^r = e^{r \log(c\tau + d)}$  [(G I), (8), (9)]:

$$\begin{aligned} f(S\tau) \overline{\varphi(S\tau)} |c\tau + d|^{-2r} |c\tau + d|^{-r_1 - r_2} y^{r + \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2}} \frac{dx dy}{y^2} \\ = f(\tau') \overline{\varphi(\tau')} y'^{r + \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2}} \frac{dx' dy'}{y'^2}, \end{aligned} \quad \text{q. e. d.}$$

Es seien ferner  $\mathfrak{B}$  ein zulässiger Bereich in bezug auf  $\Gamma$ ,  $f(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  ganze Formen  $\{\Gamma, -r, v\}$  ( $r > 0$ ,  $|v| = 1$ ); überdies sei  $f(\tau)$  oder  $\varphi(\tau)$  eine ganze Spitzenform. Dann existiert das Integral  $W_r(f, \varphi; \mathfrak{B})$  und erfüllt nach (84), (89) die Transformationsformel

$$(90) \quad W_r(f, \varphi; \mathfrak{B}) = W_r(f, \varphi; L\mathfrak{B}) \text{ für jedes } L \text{ aus } \Gamma.$$

Bezeichnet  $\mathfrak{R}$  irgendeinen zulässigen Bereich, der zugleich Fundamentalbereich von  $\Gamma$  ist (kürzer: einen zulässigen Fundamentalbereich von  $\Gamma$ ), so ist das Doppelintegral  $W_r(f, \varphi; \mathfrak{R})$  von der Auswahl von  $\mathfrak{R}$  unabhängig. Wir nennen dieses Integral das Skalarprodukt von  $f$  und  $\varphi$  in bezug auf  $\Gamma$ , in Zeichen  $(f, \varphi; \Gamma)$  oder kürzer  $(f, \varphi)$ , so daß also

$$(f, \varphi) = (f, \varphi; \Gamma) = (f(\tau), \varphi(\tau); \Gamma) = W_r(f, \varphi; \mathfrak{R}).$$

Das damit erklärte Skalarprodukt genügt den folgenden Relationen:

$$(91) \quad (\varphi, f; \Gamma) = \overline{(f, \varphi; \Gamma)};$$

$$(92) \quad \left( \sum_{j=1}^n x_j f_j, \sum_{k=1}^v \xi_k \varphi_k; \Gamma \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^v x_j \bar{\xi}_k (f_j, \varphi_k; \Gamma),$$

wenn die  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v$  beliebige komplexe Konstante bedeuten und entweder alle  $f_j(\tau)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) oder alle  $\varphi_k(\tau)$  ( $1 \leq k \leq v$ ) ganze Spitzenformen (und alle vorkommenden Funktionen ganze Formen)  $\{\Gamma, -r, v\}$  sind;

$$(93) \quad \begin{aligned} (\varphi, \varphi; \Gamma) &\geq 0 \quad \text{für jede ganze Spitzenform } \varphi(\tau) \in \{\Gamma, -r, v\}, \\ (\varphi, \varphi; \Gamma) &= 0 \quad \text{dann und nur dann, wenn } \varphi(\tau) \text{ identisch verschwindet;} \end{aligned}$$

$$(94) \quad (f|S, \varphi|S; S^{-1}\Gamma S) = (f, \varphi; \Gamma),$$

wenn  $S$  eine reelle zweireihige Matrix der Determinante Eins bezeichnet.

Wir nennen  $f$  und  $\varphi$  zueinander orthogonal oder aufeinander senkrecht (bezüglich  $\Gamma$ ), in Zeichen

$$f \perp \varphi, \text{ wenn } (f, \varphi; \Gamma) = 0$$

ist. Diese Beziehung ist nach (91) in  $f$  und  $\varphi$  symmetrisch. Sind  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}_0$  zwei Mengen von ganzen Formen  $\{\Gamma, -r, v\}$ , und sind überdies die Formen von  $\mathfrak{M}_0$  sämtlich Spitzenformen, so nennen wir  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}_0$  zueinander orthogonal oder aufeinander senkrecht (in Zeichen  $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{M}_0$ ), wenn

$$f \perp f_0 \text{ für jedes } f \text{ aus } \mathfrak{M} \text{ und für jedes } f_0 \text{ aus } \mathfrak{M}_0.$$

Der Begriff des Skalarprodukts existiert in der angegebenen Bedeutung insbesondere auch für  $r = 2, v = 1$ . Um die Metrisierung auf die Poincaréschen Reihen der Formenklasse  $\{\Gamma(N), -2, 1\}$  anzuwenden, betrachten wir die Funktionen

$$G_{-2}(s, \tau, A, N|F)$$

unter den Voraussetzungen (76) und kombinieren sie mit einer ganzen Spitzenform  $\varphi(\tau) \in \{\Gamma(N), -2, 1\}$  durch das Integral

$$(95) \quad W_{2+\frac{1}{2}}(\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \mathfrak{B}),$$

wo  $\mathfrak{B}$  einen zulässigen Bereich (in bezug auf die Gruppe  $\Gamma(N)$ ) darstellt. Die Existenz dieses Integrals ist nach Satz 8 offenkundig, wenn die Punkte von  $\mathfrak{B}$  einen positiven Minimalabstand von der reellen Achse besitzen. Bezeichnet ferner  $\mathfrak{B}$  einen zulässigen Bereich von der Art, daß  $S^{-1}\mathfrak{B}$  ( $S \in \Gamma(1)$ ) die soeben genannte Eigenschaft hat, so ergibt sich die Existenz des Ausdrucks (95) aus der Transformationsformel

$$(96) \quad \begin{aligned} W_{2+\frac{1}{2}}(\varphi(\tau) | S, G_{-2}(s, \tau, AS, N|F); S^{-1}\mathfrak{B}) \\ = W_{2+\frac{1}{2}}(\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Daher existiert (95) für jeden zulässigen Bereich  $\mathfrak{B}$ , und es gilt für alle  $L$  aus  $\Gamma$ :

$$(97) \quad \begin{aligned} W_{2+\frac{1}{2}}(\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); L\mathfrak{B}) \\ = W_{2+\frac{1}{2}}(\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Demgemäß erklären wir das Skalarprodukt von  $\varphi(\tau)$  mit  $G_{-2}(s, \tau, A, N|F)$  durch

$$(97a) \quad (\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \Gamma(N)) = W_{2+\frac{1}{2}}(\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \mathfrak{R}),$$

wo  $\mathfrak{R}$  irgendeinen zulässigen Fundamentalbereich von  $\Gamma(N)$  bezeichnet. Für dieses Skalarprodukt gelten die (85) und (94) entsprechenden Gleichungen, die zweite nach (96) in der Gestalt

$$(98) \quad \begin{aligned} (\varphi(\tau) | S, G_{-2}(s, \tau, AS, N|F); \Gamma(N)) \\ = (\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \Gamma(N)) \quad (S \in \Gamma(1)) \end{aligned}$$

Aus Satz 9 geht hervor, daß dieses Skalarprodukt eine stetige Funktion von  $s$  ist, wenn, wie es im folgenden stets der Fall sein soll, die Voraussetzungen (76) für  $s$  zutreffen. Das ergibt sich durch eine Wiederholung des soeben gezogenen Schlusses: Die Stetigkeit der Funktion (95) in der Variablen  $s$  folgt zunächst aus Satz 9 für einen zulässigen Bereich  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\infty$ , der von der reellen Achse einen positiven Minimalabstand hat, und daher ist die Funktion (95) nach (96) auch dann stetig, wenn  $S^{-1} \mathfrak{B}$  ( $S \in \Gamma(1)$ ) die soeben genannte Eigenschaft aufweist.

Zum Beweis der Stetigkeit für einen zulässigen Bereich  $\mathfrak{B}_\infty$  bedient man sich der Zerlegung

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathfrak{B}_\infty} \varphi(\tau) \left\{ G_{-2}(s, \tau, A, N|F) y^{\frac{s}{2}} - G_{-2}(s_0, \tau, A, N|F) y^{\frac{s_0}{2}} \right\} dx dy \\ &= \iint_{\mathfrak{B}_\infty} \varphi(\tau) \left( y^{\frac{s}{2}} - y^{\frac{s_0}{2}} \right) G_{-2}(s, \tau, A, N|F) dx dy \\ &+ \iint_{\mathfrak{B}_\infty} \varphi(\tau) \{ G_{-2}(s, \tau, A, N|F) - G_{-2}(s_0, \tau, A, N|F) \} y^{\frac{s_0}{2}} dx dy, \end{aligned}$$

in der über  $s$  und  $s_0$  die Voraussetzungen

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0, \quad \operatorname{Re} s_0 \geq -\frac{1}{2} + \alpha_0 \quad (\alpha_0 > 0)$$

gemacht werden. Das zweite Integral auf der rechten Seite strebt ersichtlich mit  $s - s_0$  gegen Null. Das erste Integral wird zweckmäßig nach dem Schema

$$\iint_{\mathfrak{B}_\infty} = \iint_{\substack{\mathfrak{B}_\infty \\ y \leq h}} + \iint_{\substack{\mathfrak{B}_\infty \\ y \geq h}}$$

weiterzerlegt. Wegen der Beschränktheit von  $G_{-2}(s, \tau, A, N|F)$  auf  $\mathfrak{B}_\infty$  strebt  $\iint_{\substack{\mathfrak{B}_\infty \\ y \leq h}}$  gleichmäßig für alle  $s, s_0$  mit  $\frac{1}{h}$  gegen Null.

Aus der damit bewiesenen Stetigkeit des Skalarprodukts (97a) ergibt sich insbesondere die Limesbeziehung

$$(99) \quad \lim_{s \rightarrow 0} (\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \Gamma(N)) = (\varphi(\tau), G_{-2}(\tau, A, N|F); \Gamma(N)).$$

Nach dem Grenzübergang erscheint gelegentlich (nämlich für  $\beta_0 = F(0) \neq 0$ ) eine nicht analytische „Modulform“ in der Gestalt  $G_{-2}(\tau, A, N|F)$  als Faktor eines Skalarprodukts.

Zur Anwendung der Metrisierung auf die Poincaréschen Reihen benötigt man noch eine Aussage über das Anwachsen der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -\tau, v\}$  bei Annäherung an die reelle Achse.

**Satz 10.** Es sei  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe von erster Art, mit parabolischen Substitutionen oder ohne solche,  $r > 0$ ,  $v$  ein Multiplikatorsystem zu  $\Gamma$  und  $-\tau$ , das nur Werte des Betrages Eins annimmt,  $\varphi(\tau)$  eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -\tau, v\}$ . Dann gilt mit einer nur von  $\varphi(\tau)$  abhängigen Konstanten  $C_{20}$ :

$$|\varphi(\tau)| \leq C_{20} y^{-\frac{r}{2}} \quad (\tau = x + iy, x \text{ reell}, y > 0).$$

**Beweis.** Die Funktion  $|\varphi(\tau)| y^{\frac{r}{2}}$  ist gegenüber den Substitutionen von  $\Gamma$  absolut invariant und offenbar in einem abgeschlossenen Fundamentalbereich  $\mathfrak{R}$  von  $\Gamma$  beschränkt. Daher ist sie auf der Vereinigung aller Bereiche  $L\mathfrak{R}$  ( $L \subset \Gamma$ ) beschränkt, q. e. d. <sup>7a)</sup>

**Satz 11.** Es sei in den Bezeichnungen von Satz 10 und (82):

$$\varphi(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n+s \geq 0} b_n e^{\frac{2\pi i(n+s)\tau}{N}}.$$

Dann gilt mit einer nur von  $\varphi(\tau)$  abhängigen Konstanten  $C_{21}$ :

$$|b_n| \leq C_{21} n^{\frac{r}{2}} \quad (n > 0).$$

**Beweis** nach Satz 10 und der Formel

$$(99a) \quad b_n = \int_{\alpha}^{\alpha+N'} \varphi_A(\tau) e^{-\frac{2\pi i(n+s)\tau}{N}} \frac{d\tau}{N'},$$

die mit  $\alpha = \frac{1}{n+s}$  anzuwenden ist.

(§ 4).

## 2. Beweis der Grundformeln.

Im gegenwärtigen Abschnitt und im folgenden § 5 sei  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Substitutionen und dem parabolischen Fixpunkt  $\tau = \infty$ ,  $r \geq 2$ ,  $v$  ein Multiplikatorsystem zu  $\Gamma$  und  $-\tau$ , das nur Werte des Betrages Eins annimmt; wenn  $r = 2$  ist, sei  $\Gamma = \Gamma(N)$  und  $v = 1$ .

Wir setzen

$$G_{-2}(\tau, A, N|F) = G_{-2}(0, \tau, A, N|F) = G_{-2}(0, \tau, \tau, A, N|F)$$

und bezeichnen gelegentlich den Betrag  $|\varphi(\tau)|$  einer in § stetigen Funktion  $f(\tau)$  mit  $\hat{f}(\tau)$  oder kürzer mit  $\hat{f}$ .

<sup>7a)</sup> Diesen ungemein einfachen Beweis verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Hecke.

Die Aufgabe dieses Abschnitts ist die folgende: Es sei  $\varphi(\tau)$  eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r, v\}$ ; man berechne die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} (\varphi(\tau), G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F); \Gamma) & \quad (r > 2), \\ (\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \Gamma(N)). & \quad (r = 2, \sigma > 0). \end{aligned}$$

Dabei genügt es, nach (85), (94) und (98) den Fall  $A = I$  auf Grund des Poissonschen Summationsverfahrens ausführlich zu behandeln. Zur Vereinfachung der Bezeichnung setzen wir abkürzend

$$G(\tau, F) = G_{-r}(\tau, v, I, \Gamma|F), \quad G(s, \tau, F) = G_{-2}(s, \tau, I, N|F),$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(I, \Gamma) \text{ bzw. } \mathfrak{S}(I, \Gamma(N)), \quad \theta(\tau) = e^{2\pi i \frac{\tau}{N}} F\left(e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}\right), \quad \bar{v}(M) = \overline{v(M)} \quad (M \subset \mathfrak{S}),$$

$$P(\varphi, F) = (\varphi(\tau), G(\tau, F); \Gamma), \quad P(s, \varphi, F) = (\varphi(\tau), G(s, \tau, F); \Gamma(N)).$$

Hier haben  $\kappa$  und  $N$  die Bedeutung von  $\kappa$  und  $N'$  aus (82) für  $A = I$ .

In diesen Bezeichnungen schreiben sich  $G(\tau, F)$  und  $G(s, \tau, F)$  nach (79) als

$$\begin{aligned} G(\tau, F) &= \sum_{M \subset \mathfrak{S}} \bar{v}(M) \theta(\tau) | M & (r > 2), \\ G(s, \tau, F) &= \sum_{M \subset \mathfrak{S}} \theta(\tau) \Big|_{(\alpha, s)} M & (r = 2, \kappa = 0, \sigma > 0), \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$(100a) \quad P(\varphi, F) = W_r \left( \varphi(\tau), \sum_{M \subset \mathfrak{S}} \bar{v}(M) \theta(\tau) | M; \mathfrak{R} \right),$$

$$(100b) \quad P(s, \varphi, F) = W_{2+\frac{\sigma}{2}} \left( \varphi(\tau), \sum_{M \subset \mathfrak{S}} \theta(\tau) \Big|_{(\alpha, s)} M; \mathfrak{R} \right),$$

wo  $\mathfrak{R}$  irgendeinen zulässigen Fundamentalbereich der betreffenden Gruppe darstellt.

Das erste Ziel der folgenden Umformungen besteht in der Vertauschung der Summe über  $M$  mit dem Funktionszeichen  $W_r$  bzw.  $W_{2+\frac{\sigma}{2}}$ . Wir bemerken zunächst, daß die Doppelintegrale

$$(101) \quad W_r(\varphi(\tau), \bar{v}(M) \theta(\tau) | M; \mathfrak{R}) \text{ und } W_{2+\frac{\sigma}{2}}(\varphi(\tau), \theta(\tau) \Big|_{(\alpha, s)} M; \mathfrak{R})$$

existieren und nach (89) wegen

$$\varphi(\tau) = \bar{v}(M) \varphi(\tau) | M \quad [(84)], \quad \mathfrak{R} = M^{-1} M \mathfrak{R}$$

die Werte

$$W_r(\varphi(\tau), \theta(\tau); M \mathfrak{R}) \text{ bzw. } W_{2+\frac{\sigma}{2}}(\varphi(\tau), \theta(\tau); M \mathfrak{R})$$

aufweisen. Zerlegt man die Summe über die  $M$  aus  $\mathfrak{S}$  auf der rechten Seite von (100) in eine endliche Teilsumme ( $M \subset \mathfrak{E}$ ) und den unendlichen Rest ( $M \subset \mathfrak{S} - \mathfrak{E}$ ), so zerfallen  $P(\varphi, F)$  und  $P(s, \varphi, F)$  additiv in die entsprechen-

den beiden Bestandteile, und man kann die Vertauschung für den mit  $M \subset \mathfrak{E}$  gebildeten Bestandteil ausführen. Die Vertauschung der vollen Summe ( $M \subset \mathfrak{S}$ ) mit den Funktionszeichen  $W_r$  und  $W_{2+\frac{\sigma}{2}}$  ist gerechtfertigt, wenn nachgewiesen wird, daß die mit den  $M \subset \mathfrak{S} - \mathfrak{E}$  gebildeten Bestandteile dem Betrage nach kleiner als  $\varepsilon$  werden, sobald  $\mathfrak{E}$  ein gewisses, von  $\varepsilon$  abhängiges Teilsystem  $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0(\varepsilon)$  von  $\mathfrak{S}$  umfaßt.

Zu diesem Zweck bezeichne  $\mathfrak{I}$  irgendein (echtes oder unechtes) nicht leeres Teilsystem eines Systems  $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ , wo  $A^{-1} \infty$  parabolische Spitze einer Gruppe  $\Gamma$  sei, und  $R(\tau, \mathfrak{I})$  für festes  $\varrho > 2$  den Ausdruck

$$R(\tau, \mathfrak{I}) = \sum_{\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}} |m_1 \tau + m_2|^{-\varrho}$$

Er genügt für jede reelle zweireihige Matrix  $S$  der Determinante Eins der Transformationsgleichung

$$(102) \quad R(\tau, \mathfrak{I}) \Big|_{(S)} S = R(\tau, \mathfrak{I} S).$$

Aus den Konvergenzbetrachtungen in (G V), § 2, 1 folgt die Existenz von

$$(103) \quad W_r(\widehat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{I}); \mathfrak{B}) (\varrho = r) \text{ und von } W_{2+\frac{\sigma}{2}}(\widehat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{I}); \mathfrak{B}) (\varrho = 2 + \sigma)$$

zunächst für  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{S}$  und für jeden zulässigen Bereich  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\infty$ , der von der reellen Achse einen positiven Minimalabstand besitzt. Ist  $\zeta = S^{-1} \infty$  eine parabolische Spitze von  $\Gamma$  ( $S$  reell mit  $\|S\| = 1$ ;  $S \in \Gamma(1)$ , wenn  $r = 2$ ) und  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\zeta$  ein zulässiger Bereich von der Art, daß  $S\mathfrak{B}_\zeta$  die soeben genannte Eigenschaft hat, so gilt nach (83a), (89), (102) für jedes  $r > 2$ :

$$(104) \quad W_r(\widehat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{I}); \mathfrak{B}) \\ = W_r(\widehat{\varphi}_S(\tau), R(\tau, \mathfrak{I} S^{-1}); S\mathfrak{B}) (\varrho = r \text{ oder } = 2r - 2),$$

und damit ist die Existenz der Ausdrücke (103) für einen beliebigen zulässigen Bereich  $\mathfrak{B}$  nachgewiesen. [Daß die Voraussetzungen der Konvergenzbeweise von (G V), § 2, 1 für jedes  $R(\tau, \mathfrak{I} S)$  mit  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{S}$  und beliebigem  $S$  zutreffen, beruht auf der mengentheoretischen Beziehung  $\mathfrak{S} S = S S^{-1} \mathfrak{S} S$  und der Tatsache, daß für jede Matrix  $S$  in (102) der Punkt  $S^{-1} \infty$  parabolischer Fixpunkt der Gruppe  $S^{-1} \Gamma S$  ist.]

Das soeben dargestellte Transformationsverfahren erweist erstens von neuem die Existenz der Doppelintegrale (101), zweitens die Existenz einer positiven, nur von  $\mathfrak{B}$ ,  $\varphi(\tau)$ ,  $\Gamma$  und  $r$  abhängigen Konstanten  $C_{22}$  derart, daß für jeden zulässigen Bereich  $\mathfrak{B}$  und für  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{S}$

$$(105) \quad W_r(\widehat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{I}); \mathfrak{B}) \leq W_r(\widehat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{S}); \mathfrak{B}) \leq C_{22} \\ (r > 2, \varrho = r \text{ oder } = 2r - 2).$$

drittens zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  die Existenz eines endlichen Teilsystems  $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0(\varepsilon)$  von  $\mathfrak{S}$  derart, daß für  $\mathfrak{I} = \mathfrak{S} - \mathfrak{E}_0$ ,  $\mathfrak{E} \supset \mathfrak{E}_0$ :

$$(106) \quad W_r(\hat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{I}); \mathfrak{B}) < \varepsilon \quad (r > 2, \varrho = r \text{ oder } 2r - 2),$$

und viertens die absolute Konvergenz der Summen, die aus den rechten Seiten von (100) durch Vertauschung der Zeichen  $\sum_{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}}$  und  $W_r$  bzw.  $W_{2+\frac{\sigma}{2}}$  entstehen.

Zum Beweis von (106) zerlegt man  $\mathfrak{B}$ , wie beim Transformationsverfahren ausgeführt, in die endlich vielen zulässigen Bereiche  $\mathfrak{B}_\zeta$ , deren jeder einer der  $h$  Spitzen  $\zeta$  von  $\mathfrak{B}$  in der dort angegebenen Weise zugeordnet ist. Dann existiert zu dem gegebenen  $\varepsilon > 0$  und zu jeder Spitze  $\zeta$  ein endliches Teilsystem  $\mathfrak{E}_0(\varepsilon, \zeta) \subset \mathfrak{S}$  mit

$$W_r(\hat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{I}); \mathfrak{B}_\zeta) < \varepsilon, \text{ wenn } \mathfrak{I} \subset \mathfrak{S} - \mathfrak{E}_0(\varepsilon, \zeta).$$

Daher gilt (106), wenn  $\mathfrak{E}_0(\varepsilon)$  mit der Vereinigung der  $h$  Systeme  $\mathfrak{E}_0(\frac{\varepsilon}{h}, \zeta)$  identifiziert wird.

Die behauptete Konvergenzaussage folgt aus den Abschätzungen

$$\sum_{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}} |W_r(\varphi(\tau), \bar{v}(M) \theta(\tau) | M; \mathfrak{B})| \leq W_r(\hat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{E}); \mathfrak{B}) \leq C_{22} \quad (r > 2),$$

$$\sum_{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}} |W_{2+\frac{\sigma}{2}}(\varphi(\tau), \theta(\tau) | M; \mathfrak{B})| \leq W_{2+\frac{\sigma}{2}}(\hat{\varphi}(\tau), R(\tau, \mathfrak{E}); \mathfrak{B}) \leq C_{22},$$

$$(\sigma > 0, \varrho = 2 + \sigma),$$

wo  $\mathfrak{E}$  eine beliebige endliche Teilmenge von  $\mathfrak{S}$  bezeichnet.

Diese Überlegungen zeigen, daß die Skalarprodukte  $P(\varphi, F)$  und  $P(s, \varphi, F)$  gemäß

$$P(\varphi, F) = \sum_{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}} W_r(\varphi(\tau), \theta(\tau); M\mathfrak{R}),$$

$$P(s, \varphi, F) = \sum_{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}} W_{2+\frac{\sigma}{2}}(\varphi(\tau), \theta(\tau); M\mathfrak{R})$$

durch absolut konvergente Summen von lauter Integralen mit dem gleichen Integranden dargestellt werden. Jede dieser Summen läßt sich, wie nun ausgeführt werden soll, bei passender Wahl von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{S}$  zu einem einzigen Integral über einen Vertikalhalbstreifen der Breite  $N$  zusammenfassen.

Um dies einzusehen, verstehen wir nun unter  $\mathfrak{R}$  einen kanonischen Fundamentalbereich von  $\Gamma$ , der an die Spitze  $\tau = \infty$  von  $\Gamma$  anstößt und den wir hier stets als abgeschlossen voraussetzen. Nach (G I), § 2, 3 füllt  $\mathfrak{R}$  in hinreichender Höhe ( $y \geq h_0$ ) über der reellen Achse einen Vertikalhalbstreifen  $\xi \leq x \leq \xi + N$ ,  $y \geq h_0$  genau aus. Dabei kann  $\xi$  auf Grund der

genannten Konstruktion willkürlich gewählt werden. Wir legen  $\xi$  in eine endliche Spitze  $\xi = L_0^{-1} \infty$  ( $L_0 \subset \Gamma$ ) von  $\Gamma$  und betrachten die Vertikalhalbgerade  $\mathfrak{h}$ , gegeben durch  $x = \xi$ ,  $y \geq 0$ . Von dieser liegt eine gewisse Teilstrecke  $0 < y < \lambda$  ( $\lambda > 0$ ) ganz im Innern eines Bereiches  $L\mathfrak{R}$  ( $L \subset \Gamma$ ), oder sie ist Teil des gemeinsamen Randes von genau zwei Bereichen  $L_1\mathfrak{R}$  und  $L_2\mathfrak{R}$  ( $L_1, L_2 \subset \Gamma$ ). Ein anderes Teilstück von  $\mathfrak{h}$ , gegeben durch  $y > h_0$ , ist bestimmt Teil des gemeinsamen Randes von genau zwei solchen Bereichen, nämlich  $\mathfrak{R}$  und  $U^{-N}\mathfrak{R}$ . Die Teilstrecke  $\lambda \leq y \leq h_0$  hat mit höchstens endlich vielen Bereichen  $L\mathfrak{R}$  ( $L \subset \Gamma$ ) Punkte gemein.

Der Punkt  $\tau_1 = \xi + \frac{N}{2} + \beta + iy_1$  ( $|\beta| \leq \frac{N}{3}$ ) liegt für hinreichend hohes  $y_1$  und passend gewähltes reelles  $\beta$  im Innern von  $\mathfrak{R}$  und auf keiner der Geraden  $L\mathfrak{h}$  ( $L \subset \Gamma$ ) [(G I), Satz 2]. Die Menge aller  $M$  aus  $\Gamma$  mit  $\xi < \Re M\tau_1 < \xi + N$  bildet genau ein vollständiges System  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ , das nunmehr fest gewählt werde. Von den Bereichen  $M\mathfrak{R}$  ( $M \in \mathfrak{S}$ ) befinden sich alle bis auf endlich viele Ausnahmen vollständig im Vertikalhalbstreifen  $\xi \leq x \leq \xi + N$ ,  $y \geq 0$ ; aus jedem von ihnen (ohne Ausnahme) liegt ein innerer Punkt, nämlich  $M\tau_1$ , im Innern des Halbstreifens. Ist  $M\mathfrak{R}$  einer der endlich vielen Ausnahmebereiche, so reduziere man seine endlich vielen, von den Randgeraden  $\mathfrak{h}$  und  $U^N\mathfrak{h}$  des Streifens abgeschnittenen Teilstücke durch wiederholte Translationen  $U^{\pm N}$  in den Streifen hinein. Dadurch verwandelt sich, wenn man alle Teilstücke abschließt,  $M\mathfrak{R}$  in einen zulässigen Fundamentalbereich  $\mathfrak{R}_M$ . Ist  $M\mathfrak{R}$  kein Ausnahmebereich, so sei  $\mathfrak{R}_M = M\mathfrak{R}$ . Wählt man schließlich noch von zwei Matrizen  $M \in \mathfrak{S}$ , die sich nur um den Faktor  $-I$  unterscheiden, eine aus und faßt die ausgewählte zu dem System  $\mathfrak{S}^*$  zusammen, so erkennt man: Die Vereinigung  $\mathfrak{R}_M$  ( $M \in \mathfrak{S}^*$ ) bedeckt den Vertikalhalbstreifen  $\mathfrak{B}$ , gegeben durch  $\xi \leq x \leq \xi + N$ ,  $y > 0$  lückenlos und bis auf Randkoinzidenzen einfach; die Vereinigung enthält außer  $\mathfrak{B}$  nur noch die Spitzen  $\infty$  und  $\zeta$  von  $\Gamma$  mit  $\xi \leq \zeta \leq \xi + N$ . Für  $\Gamma = \Gamma(N)$  ( $N > 2$ ) besteht diese Aussage mit  $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$ , die anderen hier betrachteten Gruppen enthalten die Matrix  $-I$ , und daher liegt mit einer Matrix  $M$  auch  $-M$  in  $\mathfrak{S}$ .

Da  $\varphi(\tau)$  und  $\theta(\tau)$  bei Anwendung von  $U^N$  beide den Faktor  $e^{2\pi i x}$  aufnehmen, gilt

$$(107) \quad \begin{aligned} P(\varphi, F) &= 2 \sum_{M \in \mathfrak{S}^*} W_r(\varphi(\tau), \theta(\tau); \mathfrak{R}_M), \\ P(g, \varphi, F) &= s_1(N) \sum_{M \in \mathfrak{S}^*} W_{2+\frac{r}{2}}(\varphi(\tau), \theta(\tau); \mathfrak{R}_M). \end{aligned}$$

Wir behaupten

$$(108) \quad P(\varphi, F) = 2 \iint_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) e^{-2\pi i \tau \frac{\bar{y}}{N}} \bar{F} \left( e^{-2\pi i \frac{\bar{y}}{N}} \right) y^r \frac{dx dy}{y^2},$$

$$P(s, \varphi, F) = \varepsilon_1(N) \iint_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) \bar{F} \left( e^{-2\pi i \frac{\bar{y}}{N}} \right) y^{\frac{s}{2}} dx dy,$$

wo

$$\bar{F}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{\beta}_r z^r.$$

Zum Beweis verstehen wir unter  $\mathfrak{B}_\lambda$  den Halbstreifen  $\xi \leq x \leq \xi + N$ ,  $y > \lambda$  ( $\lambda \geq 0$ ), unter  $D_\lambda$  die beiden Integrale, deren Integranden mit den Integranden auf der rechten Seite von (108) übereinstimmen, und die über  $\mathfrak{B}_\lambda$  erstreckt werden, unter  $H(\mathfrak{T})$  die beiden Summen, deren Summanden mit den Summanden auf der rechten Seite von (107) übereinstimmen, und die über ein Teilsystem  $\mathfrak{T}$  von  $\mathfrak{S}^*$  erstreckt werden. (Dabei sollen sich natürlich die Symbole  $D_\lambda$  und  $H(\mathfrak{T})$ , sobald sie zusammen auftreten, auf den gleichen Integranden beziehen.) Ferner bezeichnen wir mit  $\mathfrak{E}_\lambda$  ( $\lambda \geq 0$ ) die Menge derjenigen  $M$  aus  $\mathfrak{S}^*$ , für die  $\mathfrak{R}_M$  einen Punkt mit  $\mathfrak{B}_\lambda$  gemein hat.

Offenbar ist  $\mathfrak{E}_\lambda$  eine endliche Menge. Nennt man nämlich  $\varrho_0$  die nach (G I), Satz 2 positive untere Grenze der  $|m_1| \neq 0$  mit

$$\underline{M} = \{m_1, m_2\}, \quad M \subset \sum_A \Gamma A^{-1},$$

wo  $A$  eine reelle Matrix der Determinante Eins darstellt und  $A^{-1} \infty$  die sämtlichen Spitzen von  $\mathfrak{R}$  durchläuft, so ergibt sich mit  $M = LA^{-1}$  ( $L \subset \Gamma$ ):

$$\Im M L \tau = \Im L A^{-1}(A \tau) = \frac{\Im A \tau}{|m_1 A \tau + m_2|^2} \leq \frac{1}{\varrho_0 |m_1 A \tau + m_2|}.$$

Über die Mengen  $\mathfrak{E}_\lambda$  gilt ferner:

1.  $\mathfrak{E}_{\lambda'} \subset \mathfrak{E}_\lambda$ , wenn  $0 < \lambda < \lambda'$ .
2. Die Vereinigung aller  $\mathfrak{E}_\lambda$  mit  $\lambda > 0$  ist  $\mathfrak{S}^*$ .

Nun folgt aus Satz 10 zunächst die Existenz von  $D_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} D_\lambda$ . Sei weiter  $0 < \lambda < 1$ . Dann umfaßt die Vereinigung der  $\mathfrak{R}_M$  mit  $M \in \mathfrak{E}_\lambda$  den Streifen  $\mathfrak{B}_\lambda$ , und es existiert deshalb zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$  derart, daß

$$|D_0 - D_\lambda| < \varepsilon, \quad |H(\mathfrak{E}_\lambda) - D_\lambda| < \varepsilon$$

für jedes  $\lambda$  mit  $0 < \lambda \leq \lambda_0(\varepsilon)$  zutrifft. Wenn nun  $\mathfrak{E}$  eine endliche Teilmenge von  $\mathfrak{S}^*$  darstellt, welche  $\mathfrak{E}_{\lambda_0(\varepsilon)}$  umfaßt, so gilt ebenfalls  $|H(\mathfrak{E}) - D_{\lambda_0(\varepsilon)}| < \varepsilon$ . Daher gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $\mathfrak{E}_0(\varepsilon) = \mathfrak{E}_{\lambda_0(\varepsilon)}$  von  $\mathfrak{S}^*$  derart, daß für jede endliche Menge  $\mathfrak{E}$  mit  $\mathfrak{E}_0(\frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathfrak{E} \subset \mathfrak{S}^*$  die Ungleichung

$$|D_0 - H(\mathfrak{E})| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Wir haben also bewiesen:

$$P(\varphi, F) = 2 \iint_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) e^{-2\pi i \tau \frac{\bar{y}}{N}} \bar{F}\left(e^{-2\pi i \tau \frac{\bar{y}}{N}}\right) y^{\frac{1}{2}} \frac{dx dy}{y^2} = 2 W_r(\varphi, \vartheta; \mathfrak{B}),$$

$$P(s, \varphi, F) = s_1(N) \iint_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) \bar{F}\left(e^{-2\pi i \tau \frac{\bar{y}}{N}}\right) y^{\frac{s}{2}} dx dy = s_1(N) W_{s+\frac{1}{2}}(\varphi, \vartheta; \mathfrak{B}).$$

Hier wird, obwohl  $\mathfrak{B}$  kein zulässiger Bereich ist, die Schreibweise (87) angewendet, weil es sich um die Darstellung absolut konvergenter Integrale handelt.

Die Umformung der Skalarprodukte  $P(\varphi, F)$  und  $P(s, \varphi, F)$  läßt sich jetzt mühelos zu Ende führen. Zunächst findet man

$$W_r(\varphi, \vartheta; \mathfrak{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\rho}_n W_r(\varphi, \vartheta, ; \mathfrak{B}) \quad (r > 2, \text{ bzw. } r = 2 + \frac{\sigma}{2}, \sigma > 0),$$

wo  $\vartheta_r(\tau)$  die mit  $F(z) = R_r(z) = z^r$  ( $z \geq 0$ ) gebildete Funktion

$$\vartheta_r(\tau) = \vartheta_r(\tau) = e^{\frac{2\pi i (r+x)}{N} \frac{y}{N}}$$

bezeichnet. Aus der Fourierentwicklung

$$\varphi(\tau) = \sum_{n+x>0} b_n e^{\frac{2\pi i (n+x)}{N} \frac{y}{N}}$$

erhält man weiter für jedes  $\lambda > 0$  und mit  $\varrho = r - 2$  bzw.  $\varrho = \frac{\sigma}{2}$ :

$$\begin{aligned} W_r(\varphi, \vartheta, ; \mathfrak{B}_1) &= \sum_{n+x>0} b_n \iint_{\mathfrak{B}_1} e^{\frac{2\pi i (n-v)}{N} \frac{x}{N} - 2\pi i (n+v+2x) \frac{y}{N}} y^{\frac{1}{2}} dx dy \\ &= N b_r \int_1^{\infty} e^{-4\pi i (v+x) \frac{y}{N}} y^{\frac{1}{2}} dy \quad (= 0 \text{ für } v+x=0), \end{aligned}$$

$$W_r(\varphi, \vartheta, ; \mathfrak{B}) = \Gamma(\varrho + 1) \frac{N^{\varrho+2}}{(4\pi(v+x))^{\varrho+1}} b_r \quad (v+x > 0),$$

$$W_r(\varphi, \vartheta, ; \mathfrak{B}) = 0 \quad (v+x = 0).$$

Damit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(109) \quad (\varphi(\tau), G_{-r}(\tau, v, I, \Gamma, v); \Gamma) = 2 \frac{\Gamma(r-1)}{(4\pi)^{r-1}} N^r \frac{b_r}{(v+x)^{r-1}} \\ (= 0 \text{ für } v+x=0),$$

$$(110) \quad (\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, I, N, v); \Gamma(N)) = \varepsilon_1(N) \frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{(4\pi)^{1+\frac{s}{2}}} N^{2+\frac{s}{2}} \frac{b_r}{v^{1+\frac{s}{2}}} \\ (= 0 \text{ für } v=0),$$

$$(111) \quad (\varphi(\tau), G_{-r}(\tau, v, I, \Gamma|F); \Gamma) = 2 \frac{\Gamma(r-1)}{(4\pi)^{r-1}} N^r \sum_{v+x>0} \bar{b}_r b_r (v+x)^{1-r},$$

$$(112) \quad (\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, I, N|F); \Gamma(N)) = \varepsilon_1(N) \frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{(4\pi)^{1+\frac{s}{2}}} N^{2+\frac{s}{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \bar{b}_r b_r v^{-1-\frac{s}{2}}$$

Schließlich sei  $\zeta = A^{-1} \infty$  eine parabolische Spitze von  $\Gamma$  und in den Bezeichnungen (82)

$$(113) \quad \varphi(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n+s>0} b_n(A) e^{\frac{2\pi i(n+x)A\tau}{N}}$$

Dann gilt nach (80), (83a), (85), (94) und (111):

$$(114) \quad (\varphi(\tau), G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F); \Gamma) = e_r(v, A, \Gamma) \sum_{v+x>0} \bar{b}_r b_r(A) (v+x)^{1-r} \\ \text{mit *)}$$

$$e_r = e_r(v, A, \Gamma) = 2 \frac{\Gamma(r-1)}{(4\pi)^{r-1}} N^{r'} v(A),$$

ferner nach (31), (98) und (112)

$$(\varphi(\tau), G_{-2}(s, \tau, A, N|F); \Gamma(N)) = e_2(s, N) \sum_{v=1}^{\infty} \bar{b}_r b_r(A) v^{-1-\frac{s}{2}}$$

mit

$$e_2(s) = e_2(s, N) = \varepsilon_1(N) \frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{(4\pi)^{1+\frac{s}{2}}} N^{2+\frac{s}{2}},$$

also nach (99):

$$(115) \quad (\varphi(\tau), G_{-2}(\tau, A, N|F); \Gamma(N)) = e_2(A, \Gamma(N)) \sum_{v=1}^{\infty} \bar{b}_r b_r(A) v^{-1}$$

mit

$$e_2 = e_2(A, \Gamma(N)) = e_2(0, N) = \varepsilon_1(N) \frac{N^2}{4\pi}.$$

\*) In der entsprechenden Formel (J II), S. 55 fehlt der Faktor 2.

Aus (115) geht hervor, daß die Formeln der Theorie  $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ , in denen also die Nullwerte der analytischen Funktionen  $G_{-2}(s; \tau, \tau, A, N|F)$  ( $\tau_0 = \tau$ ) von  $s$  an die Stelle der für  $r > 2$  absolut konvergenten Poincaréschen Reihen treten, durch formale Spezialisierung aus den entsprechenden Formeln für  $r > 2$  entstehen.

Aus Satz 11 und den Voraussetzungen über die  $\beta$ , ergibt sich die absolute Konvergenz der Reihen auf den rechten Seiten von (114), (115). Diese Gleichungen (114), (115) bezeichnen wir als die Grundformeln der Theorie.

### § 5.

#### Anwendung der Metrisierung auf die Poincaréschen Reihen.

Die erste Anwendung besteht in dem Beweis des folgenden Satzes:

**Satz 12.** *Es sei  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Substitutionen,  $r \geq 2$ ,  $v$  ein Multiplikatorsystem zu  $\Gamma$  und  $-r$ , das nur Werte vom Betrage Eins annimmt; wenn  $r = 2$  ist, so sei  $\Gamma = \Gamma(N)$  und  $v = 1$ . Es bezeichne  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  die Schar der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r, v\}$ ,  $\mathfrak{E}$  die Schar, die aus den analytischen Linearkombinationen der Eisenstein-Reihen  $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, 0)$  gebildet wird. Dabei durchläuft  $A$  ein System von reellen Matrizen der Determinante Eins derart, daß jede Spitze eines kanonischen Fundamentalbereichs von  $\Gamma$ , für die in den Bezeichnungen (82)  $x$  verschwindet, einmal und nur einmal in der Gestalt  $A^{-1} \infty$  erscheint. Für  $r = 2$  ist*

$$G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, 0) = G_{-2}(\tau, A, N, 0),$$

und  $A$  kann aus  $\Gamma(1)$  gewählt werden.

Dann steht jede Form aus  $\mathfrak{E}$  auf ganz  $\mathfrak{C}_0$  (d. h. auf allen ganzen Spitzenformen) senkrecht, und  $\mathfrak{E}$  ist durch diese Eigenschaft  $\mathfrak{E} \perp \mathfrak{C}_0$  eindeutig bestimmt.

**Beweis.** Der erste Teil der Behauptung folgt aus den Grundformeln. Sei ferner  $f(\tau)$  eine ganze Form  $\{\Gamma, -r, v\}$ .  $f(\tau)$  besitzt eine eindeutige Zerlegung von der Gestalt

$$f(\tau) = E(\tau) + \varphi(\tau) \quad (E(\tau) \in \mathfrak{E}, \varphi(\tau) \in \mathfrak{C}_0).$$

Ist nun  $f(\tau) \perp \mathfrak{C}_0$ , so gilt nach (92) und (93):

$$0 = (f, \varphi) = (\varphi, \varphi), \quad \varphi(\tau) \equiv 0, \quad f(\tau) = E(\tau) \in \mathfrak{E}, \quad \text{q. e. d.}$$

Nach dieser eindeutigen Kennzeichnung der Schar  $\mathfrak{E}$  untersuchen wir nunmehr nur noch die Schar  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ . Wir führen zu diesem Zweck,

und um den Anschluß an die Entwicklungen des § 1 zu gewinnen, folgende Bezeichnungen ein: Im Sinne von (82) sei für jede Spitze  $\zeta = A^{-1} \infty$  von  $\Gamma$ :

$$\eta = \kappa, \text{ wenn } \kappa > 0, \quad \eta = 1, \text{ wenn } \kappa = 0,$$

$$\begin{aligned} g(\tau, \nu) &= g(\tau, A, \nu) = g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma, \nu) \\ &= (\nu + \eta)^{r-1} G_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma, \nu + [\eta]) \quad (r > 2, \nu \geq 0), \\ (116) \quad g(\tau, \nu) &= g(\tau, A, \nu) = g_{-,2}(\tau, 1, A, \Gamma(N), \nu) \\ &= (\nu + 1)^{r-1} G_{-,2}(0; \tau, \tau, A, N, \nu + 1) \quad (r = 2, \nu \geq 0). \end{aligned}$$

Diese Funktionen genügen den Grundformeln

$$(117) \quad (\varphi(\tau), g(\tau, A, \nu); \Gamma) = e_r b_r(A) \quad (e_r = e_r(\nu, A, \Gamma)),$$

wenn

$$(118) \quad \varphi(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A) e^{\frac{2\pi i(n+\nu)\tau}{N}}.$$

Weiter seien die  $\lambda_\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) komplexe Zahlen derart, daß die Reihe

$$(119) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma, \nu)$$

in irgendeinem in  $\mathfrak{H}$  gelegenen Gebiet, etwa in der Umgebung eines Punktes  $\tau = \tau_0$  aus  $\mathfrak{H}$  konvergiert. Dann zeigt der Hilfsatz in (E), § 1, daß die Reihe (119) für alle  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$  konvergiert, eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r, \nu\}$  darstellt und auf jedem zulässigen Bereich gleichmäßig konvergiert. Wir fassen nun die  $\lambda_\nu$  in

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu z^\nu$$

zusammen und definieren die Poincaréschen Reihen  $g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma|F)$  (auch für  $r = 2$ ) durch

$$(120) \quad g(\tau|F) = g(\tau, A|F) = g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma|F) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu g(\tau, \nu, A, \Gamma, \nu).$$

Für diese neuen Funktionen gelten nach (117) die Grundformeln

$$(121) \quad (\varphi(\tau), g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma|F); \Gamma) = e_r(\nu, A, \Gamma) \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\lambda_\nu} b_r(A).$$

Diese neuen Grundformeln stehen mit den alten Grundformeln (114), (115) in Einklang, wenn in diesen  $F(z)$  durch

$$(122) \quad F^*(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu (\nu + \eta)^{r-1} z^{\nu + [\eta]}$$

ersetzt und angenommen wird, daß dabei die Reihen  $\sum_{r=0}^{\infty} |\beta_r|$  ( $r > 2$ ), bzw.  $\sum_{r=0}^{\infty} |\gamma \beta_r|$  ( $r = 2$ ) konvergieren.

Die neuen Grundformeln ermöglichen die Kennzeichnung der Poincaréschen Reihen  $g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F)$  durch ein formal sehr einfaches Kriterium. Es gilt

**Satz 13.** (Bezeichnungen aus Satz 12.) Es seien die  $\lambda_v$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) komplexe Zahlen derart, daß die unendliche Reihe

$$g(\tau, A|F) = g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v) \quad \left( F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v z^v \right)$$

in einer Umgebung eines Punktes  $\tau = \tau_0$  von  $\mathfrak{H}$  konvergiert. Dann konvergiert diese Reihe für alle  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$ , stellt eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r, v\}$  dar und konvergiert auf jedem zulässigen Bereich gleichmäßig.

Es bezeichne  $\mathfrak{D}(A, F)$  die lineare Schar derjenigen Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$ , deren Entwicklungskoeffizienten  $b_v(A)$  aus (118) die Gleichung

$$(123) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\lambda}_v b_v(A) = 0$$

erfüllen. Dann steht  $g(\tau, A|F)$  auf  $\mathfrak{D}(A, F)$  senkrecht und ist durch diese Eigenschaft bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Insbesondere bezeichne  $\mathfrak{D}_v(A)$  die lineare Schar derjenigen Formen aus  $\mathfrak{C}_0$ , für die  $b_v(A) = 0$  gilt. Dann steht  $g(\tau, A, v)$  auf  $\mathfrak{D}_v(A)$  senkrecht und ist durch diese Eigenschaft bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.  $g(\tau, A|F)$  verschwindet dann und nur dann identisch, wenn alle Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  der Relation (123) genügen.  $g(\tau, A, v)$  verschwindet dann und nur dann identisch, wenn für alle Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  der Entwicklungskoeffizient  $b_v(A)$  verschwindet.

Zum Beweis der Eindeutigkeit bezeichne  $g(\tau)$  irgendeine Form aus  $\mathfrak{C}_0$ ,  $\mathfrak{C}^*$  die Menge der zu  $g(\tau)$  senkrechten Formen von  $\mathfrak{C}_0$ . Ist  $g(\tau) \equiv 0$ , so ist  $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}_0$ ; ist  $g(\tau) \neq 0$ , so liegt  $g(\tau)$  nicht in  $\mathfrak{C}^*$ , wohl aber für jedes  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  die Form

$$\varphi_0(\tau) = \varphi(\tau) - \frac{(\varphi, g)}{(g, g)} g(\tau).$$

Aus  $\varphi(\tau) \perp \mathfrak{C}^*$  folgt dann, da auch  $g(\tau) \perp \mathfrak{C}^*$ , daß  $\varphi_0(\tau) \perp \mathfrak{C}^*$ , also  $(\varphi_0, \varphi_0) = 0$ ,  $\varphi(\tau) = c g(\tau)$  mit konstantem  $c$ .

Die Entwicklungskoeffizienten der Form  $g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F)$  in der Spitze  $B^{-1} \infty$  ( $B$  eine reelle Matrix der Determinante Eins mit  $\underline{B} = \{b_1, b_2\}$ ), der die Zahlen  $N' = N_1$ ,  $\kappa = \kappa_1$  im Sinne von (82) entsprechen mögen, sollen durch

$$g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F) = (b_1 \tau + b_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A, B|F) e^{\frac{2\pi i(n+\kappa_1)}{N_1} \tau}$$

erklärt und genauer mit

$$c_n(v, \Gamma, A, B|F) = c_n(A, B|F)$$

bezeichnet werden. Bei Verwendung der Abkürzung

$$c_n(v, \Gamma, A, B, v) = c_n(A, B, v) = c_n(A, B|R_v) \quad (R_v(z) = z^v, v \geq 0)$$

ergibt sich aus (99a):

$$c_n(A, B|F) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v c_n(A, B, v)$$

und aus (121) der nachstehende

**Satz 13a.** Die Poincarésche Reihe  $g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F)$  verschwindet dann und nur dann identisch, wenn

$$(124) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\lambda}_v c_v(A, A|F) = 0.$$

Speziell verschwindet die Reihe  $g(\tau, A, v) = g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v)$  dann und nur dann identisch, wenn ihr  $v$ -ter Entwicklungskoeffizient  $c_v(A, A, v)$  in der Spitze  $A^{-1} \infty$  gleich Null ist.

Der Ausdruck auf der linken Seite von (124) kann in der Gestalt

$$H((\lambda)) = \sum_{n, v=0}^{\infty} \lambda_n \bar{\lambda}_v c_v(A, A, n)$$

geschrieben werden, vorausgesetzt, daß diese Doppelreihe absolut konvergiert. Da nach (91) und (114)

$$(g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, n), g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v); \Gamma) = e_r(v, A, \Gamma) c_v(v, \Gamma, A, A, n) = \overline{e_r(v, A, \Gamma) c_n(v, \Gamma, A, A, v)},$$

also kürzer

$$v(A) c_v(A, A, n) = \overline{v(A) c_n(A, A, v)},$$

so stellt  $v(A) H((\lambda))$  eine positiv-semidefinite Hermitesche Form in den Variablen  $\lambda_v$  ( $v = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) dar. Die Voraussetzung und die ursprüng-

liche Bedingung, daß die Reihe  $\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v)$  in einer Umgebung

eines Punktes von  $\S$  konvergieren soll, sind nach (122) und Satz 7a erfüllt, wenn die  $\lambda_v$  einer Abschätzung

$$(125) \quad |\lambda_v| \leq C_{24} (\nu + \eta)^{-\varrho} \quad (\varrho > r, \text{ wenn } r > 2, \varrho > 3, \text{ wenn } r = 2; \nu \geq 0)$$

genügen.

Um aus der Fülle der Linearkombinationen  $g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma|F)$  Formen herauszuheben, die sich in übersichtlicher Weise kennzeichnen lassen, führen wir den folgenden Ansatz durch: Es seien zunächst  $s$  und  $z$  komplexe Variable, und es sei  $\Im m z > 0$ .  $s$  und  $z$  haben mit den früher eingeführten Parametern des gleichen Namens nichts zu tun. Ist  $\varphi(\tau)$  eine Form aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, \nu)$  mit der Entwicklung

$$\varphi(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A) e^{\frac{2\pi i(n+\nu)}{N'} \frac{A\tau}{N'}},$$

so setzen wir

$$(126) \quad \varphi((s, A), \tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \left(\frac{2\pi i}{N'}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A) (n + \eta)^s e^{\frac{2\pi i(n+\nu)}{N'} \frac{A\tau}{N'}},$$

$$\left(\arg \frac{2\pi i}{N'} = \frac{\pi}{2}\right).$$

$(a_1 \tau + a_2)^s \varphi((s, A), \tau)$  ist für natürliches  $s$  die  $s$ -te Ableitung der Funktion  $\varphi_A(\tau)$  nach  $\tau$  im Punkte  $A\tau$ , für negatives ganzes  $s$  das  $(-s)$ -malige Integral von  $\varphi_A(\tau)$  nach  $d\tau$ , erstreckt vom Punkte  $\infty$  bis zum Punkte  $A\tau$ . Wir nennen deshalb  $\varphi((s, A), \tau)$  die Derivierte der Ordnung  $s$  in bezug auf  $A$  der Form  $\varphi(\tau)$  oder kurz die  $\{s, A\}$ -Derivierte von  $\varphi(\tau)$ . Die Ausdrücke  $(a_1 \tau + a_2)^s \varphi((s, A), \tau)$  nennen wir in Anlehnung an die übliche Sprechweise die (kontinuierlichen) Ableitungen der Ordnung  $s$  von  $\varphi_A(\tau)$  im Punkte  $A\tau$ . Bei fest gegebenen  $s$  und  $A$  bilden die Derivierten  $\varphi((s, A), \tau)$  mit  $\varphi(\tau) \in \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, \nu)$  eine zu  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, \nu)$  linear-isomorphe Schar.

Wir bilden nun die Poincarésche Reihe  $g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma|F)$  mit

$$(127) \quad F(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu} w^{\nu},$$

$$\lambda_{\nu} = \lambda_{\nu}(z, s, A) = (a_1(-z) + a_2)^{-r} \left(\frac{-2\pi i}{N'}\right)^s (\nu + \eta)^s e^{-\frac{2\pi i(\nu+\eta)}{N'} \frac{A(-z)}{N'}}$$

wo  $\arg\left(\frac{-2\pi i}{N'}\right) = -\frac{\pi}{2}$ , und bezeichnen die entstehende Funktion durch

$$(128) \quad \Omega(\tau, z, s, A) = \Omega_{-,r}(\tau, z, s; \nu, A, \Gamma)$$

$$= (-a_1 z + a_2)^{-r} \left(\frac{-2\pi i}{N'}\right)^s \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + \eta)^s e^{-\frac{2\pi i(\nu+\eta)}{N'} \frac{A(-z)}{N'}} g_{-,r}(\tau, \nu, A, \Gamma, \nu).$$

Hier ist  $(-a_1 z + a_2)^{-r}$  für beliebige reelle  $a_1, a_2 \neq 0, 0$  gemäß

$$(-a_1 z + a_2)^{-r} = (a_1(-z) + a_2)^{-r} = e^{-r \log | -a_1 z + a_2 | - i r \arg (-a_1 z + a_2)}$$

$$|\arg(a_1(-z) + a_2)| < \pi \quad \text{für} \quad a_1 \neq 0, \arg a_2 = \pi \frac{\operatorname{sgn} a_2 - 1}{2}$$

zu bestimmen, so daß bei dieser Erklärung des Wertes der vieldeutigen Funktion  $(a_1 \tau + a_2)^{-r}$  für einen Punkt  $\tau$  in der unteren Halbebene:

$$(a_1 \bar{z} + a_2)^{-r} = (a_1 z + a_2)^{-r} \quad (z \in \mathbb{S}).$$

Nun ergibt sich aus (121):

$$(129) \quad (\varphi(\tau), \Omega(\tau, -\bar{z}, \bar{z}, A)) = e_r \varphi((s, A), z)$$

und daher der folgende

**Satz 14.** Die durch (128) erklärte Form  $\Omega(\tau, z, s, A)$  der Schar  $\mathfrak{G}_0(\Gamma, -r, v)$  steht auf allen Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{G}_0$  senkrecht, für welche die kontinuierliche Ableitung der Ordnung  $\bar{s}$  von  $\varphi_A(\tau)$  im Punkte  $\tau = A(-\bar{z})$  verschwindet.

$\Omega(\tau, z, s, A)$  ist durch diese Eigenschaft bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Dieser Satz läßt erkennen, daß die Form  $\Omega(\tau, z, s, A)$  als das genaue Analogon der Form  $g(\tau, A, v)$  anzusehen ist. Die Analogie kommt in der Kennzeichnung der beiden Formtypen durch Orthogonalitätseigenschaften zum Ausdruck. Während die  $b_v(A)$  die Fourierkoeffizienten von  $\varphi_A(\tau)$  (im Punkte  $\tau = \infty$ ) sind, sind die in Satz 14 genannten Ableitungen für ganzes  $s > 0$  die Taylorkoeffizienten von  $\varphi_A(\tau)$  im Punkte  $\tau = A(-\bar{z})$  (abgesehen von einem Faktor, der in der Aussage des Satzes 14 keine Rolle spielt). Im Sinne dieser Analogie entsprechen einander also sowohl die Punkte  $\tau = \infty$  und  $\tau = A(-\bar{z})$ , d. h. die Punkte  $A^{-1}\tau = A^{-1}\infty$  und  $A^{-1}\tau = -\bar{z}$  als auch die Ordnungszahlen  $v$  und  $\bar{s}$ .

Im übrigen gestattet  $\Omega(\tau, z, s, A)$  die beiden Darstellungen

$$\begin{aligned} (130) \quad \Omega(\tau, z, s, A) &= \left(\frac{-2\pi i}{N}\right)^s (-a_1 \bar{z} + a_2)^{-r} \times \\ &\times \sum_{n \in \mathfrak{G}(A, r)} \bar{v}(M) (m_1 \tau + m_2)^{-r} \sum_{\eta=0}^{\infty} (v + \eta)^{s+r-1} e^{\frac{2\pi i(r+\eta)}{N} \frac{M\tau - A(-s)}{N}} \\ &= \left(\frac{-2\pi i}{N}\right)^s (a_1(-z) + a_2)^{-r} (a_1 \tau + a_2)^{-r} \times \\ &\times \sum_{n, r=0}^{\infty} (v + \eta)^s c_n(A, A, v) e^{\frac{2\pi i(r+\eta)}{N} \frac{-A(-s)}{N} + \frac{2\pi i(n+\eta)}{N} \frac{A\tau}{N}} \\ &= (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(z, s, A) e^{\frac{2\pi i(n+\eta)}{N} \frac{A\tau}{N}} \end{aligned}$$

mit

$$(130a) \quad \omega_n(z, s, A) = \overline{v(A)^2} \overline{g(\{s, A\}, -\bar{z}, A, n)},$$

deren erste für  $r = 2$  durch den in § 3 beschriebenen Grenzprozeß realisiert werden muß. Aus dieser ersten Darstellung folgt, wenn  $\Re s > 1 - r$ :

$$(131) \quad \Omega(\tau, z, s, A) = \Gamma(r+s) \left( \frac{-2\pi i}{N'} \right)^{-r} (-a_1 z + a_2)^{-r} \\ \sum_{M \in A\Gamma} \bar{v}(M) (m_1 \tau + m_2)^{-r} (M\tau - A(-z))^{-r-s}$$

Beim Beweise hat man zu beachten, daß für ganzes  $k$  und für  $M = AL \subset A\Gamma$  nach (G.I), (20<sub>g</sub>):

$$v(U^{kN'} M) = v(AP^k L) = \bar{v}_\sigma(AP^k, L) v(AP^k) v(L) \\ = \sigma(A, L) \sigma(A, P^k) v(A) v(P^k) v(L) = e^{2\pi i k \eta} v(M).$$

Aus der zweiten Darstellung (130) von  $\Omega(\tau, z, s, A)$  ergibt sich die Symmetrierelation

$$(132) \quad \overline{v(A) \hat{\Omega}(\{s, A\}, \tau, -\bar{z}, \bar{s}, A)} = v(A) \hat{\Omega}(\{s, A\}, z, -\bar{\tau}, \bar{s}, A).$$

Ferner gilt für eine reelle Matrix  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $ad - bc = 1$ , wenn

$S^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$  gesetzt wird:

$$\Omega_{-r}(S\tau, S^*z, s; v, A, \Gamma) (c\tau + d)^{-r} (-cz + d)^{-r} \\ = \frac{v_1(AS)}{v(A)} \Omega_{-r}(\tau, z, s; v_S, AS, S^{-1}\Gamma S).$$

Im Sinne der oben geschilderten Analogie zwischen den Formen  $g(\tau, A, v)$  und  $\Omega(\tau, z, s, A)$  würde einer Linearkombination  $\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v g(\tau, A, v)$  ein Ausdruck vom Typus  $\int \lambda(s) \Omega(\tau, z, s, A) ds$  entsprechen, wo mit einer gegebenen

Belegungsfunktion  $\lambda(s)$  längs einer gegebenen Kurve  $\mathfrak{L}$  in der komplexen  $s$ -Ebene integriert wird. Auch ein Integral dieser Bauart, welches über ein Flächenstück der  $s$ -Ebene erstreckt wird, käme als Analogon in Betracht. Auf diese Bildungen soll weiter unten eingegangen werden.

Vorher wollen wir den algebraischen Apparat aufbauen, der die Wirkung der Metrisierung auf die Formenvektoren mit Komponenten aus  $\mathfrak{C}_0$  zu übersehen gestattet. (Hinsichtlich der Beziehungen zwischen der Metrisierung und der Darstellung der Formen von  $\mathfrak{C}_0$  durch  $\mu$ -dimensionale komplexe

Vektoren vgl. (J II), 1, S. 52, 53; das dort Gesagte gilt wörtlich im vorliegenden allgemeinen Fall.)

Sind  $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\lambda(\tau)$  irgendwelche Formen aus  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ , so ordnen wir ihnen den Formenvektor

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\lambda(\tau)\}$$

zu. Die Entwicklungen

$$\varphi_j(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} b_{j,n} e^{2\pi i(n+\eta) \frac{A\tau}{N}} \quad (1 \leq j \leq \lambda)$$

der  $\varphi_j(\tau)$  in der Spitze  $\zeta = A^{-1} \infty$  von  $\Gamma$  fassen wir in der vektoriellen Schreibweise durch

$$(132a) \quad q(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i(n+\eta) \frac{A\tau}{N}}, \quad b_n = \{b_{1,n}, b_{2,n}, \dots, b_{\lambda,n}\}$$

zusammen. Wir verstehen unter  $q_A(\tau)$ ,  $q(\{s, A\}, \tau)$  die durch

$$q(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} q_A(A\tau),$$

$$q(\{s, A\}, \tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \left( \frac{2\pi i}{N} \right)^s \sum_{n=0}^{\infty} (n+\eta)^s b_n e^{2\pi i(n+\eta) \frac{A\tau}{N}}$$

erklärten Funktionenvektoren.

Die Determinante einer quadratischen Matrix  $A$  (eines beliebigen Grades) bezeichnen wir mit  $\|A\|$ . Sind  $a_1, a_2, \dots, a_m$  irgendwelche Vektoren mit gleich vielen Komponenten, so nennen wir  $[a_1, a_2, \dots, a_m]$  diejenige Matrix, deren  $k$ -ter Spaltenvektor  $a_k$  ist, und gegebenenfalls  $\|a_1, a_2, \dots, a_m\|$  ihre Determinante. In der Darstellung einer Matrix durch ihre Elemente bezeichnen wir den Zeilenindex stets mit  $i$  oder  $j$ , den Spaltenindex stets mit  $k$  oder  $l$ , z. B.  $A = (a_{j,k})$ . Bei der Verknüpfung von Matrizen und Vektoren werden die Vektoren als Matrizen mit nur einer Spalte aufgefaßt und die Rechenregeln der Matrizenrechnung angewendet. Es gilt als selbstverständlich, daß bei jeder Matrizenmultiplikation die Spaltenzahl des ersten Faktors mit der Zeilenzahl des zweiten Faktors übereinstimmt. Das Transponieren einer Matrix wird durch einen Akzent, der Übergang zu der Matrix mit konjugiert-komplexen Elementen durch einen Querstrich ausgedrückt. — Den Rang  $v_0(-r, v; a)$  von  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  bezeichnen wir mit  $\mu$ .

Es seien

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\lambda(\tau)\}, \quad r(\tau) = \{z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_\mu(\tau)\}$$

Formenvektoren über  $\mathfrak{C}_0$ . Wir erklären die Matrix  $(q, r)$  durch

$$(q, r) = (q(\tau), r(\tau)) = ((\varphi_j, z_k)) = ((\varphi_j(\tau), z_k(\tau); \Gamma)).$$

Für diese Matrizen gelten die nachstehenden Rechenregeln:

$$(133) \quad (r, q) = \overline{(q, r)}, \quad (q, q) \text{ ist eine Hermitesche Matrix,}$$

$$(134) \quad (A q, r) = A (q, r), \quad (q, B r) = (q, r) \bar{B}$$

(wenn A und B konstante Matrizen bedeuten),

$$(135) \quad \left( \sum_{i=1}^m x_i q_i, \sum_{k=1}^n y_k r_k \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_i \bar{y}_k (q_i, r_k)$$

(wenn die  $x_i, y_k$  komplexe Konstante sind und alle  $q_i$  sowie alle  $r_k$  je gleich viele Komponenten haben.) —

Ferner gilt der folgende

**Satz 15.** Es seien  $q(\tau), r(\tau)$  beliebige Formenvektoren über  $\mathbb{C}_0$ . Man bezeichne mit  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$  die Formenscharen, die von den Komponenten von  $q(\tau)$  bzw. den Komponenten von  $r(\tau)$  aufgespannt werden, mit  $\mathfrak{D}$  den Durchschnitt von  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$ . Dann ist der Rang der Matrix  $(q, r)$  höchstens gleich dem Range von  $\mathfrak{S}_1$  und auch höchstens gleich dem Range von  $\mathfrak{S}_2$ , dagegen mindestens gleich dem Range von  $\mathfrak{D}$ . Ist entweder  $\mathfrak{S}_1$  in  $\mathfrak{S}_2$ , oder  $\mathfrak{S}_2$  in  $\mathfrak{S}_1$  enthalten, so ist demnach der Rang der Matrix  $(q, r)$  gleich dem Range von  $\mathfrak{D}$ .

**Beweis.** Da eine lineare Relation zwischen den  $\varphi_j(\tau)$  ( $1 \leq j \leq \lambda$ ) sich auf jedes System von Skalarprodukten  $(\varphi_j, \chi_k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, \varrho, k$ , fest) überträgt, kann angenommen werden, daß alle  $\varphi_j(\tau)$  ( $1 \leq j \leq \lambda$ ) und daß alle  $\chi_k(\tau)$  ( $1 \leq k \leq \varrho$ ) linear unabhängig sind. Ferner kann man nach (134) die  $\varphi_j(\tau)$  und ebenso die  $\chi_k(\tau)$  durch irgendeine Basis von  $\mathfrak{S}_1$  bzw.  $\mathfrak{S}_2$  ersetzen. Man konstruiere nun eine normierte Orthogonalbasis von  $\mathfrak{D}$  und ergänze diese zu je einer normierten Orthogonalbasis einerseits von  $\mathfrak{S}_1$ , andererseits von  $\mathfrak{S}_2$ . Dann ist die Aussage des Satzes evident.

Einfache Beispiele lehren, daß der Rang von  $(q, r)$  gleich Null sein kann, obwohl  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  beliebig hohen Rang haben, und daß auch der Rang von  $(q, r)$  den Rang von  $\mathfrak{D}$  übertreffen kann.

Sind  $q(\tau)$  und  $r(\tau)$  zwei  $\mu$ -dimensionale Formenvektoren, so nennen wir sie in Übereinstimmung mit (J II) komplementär-orthogonal, wenn  $(q, r) = \gamma I$ , wo  $\gamma$  irgendeine von Null verschiedene komplexe Zahl und  $I$  die Einheitsmatrix des Grades  $\mu$  angibt. Nach Satz 15 ist sowohl  $q(\tau)$  als auch  $r(\tau)$  ein Basisvektor über  $\mathbb{C}_0$ , wenn  $q(\tau)$  und  $r(\tau)$  zueinander komplementär-orthogonal sind. Dann gilt auch  $q = A r$  mit  $A = \gamma(r, r)^{-1}$ , wo  $\bar{\gamma} A$  offenbar eine Hermitesche Matrix darstellt. Umgekehrt erhält man zu dem gegebenen Basisvektor  $r(\tau)$  über  $\mathbb{C}_0$  in der Gestalt  $q(\tau) = \gamma(r, r)^{-1} r(\tau)$

( $\gamma \neq 0$ ) einen zu  $r(\tau)$  komplementär-orthogonalen Vektor, der  $(q, r) = \gamma I$  mit dem gegebenen  $\gamma$  erfüllt. Die Eigenschaft eines Formenvektors mit  $\mu$  Komponenten, zu sich selbst komplementär-orthogonal zu sein, bedeutet, daß seine Komponenten nach Division durch die Quadratwurzel aus der positiven Zahl  $\gamma$  eine normierte Orthogonalbasis von  $\mathbb{C}_0$  bilden.

Mit diesen Begriffen und auf Grund dieser Tatsachen lassen sich nun die wichtigsten Fragen über die explizite analytische Darstellung der ganzen Spitzenformen der allgemeinen Klasse  $\{\Gamma, -r, v\}$  mühelos beantworten.

Es seien  $n_1, n_2, \dots, n_\lambda$  ganze Zahlen  $\geq 0$ , es sei  $n = n^{(A)} = \{n_1, n_2, \dots, n_\lambda\}$  und  $g(\tau, A, n)$  der Formenvektor

$$(136) \quad g(\tau, A, n) = (g(\tau, A, n_1), g(\tau, A, n_2), \dots, g(\tau, A, n_\lambda));$$

$\lambda$  bezeichnet hier und in den analogen folgenden Untersuchungen eine beliebige natürliche Zahl, die auch größer als  $\mu$  sein kann. Wir fragen zunächst nach der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Komponenten dieses Vektors  $g(\tau, A, n)$ .

Ist der Basisvektor  $q(\tau)$  über  $\mathbb{C}_0$  mit seiner Entwicklung in der Spitze  $\zeta = A^{-1} \infty$  durch (132a) vorgelegt, wobei die dort mit  $\lambda$  angegebene Zahl hier den Wert  $\mu$  hat, so ergeben die Grundformeln

$$\begin{aligned} (q(\tau), g(\tau, A, n)) &= ((\varphi_j(\tau), g(\tau, A, n_k))) = e_r(b_{j, n_k}) \\ &= e_r[b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_\lambda}]. \end{aligned}$$

Nach Satz 15 stimmt also die Maximalzahl linear unabhängiger unter den konstanten Vektoren  $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_\lambda}$  mit der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Formen

$$g(\tau, A, n_1), g(\tau, A, n_2), \dots, g(\tau, A, n_\lambda)$$

überein. Die zuerst genannte Maximalzahl hängt ersichtlich nur von dem Nummernvektor  $n$  (und der Spitze  $\zeta$ ), nicht aber von der Auswahl des Basisvektors  $q(\tau)$  über  $\mathbb{C}_0$  ab.

Es sei  $z \in \mathfrak{H}$ , es seien  $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$  komplexe Zahlen. Wir schreiben  $s = s^{(A)} = \{s_1, s_2, \dots, s_\lambda\}$  und

$$(137) \quad \Omega(\tau, z, s, A) = \{\Omega(\tau, z, s_1, A), \Omega(\tau, z, s_2, A), \dots, \Omega(\tau, z, s_\lambda, A)\}.$$

Dann ergibt (129):

$$\begin{aligned} (q(\tau), \Omega(\tau, z, s, A)) &= ((\varphi_j(\tau), \Omega(\tau, z, s_k, A))) = e_r(\varphi_j(\{\bar{s}_k, A\}, -\bar{z})) \\ &= e_r[q(\{\bar{s}_1, A\}, -\bar{z}), q(\{\bar{s}_2, A\}, -\bar{z}), \dots, q(\{\bar{s}_\lambda, A\}, -\bar{z})]. \end{aligned}$$

Nach Satz 15 stimmt also die Maximalzahl linear unabhängiger unter den (Zahl-) Vektoren

$$q(\{\bar{s}_1, A\}, -\bar{z}), q(\{\bar{s}_2, A\}, -\bar{z}), \dots, q(\{\bar{s}_\lambda, A\}, -\bar{z})$$

mit der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Formen

$$\Omega(\tau, z, s_1, A), \Omega(\tau, z, s_2, A), \dots, \Omega(\tau, z, s_\lambda, A)$$

überein. Die an erster Stelle genannte Anzahl ist offenbar die Maximalzahl linear unabhängiger unter den kontinuierlichen Ableitungen des Vektors  $q_A(\tau)$ , gebildet mit den Ordnungen  $s_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_\lambda$  im Punkte  $\tau = A(-\bar{z})$ . Sie hängt ersichtlich nur von  $z$  und von den gegebenen Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$ , nicht aber von der Auswahl des Basisvektors  $q(\tau)$  über  $\mathbb{C}_0$  ab.

Sind allgemeiner  $\lambda$  Punkte  $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$  in  $\mathfrak{H}$  und  $\lambda$  komplexe Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$  vorgelegt, so schreiben wir  $s = s^{(i)}$  wie oben, ferner  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(i)} = \{z_1, z_2, \dots, z_\lambda\}$  und nennen  $\mathfrak{D}(\tau, (\mathfrak{z}, s), A) = \mathfrak{D}(\tau, (\mathfrak{z}^{(i)}, s^{(i)}), A)$  den Vektor

$$(138) \quad \mathfrak{D}(\tau, (\mathfrak{z}, s), A) = \{\Omega(\tau, z_1, s_1, A), \Omega(\tau, z_2, s_2, A), \dots, \Omega(\tau, z_\lambda, s_\lambda, A)\}.$$

Dann ergibt (129) wieder

$$\begin{aligned} (q(\tau), \mathfrak{D}(\tau, (\mathfrak{z}, s), A)) &= e_r(q_j(\{\bar{s}_k, A\}, -\bar{z}_k)) \\ &= e_r[q(\{\bar{s}_1, A\}, -\bar{z}_1), q(\{\bar{s}_2, A\}, -\bar{z}_2), \dots, q(\{\bar{s}_\lambda, A\}, -\bar{z}_\lambda)]. \end{aligned}$$

Daher stimmt die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren

$$q(\{\bar{s}_1, A\}, -\bar{z}_1), q(\{\bar{s}_2, A\}, -\bar{z}_2), \dots, q(\{\bar{s}_\lambda, A\}, -\bar{z}_\lambda)$$

mit der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Formen

$$\Omega(\tau, z_1, s_1, A), \Omega(\tau, z_2, s_2, A), \dots, \Omega(\tau, z_\lambda, s_\lambda, A)$$

überein. Die an erster Stelle genannte Anzahl ist offenbar die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Ableitungen von  $q_A(\tau)$ , gebildet in den Punkten  $A(-\bar{z}_j)$  je mit den Ordnungen  $\bar{s}_j$  ( $1 \leq j \leq \lambda$ ). Sie hängt ersichtlich nur von den gegebenen Vektoren  $\mathfrak{z}$  und  $s$ , nicht aber von der Auswahl des Basisvektors  $q(\tau)$  über  $\mathbb{C}_0$  ab.

Aus diesen Sätzen gewinnt man für  $\lambda \leq \mu$  insbesondere die Kriterien dafür, daß die Komponenten der Vektoren der drei Typen

$$g(\tau, A, n), \mathfrak{D}(\tau, z, s, A), \mathfrak{D}(\tau, (\mathfrak{z}, s), A)$$

linear unabhängig sind. Sie bezagen, wie auch unmittelbar aus Satz 15 hervorgeht, für den ersten Typus und den dritten Typus, der den zweiten Typus umfaßt, daß die Determinanten

$$(139) \quad \|c_{n_k}(A, A, n_j)\|, \|\Omega(\{\bar{s}_k, A\}, -\bar{z}_k, z_j, s_j, A)\|$$

nicht verschwinden.

Wir fassen alle diese Ergebnisse in den folgenden Sätzen zusammen:

**Satz 16.** Es sei  $\lambda$  eine beliebige natürliche Zahl  $\leq \mu$ ,  $q(\tau)$  ein beliebiger Basisvektor über  $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_0(\Gamma, -r, v)$ . Die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Poincaréschen Reihen

$$g(\tau, A, n_1), g(\tau, A, n_2), \dots, g(\tau, A, n_\lambda) \quad (n_k \text{ ganz und } \geq 0, 1 \leq k \leq \lambda)$$

ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Fourier-Koeffizientenvektoren des Formenvektors  $q_A(\tau)$  mit den Nummern  $n_1, n_2, \dots, n_\lambda$ .

Es seien  $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$  Punkte in  $\mathfrak{H}$ ,  $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$  beliebige komplexe Zahlen. Die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Poincaréschen Reihen

$$\Omega(\tau, z_1, s_1, A), \Omega(\tau, z_2, s_2, A), \dots, \Omega(\tau, z_\lambda, s_\lambda, A)$$

ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger unter den kontinuierlichen Ableitungen des Vektors  $q_A(\tau)$ , gebildet in den Punkten  $\tau = A(-\bar{z}_j)$  jeweils mit den Ordnungen  $\bar{s}_j$  ( $1 \leq j \leq \lambda$ ).

Dieser Satz kann in folgender Weise verschärft werden: Man bilde mit beliebigen komplexen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\lambda$  die Funktionen

$$G(\tau) = \sum_{v=1}^{\lambda} \xi_v g(\tau, A, n_v), \quad \Psi(\tau) = \sum_{v=1}^{\lambda} \xi_v \Omega(\tau, z_v, s_v, A).$$

Es ergibt sich in den oben verwendeten Bezeichnungen:

$$(q(\tau), G(\tau)) = e_r \sum_{v=1}^{\lambda} \bar{\xi}_v \bar{b}_{n_v},$$

$$(q(\tau), \Psi(\tau)) = e_r \sum_{v=1}^{\lambda} \bar{\xi}_v q(\{\bar{s}_v, A\}, -\bar{z}_v)$$

und daraus der folgende

**Satz 17. (Hauptsatz über die linearen Relationen zwischen den Poincaréschen Reihen.)** Zwischen den Poincaréschen Reihen  $g(\tau, A, n_v)$  ( $1 \leq v \leq \lambda$ ) besteht dann und nur dann die lineare Relation

$$\sum_{v=1}^{\lambda} \xi_v g(\tau, A, n_v) = 0$$

(mit komplexen konstanten  $\xi_v$ ), wenn zwischen den Koeffizientenvektoren  $b_{n_v}$  ( $1 \leq v \leq \lambda$ ) der Fourierentwicklung des Formenvektors  $q_A(\tau)$  (im Punkte  $\tau = \infty$ ) die lineare Relation

$$\sum_{v=1}^{\lambda} \bar{\xi}_v \bar{b}_{n_v} = 0$$

besteht. Zwischen den Poincaréschen Reihen  $\Omega(\tau, z, s, A)$  ( $1 \leq v \leq \lambda$ ) besteht dann und nur dann die lineare Relation

$$\sum_{v=1}^{\lambda} \xi_v \Omega(\tau, z, s, A) = 0,$$

wenn zwischen den Derivierten  $q(\{\bar{s}_v, A\}, -\bar{z}_v)$  ( $1 \leq v \leq \lambda$ ) des Formenvektors  $q(\tau)$  in bezug auf  $A$  die lineare Relation

$$\sum_{v=1}^{\lambda} \bar{\xi}_v q(\{\bar{s}_v, A\}, -\bar{z}_v) = 0$$

besteht.

Aus Satz 16 gewinnt man ferner die übersichtlichste Formulierung der sogenannten Vollständigkeitssätze, die besagen, daß ein System von  $\mu$  Poincaréschen Reihen von jedem der Typen

$$g(\tau, A, v) \quad (A \text{ fest}), \quad \Omega(\tau, z, s, A) \quad (A \text{ und } z \text{ fest})$$

gefunden werden kann, welches eine Basis der Schar  $\mathfrak{C}_0$  bildet. Dazu genügt es, zu zeigen, daß ein System von  $\mu$  linear unabhängigen Fourierkoeffizienten  $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_\mu}$  des Formenvektors  $q_A(\tau)$  existiert, und daß ein System von  $\mu$  linear unabhängigen Taylor-Koeffizientenvektoren  $b_{s_1}, b_{s_2}, \dots, b_{s_\mu}$  ( $s_i$  ganz und  $\geq 0$ ) des Vektors  $q_A(\tau)$  im Punkte  $\tau = A(-\bar{z})$  existiert. Beide Behauptungen sind allgemein durch einen indirekten Schluß leicht zu beweisen. Einen wesentlich schärferen Satz erhält man aber aus der Theorie des § 1:

**Satz 18.** (Erster Vollständigkeitssatz über die Poincaréschen Reihen.)

Es sei  $\tau_0$  nicht elliptischer Fixpunkt von  $\Gamma$  ( $\tau_0 \in \mathfrak{H}$  oder  $\tau_0$  parabolischer Fixpunkt). Die Poincaréschen Reihen

$$g(\tau, A, n_1), g(\tau, A, n_2), \dots, g(\tau, A, n_\mu) \quad (\tau_0 = A^{-1} \infty),$$

$$\Omega(\tau, -\bar{\tau}_0, n_1, I), \Omega(\tau, -\bar{\tau}_0, n_2, I), \dots, \Omega(\tau, -\bar{\tau}_0, n_\mu, I) \quad (\tau_0 \in \mathfrak{H})$$

( $n_1, n_2, n_3, \dots, n_\mu$  ganz und  $\geq 0$ ) bilden dann und nur dann eine Basis von  $\mathfrak{C}_0$ , wenn die Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_\mu$  ein Hauptsystem im Punkte  $\tau = \tau_0$  darstellen (§ 1). Das im Sinne der lexicographischen Anordnung von Satz 5 kleinste Hauptsystem, das Grundsystem  $m_1, m_2, \dots, m_\mu$  beschreibt nach Satz 1 den Weierstraßischen Charakter des Punktes  $\tau = \tau_0$  in bezug auf die Formenschar  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -\tau, v)$ , d. h. die Zahlen  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_\mu + 1$  sind die Lückenzahlen der Polordnungen der außerhalb von  $\tau = \tau_0$  regulären automorphen Formen  $\{\Gamma, \tau - 2, \frac{1}{v}\}$ .

Im Falle  $\lambda = \mu$  wird die lineare Unabhängigkeit der Formen  $\Omega(\tau, z_k, s_k, A)$  ( $1 \leq k \leq \mu$ ) auf das Nichtverschwinden der Determinante

$$D(-\bar{s}, \bar{s}) = \|\varphi_j(\{\bar{s}_k, A\}, -\bar{s}_k)\| \quad (j, k = 1, 2, \dots, \mu)$$

zurückgeführt. Diese Determinante stimmt bis auf einen stets von Null verschiedenen Faktor mit der Wronski-Determinante der Basis  $q_A(\tau)$  von  $\mathfrak{C}_0(A \Gamma A^{-1}, -r, v'_{A^{-1}})$  im Punkte  $\tau = A(-\bar{z})$  überein, wenn alle  $z_k$  mit  $z$  zusammenfallen,  $-\bar{z} \in \mathfrak{H}$  nicht Fixpunkt von  $\Gamma$  ist und die  $s_k$  die Werte  $0, 1, 2, 3, \dots, \mu - 1$  aufweisen. Nach den Überlegungen am Schluß des § 1 erhält man also in dieser Determinante bis auf einen stets von Null verschiedenen Faktor die Wronski-Determinante der Basis  $q(\tau)$  im Punkte  $\tau = -\bar{z}$  und gelangt mithin zu dem Satz, daß die Formen

$$\Omega(\tau, z, k, A) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1)$$

eine Basis von  $\mathfrak{C}_0$  bilden, wenn  $\tau = -\bar{z}$  nicht Fixpunkt von  $\Gamma$  und nicht Weierstraßpunkt der Formenschar  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  ist.

Für die mit beliebigen ganzen  $n_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ) gebildeten Formen  $\Omega(\tau, z, n_k, A)$  besteht der folgende Vollständigkeitssatz:

**Satz 18a.** *Es sei  $\tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  nicht elliptischer Fixpunkt der Gruppe  $A \Gamma A^{-1}$ . Die Poincaréschen Reihen*

$$\Omega(\tau, -A^{-1}\bar{\tau}_0, n_k, A) \quad (1 \leq k \leq \mu)$$

bilden dann und nur dann eine Basis der Schar  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ , wenn die ganzen Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_\mu$  ein Hauptssystem im Punkte  $\tau = \tau_0$  bezüglich der Formenschar  $\mathfrak{C}_0(A \Gamma A^{-1}, -r, v'_{A^{-1}})$  darstellen. Das Grundsystem dieser Klasse im Punkte  $\tau = \tau_0$  fällt mit dem Grundsystem der Klasse  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  im Punkte  $\tau = A^{-1}\tau_0$  zusammen.

Durch die Aussage des Satzes 16 gewinnt die Determinante  $D(\bar{s}, s)$ , die man als eine verallgemeinerte Wronski-Determinante bezeichnen könnte, für beliebige  $\bar{s}$  und  $s$  eine inhaltliche Bedeutung durch ihre Beziehung zu den Poincaréschen Reihen. In dem Spezialfall, in dem alle  $s_k$  verschwinden und die  $z_k$  bezüglich  $\Gamma$  paarweise inäquivalent sind, entsteht aus  $D(-\bar{s}, \bar{s})$  die sogenannte Diskriminante  $\Delta(-\bar{s}, q)$  der Formenschar  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ . Ihr Nichtverschwinden besagt, daß die Poincaréschen Reihen  $\Omega(\tau, z_k, 0, A)$  eine Basis von  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  bilden [vgl. (J I), S. 445, 446].

Dieser Sachverhalt läßt sich in einen allgemeineren Vollständigkeitssatz einordnen, der in gewissem Sinne als polar zu dem oben formulierten Vollständigkeitssatz (Satz 18) bezeichnet werden kann. Während dort die Formen  $\Omega(\tau, z, s, A)$  bei festem  $z$  für verschiedene Werte von  $s$  auftreten,

wird hier  $s$  festgehalten, und es werden die Formen  $\Omega(z, z_k, s, A)$  für  $\mu$  paarweise inäquivalente (sonst beliebige) Punkte  $z_k$  in  $\mathfrak{H}$  gebildet. Nach Satz 16 sind diese Formen dann und nur dann linear unabhängig, wenn die Determinante

$$D(-\bar{z}, \bar{s}) = \|\varphi_j(\{\bar{z}, A\}, -\bar{z}_k)\| \neq 0$$

ist. Da aber die Funktionen  $\varphi_j(\{\bar{z}, A\}, \tau)$  ( $1 \leq j \leq \mu$ ) linear unabhängig sind, lehrt Satz 16 in Verbindung mit dem Hilfssatz in (§ II), § 4, 3:

**Satz 19.** (Zweiter Vollständigkeitssatz über die Poincaréschen Reihen.)

Es sei  $s$  eine beliebige komplexe Zahl, und es seien  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_\mu^0$  beliebige Punkte in  $\mathfrak{H}$ . Dann gibt es in jedem Umgebungssystem

$$|z_k - z_k^0| < \varrho_k \quad (\varrho_k > 0, 1 \leq k \leq \mu)$$

von  $\mathfrak{z}_0 = \{z_1^0, z_2^0, \dots, z_\mu^0\}$  ein Wertsystem  $\mathfrak{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_\mu\}$  (und mithin auch gleich kontinuierlich viele Wertsysteme  $\mathfrak{z}$ ) derart, daß die Poincaréschen Reihen

$$\Omega(\tau, z_k, s, A) \quad (1 \leq k \leq \mu)$$

eine Basis von  $\mathfrak{C}_0$  bilden. Die Wertsysteme  $\mathfrak{z}$ , für die die genannten Reihen keine Basis bilden, erfüllen die in den Variablen  $-\bar{z}_k$  ( $1 \leq k \leq \mu$ ) analytische Ausnahmemannigfaltigkeit  $\mathfrak{A}$ , gegeben durch

$$D(-\bar{z}, \bar{s}) = 0.$$

$\mathfrak{A}$  ist eine Mannigfaltigkeit von höchstens  $\mu - 1$  komplexen Dimensionen.

Wir beschreiben im folgenden kurz ein Verfahren, mit dem man die zu den aus Satz 16 erhältlichen Basisvektoren komplementär-orthogonalen Vektoren bestimmen kann.

Es sei in vektorieller Schreibweise  $n = \{n_1, n_2, \dots, n_\mu\}$  ein Hauptsystem für den Punkt  $\zeta = A^{-1} \infty$  (§ 1) und

$$p(\tau, A, n) = \{\psi_1(\tau, A, n), \psi_2(\tau, A, n), \dots, \psi_\mu(\tau, A, n)\}$$

der zugehörige Hauptvektor, dessen Komponenten die Hauptbasis zum Hauptsystem  $n$  bilden. Dann ist, wenn wir jetzt  $e_\gamma(v, A, \Gamma)$  mit  $\gamma$  bezeichnen, nach den Grundformeln (117)

$$(p(\tau, A, n), g(\tau, A, n)) = \gamma I.$$

In der Darstellung

$$\varphi(\tau) = \sum_{j=1}^n \theta_j \psi_j(\tau, A, n)$$

einer beliebigen Form  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  durch die Komponenten des Basisvektors  $p(\tau, A, n)$  haben die Koeffizienten  $\theta_j$  die Werte  $b_{n_j}(A)$ , weil nach (117):

$$(\varphi(\tau), g(\tau, A, n_k)) = \gamma b_{n_k}(A) = \sum_{j=1}^n \theta_j \gamma \delta_{j,k} = \gamma \theta_k \quad (1 \leq k \leq \mu).$$

wo  $\delta_{j,k}$  das Kroneckersche Symbol bedeutet. Daher gilt

$$(140) \quad g(\tau, A, v) = \sum_{j=1}^n c_{n_j}(A, A, v) \psi_j(\tau, A, n)$$

und nach (130a)

$$(141) \quad \Omega(\tau, z, s, A) = (\bar{v}(A))^2 \sum_{j=1}^n \overline{g(\{\bar{s}, A\}, -\bar{z}, A, n_j)} \psi_j(\tau, A, n).$$

In ähnlicher Weise kann man die Eigenschaften des zu dem Basisvektor  $\mathfrak{D}(\tau, z, n, I)$  komplementär-orthogonalen Formenvektors bestimmen, wobei angenommen wird, daß  $n$  ein Hauptsystem im Punkte  $\tau = -\bar{z}$  darstellt. Ist allgemeiner  $\mathfrak{D}(\tau, (3, s), A)$  ( $\lambda = \mu$ ) ein Basisvektor über  $\mathfrak{C}_0$ ,  $\mathfrak{D}(\tau, (3, s), A)$  der zu ihm komplementär-orthogonale Vektor

$$\mathfrak{D}(\tau, (3, s), A) = \{Y_1(\tau, (3, s), A), Y_2(\tau, (3, s), A), \dots, Y_\mu(\tau, (3, s), A)\}.$$

der also mit  $\gamma = e_r(v, A, \Gamma)$  die Relation

$$(\mathfrak{D}(\tau, (3, s), A), \mathfrak{D}(\tau, (3, s), A)) = \gamma I$$

erfüllt, so hat man:

$$Y_j(\{\bar{s}, A\}, -\bar{z}_k, (3, s), A) = \delta_{j,k} \quad (j, k = 1, 2, \dots, \mu),$$

und in der Darstellung

$$\varphi(\tau) = \sum_{j=1}^n \theta_j Y_j(\tau, (3, s), A)$$

einer beliebigen Form  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  durch die  $Y_j(\tau, (3, s), A)$  ist nach (129):

$$\theta_j = \varphi(\{\bar{s}_j, A\}, -\bar{z}_j) \quad (1 \leq j \leq \mu).$$

Daher gelten die Gleichungen

$$(142) \quad g(\tau, A, v) = \sum_{j=1}^n g(\{\bar{s}_j, A\}, -\bar{z}_j, A, v) Y_j(\tau, (3, s), A),$$

$$(143) \quad \Omega(\tau, z, s, A) = \sum_{j=1}^n \Omega(\{\bar{s}_j, A\}, -\bar{z}_j, z, s, A) Y_j(\tau, (3, s), A).$$

Mit diesen Formeln kann man eine lineare Relation zwischen endlich oder unendlich vielen  $g(\tau, A, \nu)$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $A$  fest) bzw.  $\Omega(\tau, z, s, A)$  ( $A$  fest) auf die Koeffizienten ihrer Darstellungen durch die  $\varphi_j$  und  $Y_j$  umschreiben.

Eine andere Anwendung bezieht sich auf den durch (129) erklärten Integraloperator. Wird zunächst  $s = 0$  gesetzt, so entsteht aus (129) die Integralgleichung

$$(144) \quad (\varphi(\tau), \Omega(\tau, -\bar{z}, 0, A)) = \gamma \varphi(\bar{z}) \quad (\gamma = \varepsilon_\nu(v, A, \Gamma)),$$

der alle Formen aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  genügen. Es sei nun  $\mathfrak{R}$  ein fest gewählter zulässiger Fundamentalbereich und  $\varphi(\tau)$  irgendeine auf  $\mathfrak{R}$  stetige Funktion, deren Betrag bei Annäherung an die Spitzen von  $\mathfrak{R}$  nicht zu stark ins Unendliche wächst. Genauer darf  $|\varphi(\tau)|$  bei Annäherung an die Spitze  $\zeta = A^{-1}\infty$  von  $\mathfrak{R}$  exponentiell ins Unendliche wachsen, es soll aber für irgendein positives  $\eta' < \eta$ :

$$(145) \quad |\varphi(\tau)| e^{-2\pi \frac{\eta'}{N} 3\pi A \tau} \quad \text{für } \tau \rightarrow A^{-1}\infty, \tau \in \mathfrak{R} \text{ beschränkt}$$

bleiben. Dann existiert  $W_\nu(\varphi(\tau), \varphi(\tau); \mathfrak{R})$  für jede Form  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ .

Genügt eine solche Funktion  $\varphi(\tau)$  der Integralgleichung (144) (mit irgendeiner Konstanten  $\gamma \neq 0$  an Stelle von  $\gamma = \varepsilon_\nu(v, A, \Gamma)$ ) etwa für die  $z$  in einem Teilgebiet  $\mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{R}$ , so gilt nach (141):

$$\gamma \varphi(z) = (v(A))^2 \sum_{j=1}^n g(z, A, n_j) W_\nu(\varphi(\tau), \varphi_j(\tau, A, n_j); \mathfrak{R}),$$

$\varphi(z)$  fällt also in  $\mathfrak{G}$  mit einer ganzen Spitzenform  $\{\Gamma, -r, v\}$  zusammen.

Wir erkennen daher

**Satz 20.** Es sei die Funktion  $\varphi(\tau)$  in einem zulässigen Fundamentalbereich  $\mathfrak{R}$  von  $\Gamma$  stetig, und es zeige  $|\varphi(\tau)|$  bei Annäherung an die Spitzen von  $\mathfrak{R}$  das durch (145) vorgeschriebene Verhalten. Genügt  $\varphi(\tau)$  für  $z$  in  $\mathfrak{R}$  der Integralgleichung

$$\varphi(z) = \lambda W_\nu(\varphi(\tau), \Omega(\tau, -\bar{z}, 0, A)) \quad (\lambda \neq 0 \text{ konstant}),$$

so stimmt  $\varphi(\tau)$  in  $\mathfrak{R}$  mit einer ganzen Spitzenform  $\{\Gamma, -r, v\}$  überein. Diese Integralgleichung hat also als einzigen von Null verschiedenen Eigenwert die Zahl  $\lambda = \frac{1}{\varepsilon_\nu(v, A, \Gamma)}$ , und ihre sämtlichen Lösungen sind die Formen aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ .

Man kann einen ähnlichen Eindeutigkeitsatz auch für die Lösungen der allgemeineren Gleichung (129) beweisen. Zu diesem Zweck fügen wir den Annahmen über die Stetigkeit der Funktion  $\varphi(\tau)$  und über ihr Verhalten bei Annäherung an die Spitzen von  $\mathfrak{R}$  eine weitere, sehr allgemeine Voraussetzung hinzu. Es sei  $s$  eine feste komplexe Zahl, und es entspreche der Funktion  $\varphi(\tau)$  auf irgendeine Weise eine neue Funktion  $\varphi(\{s, A\}, \tau)$ , die ihrerseits erstens  $\varphi(\tau)$  eindeutig bestimmt, und zweitens mit dem durch (126) erklärten Ausdruck zusammenfällt, wenn  $\varphi(\tau) \subset \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ . Nun gelte für  $z \in \mathfrak{R}$ :

$$\varphi(\{s, A\}, z) = \lambda W_r(\varphi(\tau), \Omega(\tau, -\bar{z}, \bar{s}, A); \mathfrak{R})$$

mit irgendeinem konstanten  $\lambda \neq 0$ . Dann ist nach (141):

$$\varphi(\{s, A\}, z) = \lambda (v(A))^2 \sum_{j=1}^{\mu} g(\{s, A\}, z, A, n_j) W_r(\varphi(\tau), \psi_j(\tau, A, n_j); \mathfrak{R}).$$

Wird

$$\Phi(z) = \lambda (v(A))^2 \sum_{j=1}^{\mu} W_r(\varphi(\tau), \psi_j(\tau, A, n_j); \mathfrak{R}) g(z, A, n_j)$$

gesetzt, so liegt  $\Phi(z)$  in  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ , es gilt mithin

$$\varphi(\{s, A\}, z) = \Phi(\{s, A\}, z) \quad (z \in \mathfrak{R}), \text{ also } \varphi(z) = \Phi(z) \subset \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v).$$

Wir heben unter den Konsequenzen der Metrisierung noch einige spezielle Tatsachen hervor. Ist

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_{\mu}(\tau)\}$$

irgendein Basisvektor über  $\mathfrak{C}_0$  und  $\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{\mu}\}$  irgendein komplexer

konstanter Vektor, so ergibt sich, wenn  $\varphi(\tau) = \mathfrak{x}' q(\tau) = \sum_{j=1}^{\mu} x_j \varphi_j(\tau)$ , in dem Ausdruck

$$(\varphi(\tau), \varphi(\tau)) = \sum_{j,k=1}^{\mu} (\varphi_j(\tau), \varphi_k(\tau)) x_j \bar{x}_k = \mathfrak{x}'(q, q) \bar{\mathfrak{x}}$$

eine positiv-definite Hermitesche Form in den Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_{\mu}$ .

Für ein Hauptssystem  $n = \{n_1, n_2, \dots, n_{\mu}\}$  zur Spitze  $\zeta = A^{-1} \infty$  von  $\Gamma$  erweist sich also

$$v(A) (c_{n_s}(A, A, n_j))$$

als Matrix einer positiv-definiten Hermiteschen Form; wenn  $\mathfrak{O}(\tau, (s, s), A)$  ( $\lambda = \mu$ ) einen Basisvektor über  $\mathfrak{C}_0$  darstellt, ist auch

$$v(A) (\Omega(\{\bar{s}_k, A\}, -\bar{z}_k, z_j, s_j, A))$$

die Matrix einer positiv-definiten Hermiteschen Form. Versteht man unter  $\tau$  einen  $\lambda$ -dimensionalen komplexen Zahlenvektor, unter  $q(\tau)$  irgendeinen Formenvektor über  $\mathbb{C}_0$  mit  $\lambda$  Komponenten, so ist die Hermitesche Form  $\tau'(q, q) \bar{\tau}$  jedenfalls positiv-semidefinit; sie ist dann und nur dann definit, wenn die Komponenten von  $q(\tau)$  linear unabhängig sind.

An zweiter Stelle beweisen wir die am Schluß von § 2 genannte Symmetrieformel. Man hat nach (14) und in den Bezeichnungen von (26), wenn  $\lambda + \kappa > 0$ ,  $\nu + \varrho > 0$ :

$$(G_{-\tau}(\tau, \nu, A, \Gamma, \lambda), G_{-\tau}(\tau, \nu, B, \Gamma, \nu); \Gamma) = e_{\tau}(\nu, B, \Gamma) c_{\nu}^*(\nu, \Gamma, A, B, \lambda) (\nu + \varrho)^{1-\tau},$$

also ( $N', \kappa$  gehören zu  $A$ ;  $N^*, \varrho$  zu  $B$ ):

$$(146) \quad N^{*\tau} \nu(B) c_{\nu}^*(\nu, \Gamma, A, B, \lambda) (\nu + \varrho)^{1-\tau} = N'^{\tau} \nu(A) c_{\lambda}^*(\nu, \Gamma, B, A, \nu) (\lambda + \kappa)^{1-\tau}.$$

Ferner möge eine Bemerkung über algebraische Gebilde mit eindeutigen analytischen Transformationen in sich Platz finden. Wir wählen als Beispiel die Darstellungen, die die Faktorgruppe eines Normalteilers  $\mathfrak{N}$  der Modulgruppe durch die Transformationen der vollen Modulgruppe, ausgeübt auf eine Schar  $\mathbb{C}_0(\mathfrak{N}, -r, 1)$  mit ganzem  $r \geq 1$ , erfährt.

Es enthalte  $\mathfrak{N}$  keine elliptischen Matrizen (man schließe also die wenigen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  mit niedrigen Indexwerten aus, die dieser Forderung widersprechen). Es liege  $-I$  dann und nur dann in  $\mathfrak{N}$ , wenn die Anzahl  $\sigma_0$  der nach  $\mathfrak{N}$  paarweise inäquivalenten Spitzen von  $\mathfrak{N}$  ungerade ist. Für gerades  $\sigma_0$  sollen die normierten parabolischen Erzeugenden in  $\mathfrak{N}$  enthalten sein [(G III), § 8].

Da alle Klassen  $\{S^{-1} \mathfrak{N} S, -r, \nu_s'\}$  zusammenfallen, wenn  $S \in \Gamma(1)$ ,  $r$  ganz,  $\nu = 1$ , so stimmen die Hauptssysteme in zwei Spitzen von  $\mathfrak{N}$ , weil diese einander nach  $\Gamma(1)$  äquivalent sind, miteinander überein. Ist  $q(\tau)$  irgendein Basisvektor über  $\mathbb{C}_0(\mathfrak{N}, -r, 1)$ ,  $S \in \Gamma(1)$ ,  $q(\tau)|S$  der Formenvektor mit den Komponenten  $\varphi_j(\tau)|S$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, \mu$ ), so gilt

$$(147) \quad q(\tau)|S = A(S) q(\tau),$$

wo  $A(S)$  eine gewisse konstante Matrix des Grades  $\mu$  bezeichnet.  $A(S)$  hängt nur von der Nebengruppe von  $\Gamma(1)$  bezüglich  $\mathfrak{N}$  ab, in der  $S$  liegt, und die Matrizen  $A(S)$  bilden die obengenannte Darstellung der Faktorgruppe  $\Gamma(1)|\mathfrak{N}$ . Aus (147) folgt, wenn  $\tau(\tau)$  irgendeinen weiteren Basisvektor über  $\mathbb{C}_0(\mathfrak{N}, -r, 1)$  bezeichnet,

$$A(S) = (q|S, \tau) (q, \tau)^{-1}.$$

Wählt man z. B.  $q(\tau) = g(\tau, A, n)$  und  $r(\tau) = p(\tau, A, n)$  oder  $r(\tau) = g(\tau, A, n)$ , wo  $n$  ein Hauptsystem für die Spitzen von  $\mathfrak{H}$  bezeichnet, so erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} A(S) &= \frac{1}{c_r} (g(\tau, AS, n), p(\tau, A, n)) \\ (148) \quad &= (g(\tau, AS, n), g(\tau, A, n)) (g(\tau, A, n), g(\tau, A, n))^{-1} \\ &= (c_{n_k}(AS, A, n_k)) (c_{n_k}(A, A, n_k))^{-1}. \end{aligned}$$

Wir kehren zu den allgemeinen Fragestellungen über Poincarésche Reihen zurück und untersuchen hier gewisse Reihentypen, die man formal als lineare Mannigfaltigkeiten im Bereich aller Poincaréschen Reihen zu bezeichnen hätte. Wir beschränken uns dabei, um uferlose Bildungen zu vermeiden, auf die folgenden drei Kategorien:

Typus I. Zu einer Spitze  $\zeta = A^{-1}\infty$  von  $\Gamma$  und mit beliebigen komplexen  $\lambda_v$  ( $v$  ganz und  $\geq 0$ ) bestimme man die in einer Umgebung eines Punktes  $\tau_0$  von  $\mathfrak{H}$  konvergente unendliche Linearkombination

$$g_{-,r}(\tau, v, A, \Gamma|F) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v g_{-,r}(\tau, v, A, \Gamma, v),$$

in deren Bezeichnung die  $\lambda_v$  durch die formale Potenzreihe

$$F(w) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v w^v$$

zusammengefaßt werden.

Typus II. Es sei durch  $s = s(u)$  ( $-\infty < u < +\infty$ ) eine stetige Kurve  $\mathfrak{L}$  in der komplexen  $s$ -Ebene vorgelegt, deren jeder Abschnitt, gegeben durch  $a \leq u \leq b$ , rektifizierbar ist. Ferner sei  $f(s)$  eine auf  $\mathfrak{L}$  stetige Funktion von  $s$ . Man bilde das Integral

$$\Phi(\tau, z, \mathfrak{L}, f, A) = \int_{\mathfrak{L}} f(s) \Omega(\tau, z, s, A) ds,$$

von dem angenommen werde, daß es existiert, wenn  $\tau$  in einer Umgebung eines Punktes  $\tau_0$  von  $\mathfrak{H}$  liegt und  $z$  etwa einer Menge  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$  angehört.

Typus III. Es sei  $z_1, z_2, z_3, \dots$  eine beliebige unendliche Punktfolge in  $\mathfrak{H}$ ;  $s_1, s_2, s_3, \dots$  und  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  seien zwei beliebige unendliche Folgen komplexer Zahlen. Man bilde die Linearkombination

$$P(\tau, (z), (s), (\xi), A) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \Omega(\tau, z_n, s_n, A),$$

von der angenommen werde, daß sie für alle  $\tau$  in der Umgebung eines Punktes  $\tau_0$  von  $\mathfrak{H}$  konvergiert.

Eine erhebliche Verallgemeinerung der Reihen des zweiten Typus, die aber aus den genannten Gründen außer Betracht bleiben soll, ergibt sich, wenn man in  $\Omega(\tau, z, s, A)$  die Variablen  $z$  und  $s$  als Funktionen endlich vieler Parameter ansetzt, die so entstehende Funktion mit einer vorgegebenen beliebigen Funktion der Parameter multipliziert und das Produkt über ein Gebiet des Parameterraumes integriert. Diese Verallgemeinerungen lassen sich nach dem gleichen Verfahren wie die Poincaréschen Reihen des zweiten Typus kennzeichnen und in die Darstellungstheorie einordnen.

Die Reihen des Typus I sind durch Satz 13 gekennzeichnet. Zur Kennzeichnung der Reihen des Typus II sei  $\mathfrak{L}^*$  ein endlicher Abschnitt von  $\mathfrak{L}$ , gegeben durch  $s = s(u)$ ,  $a \leq u \leq b$ . Da  $s(u)$  auf  $\mathfrak{L}^*$  beschränkt ist, konvergiert die Darstellung (128) von  $\Omega(\tau, z, s, A)$  auf  $\mathfrak{L}^*$  gleichmäßig; es ist also

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, z, \mathfrak{L}^*, f, A) &= \int_{\mathfrak{L}^*} f(s) \Omega(\tau, z, s, A) ds \\ &= (c_1(-z) + a_2)^{-r} \sum_{v=0}^{\infty} \left( \int_{\mathfrak{L}^*} f(s) \left( \frac{-2\pi i}{N'} \right)^v (v+\eta)^s ds \right) e^{-2\pi i(v+\eta) \frac{A(-z)}{N'}} g(\tau, A, v) \end{aligned}$$

eine analytische Funktion von  $\tau$  und  $z$ , wenn  $\tau \in \mathfrak{H}$ ,  $z \in \mathfrak{H}$  und bei festem  $z$  eine Form aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ . Bezeichnet  $\varphi(\tau)$  eine beliebige Form aus  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ , so gilt nach (121):

$$\begin{aligned} (\varphi(\tau), \Phi(\tau, z, \mathfrak{L}^*, f, A)) &= e_r(v, A, \Gamma) (a_1(-\bar{z}) + a_2)^{-r} \times \\ (149) \quad &\times \sum_{v=0}^{\infty} \left( \int_{\mathfrak{L}^*} \overline{f(s)} \left( \frac{2\pi i}{N'} \right)^{\bar{s}} (v+\eta)^{\bar{s}} d\bar{s} \right) e^{2\pi i(v+\eta) \frac{A(-\bar{z})}{N'}} b_r(A) \\ &= e_r \int_{\mathfrak{L}^*} \overline{f(s)} \varphi(\{\bar{s}, A\}, -\bar{z}) d\bar{s}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck auf der rechten Seite von (149) stellt eine für  $z$  in  $\mathfrak{H}$  reguläre analytische Funktion von  $-\bar{z}$  dar. Die Gesamtheit der zu den verschiedenen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  bei festen  $\mathfrak{L}^*, f$  auf diese Weise erklärten Funktionen von  $-\bar{z}$  bildet eine lineare Schar von einem Range  $\leq \mu$ .

Andererseits läßt sich der Hilfssatz in (E), § 1 auf die vorliegenden Integrale  $\Phi(\tau, z, \mathfrak{L}, f, A)$  übertragen und liefert hier bei Verwendung der Bezeichnung  $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}_{a,b}^*$  das Ergebnis: Der Doppellimes

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_{\mathfrak{L}_{a,b}^*} f(s) \Omega(\tau, z, s, A) ds = \int_{\mathfrak{L}} f(s) \Omega(\tau, z, s, A) ds = \Phi(\tau, z, \mathfrak{L}, f, A)$$

existiert für alle  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$  und bei festem  $z$  auf  $\mathfrak{G}$  gleichmäßig für alle  $\tau$  eines jeden zulässigen Bereiches  $\mathfrak{B}$ ; er stellt eine ganze Spitzenform  $\{\Gamma, -r, v\}$  in der Variablen  $\tau$  dar. Daher existiert nach (149) bei festem  $z$  auf  $\mathfrak{G}$  auch der Doppellimes

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_{\mathfrak{G}_{a,b}} \overline{f(s)} \varphi(\{\bar{s}, A\}, -\bar{z}) d\bar{s} = \int_{\mathfrak{G}} \overline{f(s)} \varphi(\{\bar{s}, A\}, -\bar{z}) d\bar{s},$$

und es gilt für jedes  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$ :

$$(150) \quad (\varphi(\tau), \Phi(\tau, z, \Omega, f, A)) = e_r \int_{\mathfrak{G}} \overline{f(s)} \varphi(\{\bar{s}, A\}, -\bar{z}) d\bar{s}.$$

Also steht  $\Phi(\tau, z, \Omega, f, A)$  auf allen und nur denjenigen Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  ( $\Gamma, -r, v$ ) senkrecht, für die

$$\int_{\mathfrak{G}} \overline{f(s)} \varphi(\{\bar{s}, A\}, -\bar{z}) d\bar{s} = 0$$

ist, und  $\Phi(\tau, z, \Omega, f, A)$  ist durch diese Eigenschaft bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt (vgl. den Beweis von Satz 13).

Die Reihen des Typus III schließlich konvergieren offenbar für alle  $\tau$  in  $\mathfrak{H}$ , jede von ihnen stellt eine Form aus  $\mathfrak{C}_0$  dar, und die Konvergenz ist auf jedem zulässigen Bereich gleichmäßig. Daher gilt für jedes  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$ :

$$(151) \quad (\varphi(\tau), P(\tau, (z), (s), (\xi), A)) = e_r \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\xi}_m \varphi(\{\bar{s}_m, A\}, -\bar{\xi}_m).$$

Die Konvergenz der rechten Seite folgt aus den Annahmen über die Poincarésche Reihe  $P(\tau, (z), (s), (\xi), A)$ . Diese steht auf allen Formen  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  senkrecht, für die die rechte Seite von (151) verschwindet, und sie ist dadurch bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Nach diesen Kennzeichnungen können wir das in der Einleitung erwähnte Problem der analytischen Darstellung der Erzeugenden gewisser Teilscharen von  $\mathfrak{C}_0$  durch Poincarésche Reihen exakt formulieren. Wir gehen zu diesem Zweck aus von einer Teilschar  $\mathfrak{C}^*$  von  $\mathfrak{C}_0$ , die durch lineare homogene Gleichungen zwischen den im allgemeinen kontinuierlichen Ableitungen der allgemeinen Form der Schar in endlich vielen Punkten fixiert ist. Wir schreiben dabei diese Bedingungen von der Form  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$  auf ihre Transformierte  $\varphi_A(\tau)$  um.

Es seien also vorgelegt:

I\*. Endlich viele Folgen  $\lambda_{j,v}$  ( $v$  ganz und  $\geq 0$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n_1$ ). Für jede Folge  $\lambda_v = \lambda_{j,v}$  soll die Bedingung erfüllt sein, welche an die Linearkombination  $g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F)$  des ersten Typus gestellt wurde.

II\*. Endlich viele Punkte  $z_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n_2$ ) in  $\mathfrak{H}$ , zu jedem von ihnen eine stetige Kurve  $\mathfrak{U}_k$  in der komplexen  $s$ -Ebene und eine auf  $\mathfrak{U}_k$  stetige Funktion  $f_k(s)$ . Für jedes  $k$  sollen  $z_k, \mathfrak{U}_k, f_k(s)$  der Bedingung genügen, die an die Poincarésche Reihe  $\Phi(\tau, z_k, \mathfrak{U}_k, f_k, A)$  (bei festem  $z = z_k$ ) gestellt wurde.

III\*. Endlich viele Folgen komplexer Zahlen  $z_{h,m}, s_{h,m}, \xi_{h,m}$  mit  $z_{h,m} \in \mathfrak{H}$  ( $m$  ganz und  $\geq 1, h = 1, 2, 3, \dots, n_3$ ). Für jedes  $h$  mögen die drei Folgen der Bedingung genügen, die an die Poincarésche Reihe  $P(\tau, (z), (s), (\xi), A)$  gestellt wurde.

Sei ferner  $\varphi(\tau) \in \mathfrak{C}_0$  und in den Bezeichnungen (82)

$$\varphi(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{\frac{2\pi i(n+\eta)}{N'} \tau}$$

ihre Entwicklung in der Spitze  $\zeta = A^{-1} \infty$ . Wir setzen  $\psi(\tau) = \varphi_A(\tau)$ , also

$$\psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{\frac{2\pi i(n+\eta)}{N'} \tau}, \quad \varphi(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \psi(A\tau)$$

und schreiben  $\psi^{(s)}(\tau)$  für die kontinuierliche Ableitung der Ordnung  $s$  von  $\psi(\tau)$ , so daß

$$\psi^{(s)}(\tau) = \left(\frac{2\pi i}{N'}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n (n+\eta)^s e^{\frac{2\pi i(n+\eta)}{N'} \tau} \quad \left(\arg \frac{2\pi i}{N'} = \frac{\pi}{2}\right).$$

Nunmehr sei  $\mathfrak{C}^*$  als die Schar der ganzen Spitzenformen  $\varphi(\tau) \in \{\Gamma, -r, v\}$  erklärt, die den  $n_1 + n_2 + n_3$  linearen homogenen Gleichungen

$$(152) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{j,r} b_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n_1),$$

$$(153) \quad \int_{\mathfrak{U}_k} f_k(s) \psi^{(s)}(z_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n_2),$$

$$(154) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \xi_{h,m} ((-a_1)z_{h,m} + a_0)^r \psi^{(s_{h,m})}(z_{h,m}) = 0 \quad (h = 1, 2, 3, \dots, n_3)$$

genügen. Dann besagt der Darstellungssatz, der sich aus den oben gewonnenen Kennzeichnungen der drei Reihentypen unmittelbar ergibt, folgendes:

Man betrachte die zu  $\mathfrak{C}^*$  orthogonale Schar  $\mathfrak{D}^*$ , also die Schar derjenigen ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r, v\}$ , welche auf allen Formen von  $\mathfrak{C}^*$  senkrecht

stehen. Ein System von Erzeugenden von  $\mathfrak{D}^*$  läßt sich explizit bestimmen. Man erhält es in den Poincaréschen Reihen (155), (156), (157):

$$(155) \quad g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma | \overline{F}_j) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n_1),$$

wo  $\overline{F}_j(w)$  die symbolische Potenzreihe  $\sum_{r=0}^{\infty} \overline{\lambda}_{j,r} w^r$  bezeichnet.

$$(156) \quad \Phi(\tau, -A^{-1} \overline{z}_k, \overline{\vartheta}_k, \overline{f}_k, A) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n_2).$$

Hier bezeichnet  $\overline{\vartheta}_k$  die Kurve, die durch  $s = \overline{s}_k(u)$  ( $u$  reell) gegeben ist, wenn  $\vartheta_k$  durch  $s = s_k(u)$  dargestellt wird, und  $\overline{f}_k(s)$  die Funktion

$$\overline{f}_k(s) = \overline{f}_k(\overline{s}) \quad (1 \leq k \leq n_2; s \in \overline{\vartheta}_k).$$

$$(157) \quad P(\tau, (-A^{-1} \overline{z}_{h,m}), (\overline{s}_{h,m}), (\overline{\xi}_{h,m}), A) \quad (h = 1, 2, 3, \dots, n_3).$$

Wir formulieren diesen Sachverhalt kurz zusammenfassend als

**Satz 21.** Es sei  $\mathfrak{C}^*$  die Schar derjenigen ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -r, v\}$ , deren Entwicklungskoeffizienten und kontinuierliche Ableitungen den homogenen linearen Gleichungen (152), (153), (154) genügen. Bezeichnet  $\mathfrak{D}^*$  die Schar der zu allen Formen von  $\mathfrak{C}^*$  orthogonalen Formen aus  $\mathfrak{C}_0$ , so wird  $\mathfrak{D}^*$  durch die explizit gegebenen Poincaréschen Reihen (155), (156), (157) erzeugt.  $\mathfrak{C}^*$  besteht also aus allen und nur denjenigen Formen von  $\mathfrak{C}_0$ , welche auf den genannten Poincaréschen Reihen senkrecht stehen. Dabei entsprechen einander getrennt die linearen Gleichungen und die Poincaréschen Reihen in der angegebenen Nummernfolge der zitierten Formeln.

Dieser Satz umfaßt nicht nur die Fälle, in denen die Formen von  $\mathfrak{C}^*$  mit den Multipla eines gegebenen Divisors zusammenfallen, sondern auch alle Fälle, in denen  $\mathfrak{C}^*$  durch Lückenbedingungen für die Potenzreihen in endlich vielen Punkten oder sogar durch solche Bedingungen bestimmt wird, welche in allgemeinen Scharen  $\mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  den Bedingungen von (J II), S. 64 entsprechen.

## § 6.

### Metrisierung der Abelschen Differentiale im Zusammenhang mit Integrationsperioden.

In diesem Paragraphen sei  $\Gamma$  eine völlig beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art. Wir untersuchen die Schar  $\mathfrak{S}$  der ganzen Formen  $\{\Gamma, -2, 1\}$ ; deshalb bedeute der Ausdruck „Form“ eine ganze Form  $\{\Gamma, -2, 1\}$  und der Ausdruck „Spitzenform“ eine Form aus  $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -2, 1)$ . Im übrigen

benutzen wir, ohne jedesmal zu zitieren, die Bezeichnungen und die Methoden aus (G III), § 5.

Es sei  $\varphi(\tau)$  eine Form,  $\tau_0$  ein fester Punkt in  $\mathfrak{H}$ . Wir erklären das  $\varphi(\tau)$  zugeordnete Abelsche Integral durch

$$\chi(\tau) = \chi(\tau, \tau_0; \varphi) = \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(z) dz,$$

wo längs einer stetigen, rektifizierbaren Kurve in  $\mathfrak{H}$  zu integrieren ist. Wenn  $\varphi(\tau) \in \mathfrak{S}_0$ , so kann auch von einer Spitze  $\tau_0$  von  $\Gamma$  aus oder in eine Spitze  $\tau$  von  $\Gamma$  hinein integriert werden. Dabei beschränkt man die Integrationswege in der Nähe einer Spitze zweckmäßig auf einen zulässigen Bereich und verlangt, daß sie in der Nähe der Spitze nach Umschreibung auf die zugehörige Ortsvariable stetig und rektifizierbar sind.

Für festes  $\tau_0$  bilden die Funktionen  $\chi(\tau, \tau_0; \varphi)$  eine zu  $\mathfrak{S}$  linear-isomorphe Schar  $\mathfrak{B}$ ; die Teilschar  $\mathfrak{B}_0$ , die dabei  $\mathfrak{S}_0$  entspricht, besteht aus allen und nur denjenigen Funktionen  $\chi(\tau) \in \mathfrak{B}$ , die in den Spitzen von  $\Gamma$  endliche Werte haben. Dies sind genau die im Punkte  $\tau = \tau_0$  verschwindenden Integrale erster Gattung von  $\Gamma$ . Bezeichnet [wie in (G III)]  $\sigma$  die Anzahl der paarweise inäquivalenten Spitzen von  $\Gamma$ , und hat die Form in der Spitze  $A^{-1} \infty$  von  $\Gamma$  die Entwicklung [(G III), (2)]

$$(158) \quad \varphi(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A) e^{2\pi i n \frac{A\tau}{N}},$$

so ist nach (G IV), § 9, 2:  $\frac{1}{2\pi i} N b_0(A)$  das logarithmische Residuum des  $\varphi(\tau)$  zugeordneten Abelschen Integrals  $\chi(\tau)$  von dritter Gattung in der Spitze  $A^{-1} \infty$ . Also gilt, wenn

$$P_j = A_j^{-1} U^{N_j} A_j, \quad (1 \leq j \leq \sigma)$$

die parabolischen Matrizen eines kanonischen Erzeugendensystems von  $\Gamma$  durchläuft,

$$(159) \quad \sum_{j=1}^{\sigma} N_j b_0(A_j) = 0.$$

Daher haben  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{B}$  den Rang  $p + \sigma - 1$ , wenn  $\sigma \geq 1$ .

Aus den Relationen

$$\chi(\tau_1, \tau_1; \varphi) + \chi(\tau, \tau_0; \varphi) = \chi(\tau_1, \tau_0; \varphi),$$

$$\chi(L\tau, L\tau_0; \varphi) = \chi(\tau, \tau_0; \varphi) \quad (L \subset \Gamma)$$

folgt

$$(160) \quad \chi(L\tau, \tau_0; \varphi) = \chi(\tau, \tau_0; \varphi) + \eta(L; \varphi),$$

wo  $\eta(L; \varphi)$  die  $L$ -Periode des Integrals  $\chi(\tau, \tau_0; \varphi)$  genannt wird.  $\eta(L; \varphi)$  hat den für alle  $\tau_0$  in  $\mathfrak{H}$  übereinstimmenden Wert

$$(160a) \quad \eta(L; \varphi) = \chi(L\tau_0, \tau_0; \varphi)$$

und genügt den Funktionalgleichungen

$$(161) \quad \eta(L_1 L_2; \varphi) = \eta(L_1; \varphi) + \eta(L_2; \varphi) \text{ für alle } L_1, L_2 \text{ aus } \Gamma.$$

Nach (158) gestattet  $\chi(\tau, \tau_0; \varphi)$  in der Nähe der Spitze  $A^{-1}\infty$  die Darstellung

$$\chi(\tau, \tau_0; \varphi) = b_0(A) \cdot A\tau + b_0^*(A) + \frac{N}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(A)}{n} e^{2\pi i n \frac{A\tau}{N}}$$

mit einem gewissen konstanten  $b_0^*(A)$ . Daher kommt mit Rücksicht auf (159):

$$(162) \quad \eta(P; \varphi) = N b_0^*(A), \quad \sum_{j=1}^g \eta(P_j; \varphi) = 0.$$

Bezeichnet ferner  $E$  eine elliptische Matrix von  $\Gamma$  mit dem Fixpunkt  $\omega$ , so erhält man aus (160a) ( $\tau = \tau_0 = \omega$ ,  $L = E \in \Gamma$ ) die Gleichung  $\eta(E; \varphi) = 0$ .

Schließlich kann man die Perioden  $\eta(G_v; \varphi)$  und  $\eta(H_v; \varphi)$  durch Integrale über die Kanten von  $\mathfrak{R}$  ausdrücken. Es wird nach (161) und (G III), (16)

$$(163) \quad \begin{aligned} \eta(G_v; \varphi) &= \chi(z_{v,1}, z_{v,2}; \varphi) = \chi(z_{v,4}, z_{v,3}; \varphi) & (1 \leq v \leq p), \\ \eta(H_v; \varphi) &= \chi(z_{v,0}, z_{v,1}; \varphi) = \chi(z_{v,3}, z_{v,2}; \varphi) & (1 \leq v \leq p). \end{aligned}$$

Nun seien  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$  zwei Formen, und es sei  $\varphi_1 \cdot \varphi_2$  eine ganze Spitzenform (der Klasse  $\{\Gamma, -4, 1\}$ ). Wir setzen

$$w_1(\tau) = \chi(\tau, \tau_0; \varphi_1), \quad w_2(\tau) = \chi(\tau, \tau_0; \varphi_2)$$

und bilden das im negativen Sinne über den Rand  $\mathfrak{R}'$  von  $\mathfrak{R}'$  zu erstreckende Integral

$$\int_{\mathfrak{R}'} \overline{w_1} dw_2 = \int_{\mathfrak{R}'} \overline{w_1(\tau)} \varphi_2(\tau) d\tau.$$

Wird vorübergehend wie früher  $\tau = x + iy$  ( $x$  reell,  $y > 0$ ) geschrieben und nun  $w_m(\tau)$  gemäß  $w_m(\tau) = u_m(x, y) + iv_m(x, y)$  mit reellen  $u_m(x, y)$ ,  $v_m(x, y)$  ( $m = 1, 2$ ) zerlegt, so handelt es sich um

$$\int_{\mathfrak{R}'} \overline{w_1} dw_2 = \int_{\mathfrak{R}'} (u_1 - iv_1)(u_{2x} + iv_{2x})(dx + idy),$$

und dieses Integral läßt sich unter Anwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sowie der Greenschen Formel der Ebene elementar in

$$-2i \iint_{\mathfrak{R}} \overline{\varphi_1(\tau)} \varphi_2(\tau) dx dy$$

überführen. Daher existiert für einen beliebigen Grenzübergang  $\mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}$ , also  $\mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}$  (der aber unter Einhaltung der Konstruktionsvorschrift für  $\mathfrak{R}'$  zu vollziehen ist) der Limes

$$(164) \quad \lim_{\mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}'} \overline{w_1} dw_2 = \int_{\mathfrak{R}} \overline{w_1} dw_2 = -2i(\varphi_2, \varphi_1).$$

Andererseits kann man das Integral  $\int_{\mathfrak{R}} \overline{w_1} dw_2$  in die Integrale über die einzelnen Randkanten zerlegen und alsdann die Integrale über zwei einander nach  $\Gamma$  äquivalente Randkanten zusammenfassen. Bei der Durchführung dieses Prozesses treten die Perioden von  $w_1$  und  $w_2$  auf; wir schreiben

$$\eta(L; \varphi_m) = \eta_m(L) \quad (L \subset \Gamma, m = 1, 2).$$

Ferner sollen  $x$  und  $y$  wieder die Bedeutung aus (G III) erhalten; von der Zerlegung  $\tau = x + iy$  wird nicht mehr Gebrauch gemacht.

Man findet zunächst

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} &= \int_x^t - \int_x^{t'} + \int_{x'}^t = \int_{x'}^t (\overline{w_1} + \overline{\eta_1(P)}) \varphi_2 d\tau - \int_{x'}^{t'} \overline{w_1} \varphi_2 d\tau + \int_{x'}^t \overline{w_1} \varphi_2 d\tau \\ &= \int_{x'}^t \overline{w_1} \varphi_2 d\tau + \overline{\eta_1(P)} (w_2(t') - w_2(x)). \end{aligned}$$

Es seien die Entwicklungen von  $w_1(\tau)$  und  $\varphi_2(\tau)$  in der Spitze  $A^{-1}\infty$  von  $\Gamma$  durch

$$w_1(\tau) = d_0^*(A) \cdot A\tau + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^*(A) t^n, \quad \varphi_2(\tau) = (a_1\tau + a_2)^{-2} \left( b_0(A) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(A) t^n \right)$$

gegeben; dann verschwindet  $d_0^*(A) b_0(A)$ . Transformiert man das Integral

$\int_{x'}^t \overline{w_1} \varphi_2 d\tau$  auf die Variable  $\tau^* = A\tau$ , so hat man in großer Höhe  $\Im m \tau^*$  horizontal über eine Strecke der Länge  $N$  zu integrieren. Man erkennt, daß beim Grenzübergang  $x' \rightarrow s = A^{-1}\infty$  (der unter Einhaltung der Konstruktionsvorschrift für  $\mathfrak{R}'$  zu vollziehen ist) alle Bestandteile von  $w_1(\tau) \varphi_2(\tau)$

exponentiell gegen Null streben mit Ausnahme von  $N \overline{d_0(A)} b_0(A)$ . Daher existiert nach (162)

$$\lim_{s' \rightarrow s} \int_{\mathfrak{A}} \overline{w_1} \varphi_2 d\tau = \eta_2(P) \overline{w_1(s)} - \overline{\eta_1(P)} w_2(s) + \overline{\eta_1(P)} w_2(\xi').$$

Die rechte Seite ist so zu verstehen, daß jedes Glied verschwindet, falls der zugehörige Faktor  $\eta_2(P)$  bzw.  $\overline{\eta_1(P)}$  verschwindet, auch wenn der andere Faktor keinen Sinn hat.

Ferner ergibt sich mit Rücksicht auf  $\eta_1(E) = 0$ :

$$\int_{\mathfrak{B}} \overline{w_1} \varphi_2 d\tau = \int_y^y - \int_{y'}^{y'} + \int_{y'}^y = \int_{y'}^y \overline{w_1} \varphi_2 d\tau.$$

Geht hier im soeben genannten Sinne  $y' \rightarrow \omega$ , so strebt  $\int_{\mathfrak{B}} \overline{w_1} \varphi_2 d\tau$  gegen Null.

Schließlich erhält man aus (163) und (G III), (11):

$$\begin{aligned} \int_{z_4}^{z_0} \overline{w_1} \varphi_2 d\tau &= \int_{z_4}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} + \int_{z_1}^{z_0} - \int_{z_2}^{z_3} = \int_{z_1}^{z_2} \overline{\eta_1(H)} \varphi_2(\tau) d\tau + \int_{z_2}^{z_3} \overline{\eta_1(G)} \varphi_2(\tau) d\tau \\ &= \overline{\eta_1(G)} \eta_2(H) - \overline{\eta_1(H)} \eta_2(G). \end{aligned}$$

Durch den Vergleich dieser drei Teilresultate mit (164) gewinnt man die Formel

$$\begin{aligned} -2i(\varphi_2, \varphi_1) &= \sum_{j=1}^a \left\{ \eta_2(P_j) \overline{w_1(s_j)} - \overline{\eta_1(P_j)} w_2(s_j) \right\} + \sum_{j=1}^a \overline{\eta_1(P_j)} w_2(\xi_j') \\ &\quad + \sum_{j=1}^a \left\{ \overline{\eta_1(G_j)} \eta_2(H_j) - \overline{\eta_1(H_j)} \eta_2(G_j) \right\}. \end{aligned}$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite läßt sich wegen (162) und der Gleichung  $\xi_j' = S_{j+1, n} \xi_1$  [(G III)] in

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^a \overline{\eta_1(P_j)} (w_2(\xi_j') - w_2(\xi_1)) &= \sum_{j=1}^{a-1} \overline{\eta_1(P_j)} \eta_2(S_{j+1, n}) = \sum_{j=1}^a \overline{\eta_1(P_j)} \sum_{k=j+1}^a \eta_2(P_k) \\ &= - \sum_{j=1}^a \overline{\eta_1(P_j)} \sum_{k=1}^{j-1} \eta_2(P_k) = -\frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^a (\overline{\eta_1(P_j)} \eta_2(P_k) - \overline{\eta_1(P_k)} \eta_2(P_j)) \end{aligned}$$

überführen. Dies gibt die gesuchte Darstellung des Skalarprodukts  $(\varphi_1, \varphi_2)$  durch die Perioden der den Formen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zugeordneten Abelschen Integrale:

$$(165) \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \{w_1(s_j) \overline{\eta_2(P_j)} - \overline{w_2(s_j)} \eta_1(P_j)\} \\ - \frac{1}{4i} \sum_{\substack{j,k=1 \\ k < j}}^n \{ \eta_1(P_j) \overline{\eta_2(P_k)} - \eta_1(P_k) \overline{\eta_2(P_j)} \} \\ + \frac{1}{2i} \sum_{r=1}^p \{ \eta_1(G_r) \overline{\eta_2(H_r)} - \overline{\eta_2(G_r)} \eta_1(H_r) \}$$

Wendet man dasselbe Verfahren, das zu dieser Formel führte, auf das Integral  $\int_{\mathfrak{K}'} w_1 \varphi_2 d\tau$  an, so gewinnt man die Riemannschen Bilinearrelationen in Gestalt derjenigen Gleichungen, die aus (165) entstehen, wenn man die linke Seite durch Null ersetzt und in den Summen auf der rechten Seite alle Querstriche wegläßt (oder alle noch nicht quergestrichenen Symbole mit einem Querstrich versieht). Man kann daher für die Gleichung (165) noch vier weitere Gestalten angeben. Sie werden aus (165) erhalten, indem man in den Summen auf der rechten Seite folgende Abänderungen vornimmt: Man ersetzt

1. Alle Symbole  $\overline{Z}$  (mit einem Querstrich) durch  $2 \Re Z$ .
2. Alle Symbole  $\overline{Z}$  (mit einem Querstrich) durch  $-2i \Im Z$ .
3. Alle Symbole  $Z$  (ohne Querstrich) durch  $2 \Re Z$ .
4. Alle Symbole  $Z$  (ohne Querstrich) durch  $2i \Im Z$ .

Ferner lassen sich auch Real- und Imaginärteil des Skalarprodukts durch je zwei Bilinearformen von der Gestalt der rechten Seite von (165) ausdrücken. Man gewinnt diese Darstellungen, wenn man dort die quergestrichenen und die ungestrichenen Symbole gleichzeitig in passender Weise durch ihre Real- oder Imaginärteile ersetzt und die Faktoren vor den Summenzeichen entsprechend modifiziert.

Der Satz, daß die bekannte, mit den Perioden der Integrale erster Gattung gebildete Hermitesche Form positiv-definit ist, bedeutet nach (165), daß für jede nicht identisch verschwindende ganze Spitzenform  $\varphi(\tau) \in \{\Gamma, -2, 1\}$  die Relation  $(\varphi, \varphi) > 0$  erfüllt ist. (Das oben dargestellte Verfahren zur Berechnung des Skalarprodukts  $(\varphi, \varphi)$  ist mit dem Riemannschen Beweis für den genannten Satz identisch.)

Die in § 4 aufgestellte Metrisierung kann in der Schar der ganzen Spitzenformen  $\{\Gamma, -2, 1\}$  durch

$$(166) \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^p \{ \eta_1(G_j) \overline{\eta_2(H_j)} - \overline{\eta_2(G_j)} \eta_1(H_j) \}$$

erklärt werden. Daher treten neben die bei gegebenem Querschnittssystem eindeutige transzendente Normierung der Integrale erster Gattung unendlich viele vom Querschnittssystem unabhängige „orthogonale Normierungen“, die den normierten Orthogonalbasen der Schar  $\mathfrak{S}_0$  entsprechen, und die untereinander durch die Gesamtheit der unitären Transformationen in  $p$  Variablen zusammenhängen. Diese Transformationen führen sowohl die rechte Seite der letzten Gleichung als auch die Bilinearrelationen

$$(167) \quad \sum_{j=1}^p \{ \eta_1(G_j) \eta_2(H_j) - \eta_2(G_j) \eta_1(H_j) \} = 0$$

in sich über.

Die metrischen Eigenschaften der transzendent normierten Basis der Schar  $\mathfrak{S}_0$  lassen sich sehr einfach bestimmen. Es sei  $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_p(\tau)$  die transzendent normierte Basis; die transzendente Normierung bedeute

$$\eta(G_k; \varphi_j) = 2\pi i \delta_{j,k} \quad (j, k = 1, 2, 3, \dots, p),$$

und es werde  $\eta(H_k; \varphi_j) = \tau_{j,k}$  gesetzt. Dann erhält man aus (166):

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \pi (\overline{\tau_{k,j}} + \tau_{j,k}) = 2\pi \operatorname{Re} \tau_{j,k} \quad (j, k = 1, 2, 3, \dots, p).$$

Die soeben entwickelte Theorie ruht natürlich auf der Grundlage, die durch die Existenzsätze der allgemeinen Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen gegeben wird. Um nun aber die in Rede stehenden Funktionen, also die Abelschen Differentiale und Integrale [(E), § 3] durch Poincarésche Reihen explizit darzustellen, bedarf es, wie die Ausführungen des § 3 zeigen, offenbar ganz anderer Methoden. Ob das im § 3 geübte Vorgehen sich bei allgemeinen Grenzkreisgruppen  $\Gamma$  von erster Art mit parabolischen Substitutionen bewähren wird, steht dahin. Es sei indessen darauf hingewiesen, daß sich die Existenz derjenigen automorphen Formen, die für  $r > 2$ ,  $|v| = 1$  und für  $\Gamma = \Gamma(N)$ ,  $r = 2$ ,  $v = 1$  durch die Poincaréschen Reihen  $g_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, v)$  realisiert werden, in beliebigen Formenklassen  $\{\Gamma, -r, v\}$  ( $r > 0$ ,  $|v| = 1$ ) rein abstrakt erkennen läßt. (Dabei wird wie bisher vorausgesetzt, daß  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Substitutionen sei.)

Man gebe zu diesem Zweck bei reellem  $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$  mit  $\|A\| = 1$ , für welches  $\zeta = A^{-1} \infty$  eine parabolische Spitze von  $\Gamma$  ist, die Konstante

$$e_r = e_r(v, A, \Gamma)$$

willkürlich, aber von Null verschieden vor. Z. B. kann der früher erhaltene Wert  $e_r$  gewählt werden, wenn  $r \neq 1$ . Die Formenschar  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$  habe den Rang  $\mu \geq 1$ , und es sei in den Bezeichnungen (132a)  $(\lambda = \mu) q(\tau)$  ein Basisvektor über  $\mathfrak{C}_0$ . Hat man eine Form  $\varphi_r(\tau)$  ( $v$  ganz und  $\geq 0$ ) in  $\mathfrak{C}_0$  gefunden, für welche

$$(\varphi_j(\tau), \varphi_v(\tau)) = e_r b_{j,v}, \quad (1 \leq j \leq \mu, v \geq 0, v \text{ fest}),$$

so gilt offenbar für jede Form

$$(168) \quad \varphi(\tau) = (a_1\tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A) e^{\frac{2\pi i(n+\frac{1}{2})\tau}{N}}$$

aus  $\mathfrak{C}_0$  die Gleichung  $(\varphi(\tau), \varphi_v(\tau)) = e_r b_v(A)$ . Hier führt der Ansatz

$$\varphi_v(\tau) = \mathbf{x}'_v q(\tau) \quad (\text{Matrizenprodukt mit konstantem } \mathbf{x}_v)$$

auf die Bestimmung

$$(169) \quad (q, q) \overline{\mathbf{x}}_v = e_r b_v,$$

und diese erweist sowohl die Existenz einer Form  $\varphi_v(\tau)$  mit der gewünschten Eigenschaft  $(\varphi, \varphi_v) = e_r b_v(A)$  in  $\mathfrak{C}_0$ , als auch, daß  $\varphi_v(\tau)$  durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Die Invarianz des Ausdrucks für  $\varphi_v(\tau)$  gegenüber Basisänderungen ist leicht direkt einzusehen. Denn der Übergang  $q(\tau) \rightarrow A q(\tau)$  mit  $\|A\| \neq 0$  zieht die Transformationen

$$(q, q) \rightarrow A (q, q) \overline{A}', \quad \mathbf{x}_v \rightarrow A'^{-1} \mathbf{x}_v, \quad b_v \rightarrow A b_v$$

nach sich. Wir erkennen also

**Satz 22.** Es sei  $\Gamma$  eine beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Substitutionen,  $r > 0$ ,  $v$  ein Multiplikatorsystem zu  $\Gamma$  und  $-r$ , das nur Werte des Betrages Eins annimmt; die Schar  $\mathfrak{C}_0$  der zugehörigen ganzen Spitzenformen habe positiven Rang. Dann gibt es zu jedem ganzen  $v \geq 0$  eine und nur eine Form  $\varphi_v(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$ , welche mit jedem  $\varphi(\tau)$  aus  $\mathfrak{C}_0$ , gegeben durch (168), die Gleichung

$$(\varphi(\tau), \varphi_v(\tau)) = e_r(v, A, \Gamma) b_v(A)$$

mit willkürlich vorgegebenem  $e_p(v, A, \Gamma) \neq 0$  erfüllt. Bezeichnet  $q(\tau)$  irgendeinen Basisvektor über  $\mathbb{C}_0$  mit der Entwicklung (132a), so findet man  $\psi_p(\tau) = x'_p q(\tau)$ , wo der konstante Vektor  $x_p$  durch (169) bestimmt ist.

Im Falle  $\Gamma = \Gamma(N)$  wird die Anwendung der Metrisierung auf die Poincaréschen Reihen  $\{\Gamma(N), -2, 1\}$  durch das Summationsverfahren des § 3 ermöglicht. Nach den Resultaten des vorliegenden § 6 kann man jede Gleichung, durch die ein Skalarprodukt bestimmt wird, als eine Periodenrelation auffassen. In diesem Sinne haben sich also zunächst diejenigen Periodenrelationen ergeben, welche den Grundformeln entsprechen. Ferner sind die Periodenrelationen zu nennen, welche aus (165) entstehen, wenn dort für  $\varphi_1(\tau)$  ein  $\varphi$ -Teilwert und für  $\varphi_2(\tau)$  eine ganze Spitzenform eingetragen wird. Dabei verschwindet die linke Seite dieser Gleichung, während auf der rechten Seite Verbindungen der Perioden des  $\varphi_2(\tau)$  zugeordneten Integrals erster Gattung mit den Perioden des dem  $\varphi$ -Teilwert zugeordneten speziellen Integrals dritter Gattung auftreten. Diese letzteren Perioden hängen, wie Herr Hecke gezeigt hat, aufs engste mit den Klassenzahlen gewisser relativ-Abelscher Zahlkörper zusammen<sup>9)</sup>. Eine nähere Beziehung zur Arithmetik ergibt sich noch dadurch, daß man eine Thetafunktion eines bestimmten, ebenfalls von Herrn Hecke untersuchten Typus an Stelle der Form  $\varphi_2(\tau)$  in die Gleichung (165) einträgt. Die Perioden der diesen Thetafunktionen zugeordneten Integrale erster Gattung bestimmen sich aus der komplexen Multiplikation<sup>10)</sup>.

<sup>9)</sup> E. Hecke, Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen dritter Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen, Abhandlungen aus d. Math. Seminar d. Hansischen Univ. 4 (1926), S. 211–223.

<sup>10)</sup> E. Hecke, Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 708–727.

# Zur Theorie der automorphen Funktionen von $n$ Veränderlichen.

Von

Hans Maaß in Heidelberg.

Es sei  $G$  eine diskontinuierliche Gruppe von hyperabelschen Transformationen

$$(1) \quad S = \{S^{(1)}, \dots, S^{(n)}\}$$

mit reellen unimodularen Matrizen

$$(2) \quad S^{(v)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(v)} & \beta^{(v)} \\ \gamma^{(v)} & \delta^{(v)} \end{pmatrix} \quad (v = 1, \dots, n),$$

welche einen Punkt  $\tau = \{\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n)}\}$  des Teilraumes  $\mathfrak{T}$ , definiert durch

$$(3) \quad \Im \tau^{(v)} > 0 \quad (v = 1, \dots, n),$$

in

$$(4) \quad S\tau = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} = \left\{ \frac{\alpha^{(1)}\tau^{(1)} + \beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}\tau^{(1)} + \delta^{(1)}}, \dots, \frac{\alpha^{(n)}\tau^{(n)} + \beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}\tau^{(n)} + \delta^{(n)}} \right\}$$

überführen. Aus  $\mathfrak{T}$  erhält man eine neue abstrakte Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{R}$ , indem man alle Punkte von  $\mathfrak{T}$  identifiziert, die nach einer Substitution von  $G$  äquivalent sind. Die Bestimmung von  $\mathfrak{R}$  entspricht der Aufgabe, für  $G$  in  $\mathfrak{T}$  einen Fundamentalbereich anzugeben. Wie das im allgemeinen und im besonderen für die Hilbertsche Modulgruppe und deren Untergruppen von endlichem Index zu machen ist, habe ich in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup>, auf welche auch wegen der Bezeichnung und Definitionen verwiesen sei, ausführlich auseinandergesetzt. Die vorliegende Untersuchung liefert einen Beitrag zur Theorie derjenigen in  $\mathfrak{T}$  analytischen Funktionen, die als eindeutige Funktionen über  $\mathfrak{R}$  aufgefaßt werden können, d. h. automorphe Funktionen zu  $G$  darstellen. Der Begriff der automorphen Funktion wird dem allgemeineren der automorphen Form der Dimension  $-r$  mit dem Multiplikatorsystem  $v$  untergeordnet.  $\varphi(\tau)$  heißt eine automorphe Form von  $G$  der Dimension  $-r$  mit dem Multiplikatorsystem  $v$ , wenn

$$(5) \quad \varphi(S\tau) = v(S) N(\gamma\tau + \delta)^r \varphi(\tau) \quad \text{für } \underline{S} = (\gamma, \delta), S \in G$$

<sup>1)</sup> H. Maaß, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse (1940), 2. Abhandlung, im folgenden zitiert mit M.

und über die Singularitäten von  $\varphi(\tau)$  geeignete Festsetzungen getroffen werden; dabei müssen die Funktionszweige der mehrdeutigen Faktoren von

$$(6) \quad N(\gamma\tau + \delta)^r = \prod_{v=1}^n (\gamma^{(v)}\tau^{(v)} + \gamma^{(v)})^r$$

ein für allemal festgelegt werden. Eine Form  $\varphi(\tau)$ , die in allen Punkten eines Fundamentalbereiches zu  $G$ , einschließlich der parabolischen Spitzen, regulär ist, heißt eine ganze Form, der Quotient zweier ganzer Formen gleicher reeller Dimension  $-r$  mit gleichem Multiplikatorsystem  $v$  ( $|v| = 1$ ) eine automorphe Funktion. Es ist in dieser Arbeit, ohne daß ständig darauf hingewiesen wird, immer nur von ganzen automorphen Formen die Rede. Für Transformationsgruppen  $G$  mit nur endlich vielen inäquivalenten parabolischen Spitzen und einem Fundamentalbereich vom Typus des in M., § 3 für die Hilbertsche Modulgruppe abgeleiteten wird als Hauptresultat der vorliegenden Untersuchung der folgende Satz bewiesen. Alle automorphen Funktionen sind rationale Funktionen von  $n + 1$  festen automorphen Funktionen, unter denen sich  $n$  über dem Körper der komplexen Zahlen algebraisch unabhängige befinden. Für die Hilbertsche Modulgruppe ist dieses Ergebnis bereits von Blumenthal<sup>2)</sup> ausgesprochen worden. Es besteht aber keine völlige inhaltliche Übereinstimmung der Resultate, weil der Blumenthalschen Arbeit eine umfassendere Definition der automorphen Funktion zugrunde liegt (vgl. auch die Einleitung zu M.). Ich habe mir in der vorliegenden Abhandlung die Methoden, mit denen Siegel die Theorie der Modulfunktionen  $n$ -ten Grades begründet hat<sup>3)</sup>, weitgehend zunutze gemacht. Das wichtigste Hilfsmittel zum Beweis des oben formulierten Satzes besteht in der Erkenntnis, daß eine ganze automorphe Form der reellen Dimension  $-r$  mit dem Multiplikatorsystem  $v$  ( $|v| = 1$ ) identisch verschwindet, sobald in den „Potenzreihenentwicklungen“ der Form zu einem vollen (also nach Voraussetzung endlichen) System von inäquivalenten parabolischen Spitzen gewisse Koeffizienten in nur von der Dimension  $-r$  abhängiger Anzahl verschwinden. Das ist die Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, daß eine ganze Modulform zur rationalen Modulgruppe in der einzigen parabolischen Spitze des Fundamentalbereiches keine Nullstelle zu hoher Ordnung hat, ohne identisch zu verschwinden. Um zu beweisen, daß eine automorphe Funktion, die sich als Quotient zweier Formen aus der linearen Schar  $\{G, -r, v\}$  aller ganzen Formen der Dimension  $-r < 0$  mit dem Multiplikatorsystem  $v$  ( $|v| = 1$ ) darstellen läßt, auch als Quotient zweier Formen einer Schar  $\{G, -r_0, 1\}$

<sup>2)</sup> O. Blumenthal, Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. Erste Hälfte: Math. Annalen 56 (1903), S. 509–548; zweite Hälfte: ebenda 58 (1904), S. 497–527.

<sup>3)</sup> C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen  $n$ -ten Grades. Math. Annalen 116 (1939), S. 617–657, im folgenden zitiert mit S.

mit ganz rationalem  $\tau_0$  dargestellt werden kann, werden die von Petersson<sup>4)</sup> aufgestellten Poincaréschen Reihen  $G_{-\tau}(\tau; \nu; A, \Gamma; R)$  auf  $n$  Veränderliche verallgemeinert und ausführlich diskutiert.

Die eigentliche Bedeutung der verallgemeinerten Poincaréschen Reihen liegt darin, daß sie einerseits alle automorphen Formen reeller Dimension  $-\tau < -2$  mit einem Multiplikatorsystem  $\nu$  vom Betrag 1 linear darstellen (Vollständigkeitssatz) und andererseits durch funktionentheoretische Eigenschaften charakterisiert werden können. Der Beweis dieser Behauptungen gestaltet sich mit Hilfe der Peterssonschen Metrisierung der ganzen automorphen Formen<sup>5)</sup> überraschend einfach und demonstriert aufs neue die erstaunliche Tragweite der jüngst von Petersson entwickelten Methoden. Es verbleibt mir nur, die Ergebnisse der unter<sup>5)</sup> und<sup>6)</sup> zitierten Untersuchungen auf  $n$  Veränderliche zu übertragen. Dabei ergibt sich eine Fülle neuartiger Beziehungen zwischen den Poincaréschen Reihen in  $n$  Veränderlichen. In welcher Weise sich die nicht-ganzen automorphen Formen, die sich in jedem Punkt des Fundamentalbereichs „rational“ verhalten, an dem Aufbau der hier entwickelten Theorie beteiligen können, müßte noch besonders untersucht werden.

Auf die entsprechenden Verhältnisse, insbesondere den Beweis des Vollständigkeitssatzes für die Siegelschen Modulformen  $n$ -ten Grades gedenke ich an anderer Stelle zurückzukommen.

### § 1.

#### Multiplikator- und Faktorsysteme. Entwicklung automorpher Formen in den parabolischen Spitzen.

Das Studium automorpher Formen beliebiger reeller Dimension  $-\tau$  macht für reelle  $\gamma^{(\nu)}$ ,  $\delta^{(\nu)} \neq 0, 0$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) eine generelle Auswahl der Funktionszweige von  $N(\gamma\tau + \delta)^\nu$  notwendig. Um den Anschluß an die Peterssonsche Bezeichnung des formalen Apparats<sup>7)</sup> der Theorie der auto-

<sup>4)</sup> H. Petersson, Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen, Math. Annalen 103 (1930), S. 369–436, im folgenden zitiert mit P.

<sup>5)</sup> H. Petersson, Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 49 (1939), S. 49–75.

<sup>6)</sup> H. Petersson, Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Univ. 12 (1938), S. 415–472.

<sup>7)</sup> H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen. Teil I bis IV: Math. Annalen 115 (1938), S. 23–67, 175–204, 518–572, 670–709; Teil V: Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 127–155, im folgenden zitiert mit P. I bis V.

morphen Formen zu wahren, ist folgender Fixierung vor andern der Vorzug zu geben: Für  $\Im \tau^{(\nu)} > 0$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) sei

$$\begin{aligned} N(\gamma \tau + \delta)^r &= e^{rS \log(\gamma \tau + \delta)}, \\ \log(\gamma^{(\nu)} \tau^{(\nu)} + \delta^{(\nu)}) &= \log|\gamma^{(\nu)} \tau^{(\nu)} + \delta^{(\nu)}| + i \arg(\gamma^{(\nu)} \tau^{(\nu)} + \delta^{(\nu)}), \\ (7) \quad \arg(\gamma^{(\nu)} \tau^{(\nu)} + \delta^{(\nu)}) &= \begin{cases} \arg\left(\tau^{(\nu)} + \frac{\delta^{(\nu)}}{\gamma^{(\nu)}}\right) - \arg \gamma^{(\nu)} & \text{für } \gamma^{(\nu)} \neq 0, \\ \arg \delta^{(\nu)} & \text{für } \gamma^{(\nu)} = 0, \end{cases} \\ \arg \delta^{(\nu)} &= \frac{1 - \operatorname{sgn} \delta^{(\nu)}}{2} \pi, \quad 0 < \arg\left(\tau^{(\nu)} + \frac{\delta^{(\nu)}}{\gamma^{(\nu)}}\right) < \pi. \end{aligned}$$

Setzt man für reelle unimodulare  $M, S$  von der Art (1) mit den zweiten Zeilen

$$(8) \quad \underline{M} = (\mu_1, \mu_2), \quad \underline{S} = (\gamma, \delta), \quad \underline{M}S = (\mu_1^*, \mu_2^*)$$

von  $M, S, MS$

$$(9) \quad 2n w(M, S) = \arg(\mu_1 \bar{S} \tau + \mu_2) - \arg(\mu_1^* \tau + \mu_2^*) + \arg(\gamma \tau + \delta)$$

(für alle Konjugierten) und

$$(10) \quad \sigma^{(r)}(M, S) = e^{2\pi i r S w(M, S)} = e^{\frac{2\pi i r}{r} \sum_{\nu=1}^n w(\tau^{(\nu)}, S^{(\nu)})}$$

so gelten die folgenden Regeln ( $\sigma^{(r)} = \sigma$ ):

$$(11) \quad \begin{aligned} \sigma(M, S_1 S_2) \sigma(S_1, S_2) &= \sigma(M, S_1) \sigma(M S_1, S_2) \\ \sigma(S_1, S_2) &= \sigma(S_2, S_1) \quad \text{für } S_1 S_2 = S_2 S_1 \end{aligned}$$

und mit (8)

$$(12) \quad N(\mu_1 S \tau + \mu_2)^r = \sigma^{(r)}(M, S) \frac{N(\mu_1^* \tau + \mu_2^*)^r}{N(\gamma \tau + \delta)^r},$$

wie die Betrachtungen in P. I lehren. Die  $w$ -Werte können aus P. I, S. 44, Satz 4 entnommen werden. Für das Multiplikatorsystem  $v$  einer Form  $\varphi(\tau)$  der Dimension  $-r$  sind zufolge (5) und (12) die Relationen

$$(13) \quad v(L_1 L_2) = \sigma^{(r)}(L_1, L_2) v(L_1) v(L_2) \quad \text{für } L_1, L_2 \in G$$

erfüllt. Allgemein soll ein nicht verschwindendes Zahlssystem  $v$ , für welches (13) gilt, ein Multiplikatorsystem für  $G$  zur Dimension  $-r$  genannt werden. Wir vereinbaren wie im M. folgende feste Bezeichnung:

$$(14) \quad U^a = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

und definieren  $E_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) durch

$$E_k^{(a)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_k^{(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v \neq k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Die Bedeutung eines Multiplikatorsystems  $v$  läßt sich, sofern  $E_k$  noch nicht in  $G$  enthalten ist, auch auf die durch  $E_k$  erweiterte Gruppe fortsetzen, indem man, wie es durch (5) geboten ist,

$$(15) \quad v(E_k L) = \sigma^{(r)}(E_k, L) e^{-\pi i r} v(L) \quad \text{für } L \in G$$

setzt und sich davon überzeugt, daß die Relationen (13) auch für die erweiterte Gruppe bestehen. Wir können daher, ohne daß die Gesamtheit der Multiplikatorsysteme von  $G$  eine Beschränkung erleidet,

$$(16) \quad E_k \subset G \quad (k = 1, \dots, n)$$

voraussetzen.

Transformieren wir eine Form  $\varphi(\tau) \in \{G, -r, v\}$  mit einer reellen unimodularen Substitution  $A$ , so erhält man in

$$(17) \quad \varphi^A(\tau) = \frac{\varphi(A\tau)}{N(a_1\tau + a_2)^r} \quad (\underline{A} = (a_1, a_2))$$

eine Form aus  $\{A^{-1}GA, -r, v^A\}$  mit dem Multiplikatorsystem

$$(18) \quad v^A(S) = v(AS A^{-1}) \frac{\sigma^{(r)}(AS A^{-1}, A)}{\sigma^{(r)}(A, S)}, \quad S \in A^{-1}GA.$$

Die Multiplikatoreigenschaft von  $v^A$  kann auch direkt aus (13) mit Hilfe von (11) abgeleitet werden. Man überzeugt sich leicht, daß auf Grund von (11) und (12)

$$(19) \quad (\varphi^A)^B = \frac{1}{\sigma^{(r)}(A, B)} \varphi^{AB}, \quad (v^A)^B = v^{AB}$$

gilt, außerdem

$$(20) \quad \varphi^L(\tau) = v(L) \varphi(\tau), \quad v^L = v \quad \text{für } L \in G.$$

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß der Punkt  $\infty = \{\infty, \dots, \infty\}$  parabolische Spitze von  $G$  ist; d. h. in der affinen Gruppe  $A$  von  $G$  soll es  $n$  unabhängige Translationen und  $n-1$  hyperbolische Substitutionen mit unabhängigen Multiplikatoren geben (vgl. M., § 1). Der Modul  $t$  der Translationen aus  $A$  repräsentiert ein diskretes Gitter und werde erzeugt von den Translationen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ :

$$t = [\alpha_1, \dots, \alpha_n].$$

Für die Multiplikatoren der Substitutionen aus  $A$  sei  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2$  eine Basis. Um die der Spitze  $\infty$  zugeordnete „Potenzreihenentwicklung“ einer in  $\mathfrak{T}$  regulären automorphen Form  $\varphi(\tau)$  für  $G$  —  $r$ -ter Dimension mit dem Multiplikatorsystem  $v$  ableiten zu können, schicken wir folgende Überlegungen voraus. Der Modul  $m$  wird definiert als die Gesamtheit der Größen  $\mu = \{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(n)}\}$ , für welche  $S\alpha\mu$  ganz rational bei beliebiger Wahl von  $\alpha \in t$ , was durch

$$(21) \quad S(t, \mu) \equiv 0 \pmod{[1]} \Leftrightarrow \mu \in m$$

ausgedrückt werde. Von den durch

$$(22) \quad S(\alpha_k \mu_i) = \delta_{ki} \quad (= \text{Kroneckersymbol})$$

definierten Größen  $\mu_1, \dots, \mu_n$  ist dann leicht zu zeigen, daß sie den Modul  $m$  erzeugen.  $m$  ist damit als diskretes  $n$  dimensionales Gitter erkannt. Ist  $\lambda^2$  ein beliebiger Multiplikator von  $A$ , so gilt wegen  $t \cdot \lambda^{-2} = t$  (vgl. M., § 1) auch

$$(23) \quad \lambda^2 m = m.$$

Weil alle  $\mu \subset m$  diskret liegen, so kann aus (23) geschlossen werden, daß entweder alle Konjugierten  $\mu^{(\nu)}$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) von  $\mu \subset m$  verschwinden oder alle von 0 verschieden sind:

$$(24) \quad \mu \subset m, \text{ dann } \mu = 0 \text{ oder } \mu \neq 0.$$

Wir setzen

$$(25) \quad v(U^\alpha) = e^{2\pi i \varrho(\alpha)} \text{ für } \alpha \subset t$$

und können dabei  $\varrho(\alpha)$  linear in  $\alpha$  annehmen. Um die Existenz einer für alle  $\alpha \subset t$  gültigen Lösung  $\kappa = \{\kappa^{(1)}, \dots, \kappa^{(n)}\}$  von

$$(26) \quad \varrho(\alpha) \equiv S(\kappa\alpha) \pmod{1}$$

zu zeigen, genügt es wegen der beiderseitigen Linearität in  $\alpha$ , (26) für  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  zu erfüllen. Das spezielle System von  $n$  Kongruenzen, welches man so erhält, ist aber lösbar, da die Determinante  $|\alpha_i^{(j)}| \neq 0$  ist.  $\kappa$  ist mod  $m$  eindeutig bestimmt. Zu einem beliebigen Multiplikator  $\lambda^2$  von  $A$  wählen wir

$$U^\beta D_\lambda \subset A$$

und transformieren mit dieser Transformation die Translation  $U^\alpha$ ,  $\alpha \subset t$ . Auf Grund von (13) und der Eigenschaften des Faktorsystems  $\sigma^{(r)}$  folgt dann leicht

$$(27) \quad v(U^{\alpha\lambda^2}) = v(U^\beta D_\lambda \cdot U^\alpha \cdot D_{\lambda^{-1}} U^{-\beta}) = v(U^\alpha),$$

d. h.

$$(28) \quad \varrho(\alpha\lambda^2) \equiv \varrho(\alpha) \pmod{1} \text{ für } \alpha \subset t.$$

Nach (26) gilt also

$$0 \equiv S(\kappa(1 - \lambda^2)\alpha) \pmod{1} \text{ für } \alpha \subset t,$$

mithin

$$(29) \quad \kappa(1 - \lambda^2) \subset m.$$

Außerdem notieren wir noch

$$(30) \quad \mu \subset m \Rightarrow \mu(1 - \lambda^2) \subset m.$$

Da nun alle Konjugierten  $\lambda^{(\nu)2}$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) algebraische Einheiten sind und einer Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

mit ganz rationalen Koeffizienten  $a_i$  genügen (vgl. M., § 1), so sind also  $(1 - \lambda^{(\nu)2})$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) Nullstellen von

$$g(x) = f(1 - x).$$

Da wir  $n > 1$  annehmen wollen, es also mindestens einen unabhängigen Multiplikator  $\lambda^2$  gibt, so kann bei allgemeinem  $\lambda^2$  das Polynom  $g(x)$  keine Potenz von  $x$  sein:

$$(-1)^n g(x) = x^{n-m} (x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m), \quad b_m \neq 0, \quad m \geq 1.$$

Nach (24) und (30) sind nun alle  $\lambda^{(v)2}$  ( $v = 1, \dots, n$ ) zugleich von 1 verschieden, oder alle gleich 1. Wenn daher  $\lambda^2 \neq 1$ , so kommen also unter den Wurzeln von

$$h(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

die Zahlen  $1 - \lambda^{(v)2}$  ( $v = 1, \dots, n$ ) vor. Aus (29) und (30) kann dann auf  $b_m \times \subset m$  geschlossen werden. Es gibt also eine kleinste positive, ganz rationale, vom Multiplikatorsystem unabhängige Zahl  $p$  derart, daß

$$(31) \quad p \times \subset m, \quad p \text{ ganz rational} > 0.$$

Danach sind für  $\mu \subset m$  wegen (24) die Konjugierten von  $\mu + \times$  gleichzeitig Null oder nicht Null

$$(32) \quad \mu \subset m \rightarrow \mu + \times = 0 \quad \text{oder} \quad \mu + \times \neq 0;$$

denn es gilt  $p(\mu + \times) \subset m$ . Insbesondere folgt aus (31) auch, daß  $\times$  reell, also

$$(33) \quad |v(U^\alpha)| = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \subset t.$$

Wir geben jetzt die „Potenzreihenentwicklung“ von  $\varphi(\tau)$  zur Spitze  $\alpha$  an. Nach (25) und (26) hat

$$\varphi(\tau) = e^{-2\pi i S \times \tau} \varphi(\tau)$$

die Perioden  $\alpha \subset t$ . Durch

$$(34) \quad \tau^{(v)} = \sum_{\varphi=1}^n u_\varphi \alpha^{(v)}_\varphi \quad (v = 1, \dots, n)$$

führen wir neue Veränderliche  $u_1, \dots, u_n$  ein; man berechnet sie nach (22) direkt aus

$$(35) \quad S \mu_\sigma \tau = u_\sigma \quad (\sigma = 1, \dots, n).$$

Für die Funktion

$$\chi(u_1, \dots, u_n) = \varphi(\tau),$$

die in jeder der Veränderlichen  $u_k$  die Periode 1 hat, gibt es dann wegen der Regularitätsannahme eine in ganz  $\mathfrak{I}$  gültige Fourierreihenentwicklung

$$(36) \quad \chi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} e^{2\pi i \sum_{\varphi=1}^n k_\varphi u_\varphi}$$

Setzt man

$$(37) \quad \sum_{\varphi=1}^n k_\varphi \mu_\varphi = \mu, \quad a_{k_1 \dots k_n} = a(\mu + \times),$$

so ergibt sich schließlich die gesuchte Reihe

$$(38) \quad \varphi(\tau) = \sum_{\mu \in \mathfrak{m}} a(\mu + \kappa) e^{2\pi i S(\mu + \kappa)\tau}.$$

Die Koeffizienten berechnen sich aus

$$(39) \quad a(\mu + \kappa) = \frac{1}{\Delta} \int \cdots \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) e^{-2\pi i S(\mu + \kappa)\tau} dx^{(1)} \dots dx^{(n)},$$

wobei

$$\tau = x + iy, \quad \operatorname{Re} u_k = t_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$\left| \frac{\partial (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})}{\partial (t_1, \dots, t_n)} \right| = \Delta$$

und  $\mathfrak{B}$  die Punktmenge, welche dem Würfel

$$|t_k| \leq \frac{1}{2} \quad (k = 1, \dots, n)$$

entspricht. Die Entwicklung von  $\varphi(\tau)$  zu einer beliebigen parabolischen Spitze  $s$  von  $G$  erhält man, indem man  $s$  durch eine reelle unimodulare Substitution  $A$  in die parabolische Spitze  $\infty$  von  $AG A^{-1}$  überführt:

$$(40) \quad As = \infty, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Auf die Form

$$(41) \quad \varphi^{A^{-1}}(\tau) = \frac{\varphi(A^{-1}\tau)}{N(-a_1\tau + a_0)^r} = N(a_1A^{-1}\tau + a_2)^r \varphi(A^{-1}\tau)$$

aus der linearen Schar  $\{AG A^{-1}, -r, v^{A^{-1}}\}$  sind dann die oben abgeleiteten Resultate anzuwenden. Kennzeichnen wir die zur Gruppe  $AG A^{-1}$  und zum Multiplikatorsystem  $v^{A^{-1}}$  gehörigen Größen und Modulen durch den Index  $A$ , so folgt aus (38)

$$(42) \quad \varphi^{A^{-1}}(\tau) = \sum_{\mu \in \mathfrak{m}_A} a_A(\mu + \kappa_A) e^{2\pi i S(\mu + \kappa_A)\tau},$$

also nach (41):

$$(43) \quad N(a_1\tau + a_2)^r \varphi(\tau) = \sum_{\mu \in \mathfrak{m}_A} a_A(\mu + \kappa_A) e^{2\pi i S(\mu + \kappa_A)A\tau}.$$

Sei  $\lambda^2$  der Multiplikator einer Substitution

$$U^\beta D_i$$

aus der affinen Gruppe von  $AG A^{-1}$ , dann folgt, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung

$$\varphi^{A^{-1}}(\lambda^2\tau + \beta) = v^{A^{-1}}(U^\beta D_i) N\lambda^{-r} \varphi^{A^{-1}}(\tau)$$

die Reihenentwicklung (42) einträgt, aus der Eindeutigkeit dieser Entwicklung, daß

$$(44) \quad a_A(\mu + \kappa_A) = v^{A^{-1}}(U^\beta D_i) N\lambda^{-r} e^{-2\pi i S(\mu + \kappa_A)\beta} a_A((\mu + \kappa_A)\lambda^2)$$

für  $\mu \in \mathfrak{m}_A, \quad U^\beta D_i \in AG A^{-1}.$

Neben  $s$  sei auch noch  $s_1$  eine parabolische Spitze von  $G$ . Für reelle unimodulare Substitutionen  $A$  und  $A_1$  sei dann

$$As = A_1 s_1 = \infty.$$

Sind  $s$  und  $s_1$  nach  $G$  äquivalent (der Fall  $s = s_1$  mit eingeschlossen):

$$s_1 = Ls, \quad L \in G,$$

so gilt

$$(45) \quad A_1^{-1} = LA^{-1} U^{\beta_0} D_{i_0}$$

für gewisse  $\beta_0, \lambda_0$ . Mit  $t_A$  und  $t_{A_1}$  bezeichnen wir die Moduln der Translationen aus den affinen Gruppen von  $AGA^{-1}$  bzw.  $A_1GA_1^{-1} = D_{i_0}^{-1} U^{-\beta_0} \cdot$

$AGA^{-1} \cdot U^{\beta_0} D_{i_0}$ . Offenbar gilt also

$$(46) \quad t_{A_1} = t_A \cdot \lambda_0^{-2} \quad \text{und} \quad m_{A_1} = m_A \cdot \lambda_0^2;$$

denn  $m_A$  besteht aus den Lösungen  $\mu$  von

$$S(\mu t_A) \equiv 0 \pmod{[1]}$$

und  $m_{A_1}$  entsprechend aus den Lösungen  $\mu_1$  von

$$S(\mu_1 t_{A_1}) \equiv 0 \pmod{[1]}.$$

Bezeichnen wir noch

$$v^{A^{-1}}(U^\alpha) = e^{2\pi i \varrho_A(\alpha)}, \quad v^{A_1^{-1}}(U^{\alpha_1}) = e^{2\pi i \varrho_{A_1}(\alpha_1)}$$

für  $\alpha \in t_A$  und  $\alpha_1 \in t_{A_1}$ , so schließt man mit Hilfe von (20), (19) und (18)

$$v^{A_1^{-1}}(U^{\alpha_1} i_0^{-2}) = v^{A^{-1}} U^{\beta_0} D_{i_0} (U^{\alpha} i_0^{-2}) = v^{A^{-1}}(U^\alpha),$$

woraus erhellt, daß

$$(47) \quad \varrho_{A_1}(\alpha_1 i_0^{-2}) \equiv \varrho_A(\alpha) \pmod{[1]} \quad \text{für} \quad \alpha \in t_A.$$

Zwischen den Lösungen  $\alpha_A$  und  $\alpha_{A_1}$  von

$$\varrho_A(\alpha) \equiv S(\alpha_A \alpha) \pmod{[1]} \quad \text{für} \quad \alpha \in t_A,$$

$$\varrho_{A_1}(\alpha_1) \equiv S(\alpha_{A_1} \alpha_1) \pmod{[1]} \quad \text{für} \quad \alpha_1 \in t_{A_1}$$

besteht, wie man leicht erkennt, wenn man  $\alpha_1 = \alpha \lambda_0^{-2}$  setzt, auf Grund von (47) und (46) der Zusammenhang

$$(48) \quad \begin{aligned} \alpha_A &\equiv \alpha_{A_1} \lambda_0^{-2} \pmod{m_A} \\ \alpha_{A_1} &\equiv \alpha_A \lambda_0^2 \pmod{m_{A_1}}, \end{aligned}$$

der sich damit allein aus der Multiplikatoreigenschaft (13) für  $v$  ergibt, ohne daß man zu wissen braucht, ob es eine automorphe Form mit dem Multiplikatorsystem  $v$  gibt.

Aus den Transformationsregeln (19) und (20) folgt nacheinander

$$\begin{aligned}\varphi^{A^{-1}}(\tau) &= \varphi^{LA^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0}}(\tau) = \sigma^{(r)}(L, A^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0})(\varphi^L)^{A^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0}}(\tau) \\ &= \sigma^{(r)}(L, A^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0})v(L)\varphi^{A^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0}}(\tau),\end{aligned}$$

wobei nach (19) und (17)

$$\varphi^{A^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0}}(\tau) = \sigma^{(r)}(A^{-1}, U^{\beta_0}D_{\lambda_0})N\lambda_0^r\varphi^{A^{-1}}(\lambda_0^2\tau + \beta_0),$$

also insgesamt

$$(49) \quad \begin{aligned}\varphi^{A_1^{-1}}(\tau) &= \sigma^{(r)}(L, A^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0})\sigma^{(r)}(A^{-1}, U^{\beta_0}D_{\lambda_0})v(L)N\lambda_0^r\varphi^{A^{-1}}(\lambda_0^2\tau + \beta_0) \\ &\text{für } A_1^{-1} = LA^{-1}U^{\beta_0}D_{\lambda_0}, L \subset G.\end{aligned}$$

Diese Gleichung besagt, daß es zu einer Serie von äquivalenten parabolischen Spitzen der Gruppe  $G$  im „wesentlichen“ nur eine Entwicklung von der Art (42) gibt. Wir untersuchen jetzt, um zu einer strengen Definition der (ganzen) Form zu gelangen, das analytische Verhalten von  $\varphi(\tau)$  in der Nähe der parabolischen Spitze  $\infty$  und reduzieren zu diesem Zweck  $\mathfrak{T}$  nach der affinen Gruppe  $A$  in  $G$ . Es sei  $t = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  der Modul der Translationen aus  $A$  und  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2$  eine Basis für die Multiplikatoren der Substitutionen von  $A$ . Wir bezeichnen

$$(50) \quad \begin{aligned}\tau &= x + iy, \quad Y = \log y, \quad A_j = \log \lambda_j^2 \quad (j = 1, \dots, n-1), \\ A_0^{(v)} &= \frac{1}{n} \quad (v = 1, \dots, n), \\ x &= \sum_{j=1}^n \xi_j \alpha_j, \quad Y = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j A_j.\end{aligned}$$

Die Ungleichungen

$$(51) \quad \begin{aligned}-\frac{1}{2} &\leq \xi_j < \frac{1}{2} \quad (j = 1, \dots, n), \\ -\frac{1}{2} &\leq \eta_k < \frac{1}{2} \quad (k = 1, \dots, n-1)\end{aligned}$$

beschreiben einen Fundamentalbereich für  $A$  (vgl. M., § 3), den wir mit dem Bereich

$$(52) \quad \eta_0 \geq \log x_0 \quad (x_0 > 0)$$

zum Schnitt bringen;  $\mathfrak{P}^{(x_0)}$  bezeichne diesen Durchschnitt. Die im Innern von  $\mathfrak{T}$  regulär angenommene Form  $\varphi(\tau)$  heißt in der Spitze  $\infty$  regulär, wenn  $\varphi(\tau)$  in  $\mathfrak{P}^{(x_0)}$  beschränkt ist. Das soll vorausgesetzt werden. Erfüllen  $x$  und  $y_1 > 0$  die Ungleichungen (51), dann ist für großes  $l$ , nämlich

$$\log l \geq \frac{1}{n}(\log x_0 - \log N y_1),$$

der Punkt  $\tau = x + iy_1$  in  $\mathfrak{P}^{(x_0)}$  gelegen, also nach (39)

$$a(\mu_1 + x)e^{-2\pi i S(u_1 + x)y_1} \quad (\mu_1 \subset m)$$

für  $l \rightarrow \infty$  beschränkt; es ist also  $a(\mu_1 + \kappa) = 0$ , falls  $S(\mu_1 + \kappa) y_1 < 0$ .  
Zu  $\mu + \kappa$ ,  $\mu \in \mathfrak{m}$  lasse sich  $y > 0$  derart bestimmen, daß

$$S(\mu + \kappa) y < 0.$$

Wir reduzieren  $y$  mit Hilfe des Multiplikators  $\lambda^2$  und erhalten  $y \lambda^2 = y_1$ .  
Wie wir gesehen haben, gibt es eine Lösung  $\mu_1 \in \mathfrak{m}$  von

$$(\mu_1 + \kappa) \lambda^2 = (\mu + \kappa);$$

für diese ist dann

$$S(\mu_1 + \kappa) y_1 = S(\mu + \kappa) y < 0,$$

also gilt, wie soeben gezeigt wurde,  $a(\mu_1 + \kappa) = 0$  und nach (44) auch  $a(\mu + \kappa) = 0$ . In der Entwicklung (38) braucht demnach nur über die  $\mu$  mit  $\mu + \kappa \geq 0$  summiert zu werden, so daß nach (32):

$$(53) \quad \varphi(\tau) = a_0 + \sum_{\substack{\mu + \kappa \geq 0 \\ \mu \in \mathfrak{m}}} a(\mu + \kappa) e^{2\pi i S(\mu + \kappa)\tau},$$

wobei

$$a_0 = \begin{cases} a(0) & \text{für } \kappa \in \mathfrak{m}, \\ 0 & \text{für } \kappa \notin \mathfrak{m}. \end{cases}$$

Umgekehrt folgt aus der Darstellung (53) leicht, daß  $\varphi(\tau)$  im Bereich

$$(53a) \quad |\xi_j| \leq \kappa_2, \quad |\eta_k| \leq \kappa_1, \quad \eta_0 \geq \log \kappa_0$$

$$(\kappa_1, \kappa_2 \text{ beliebig, } \kappa_0 > 0; \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n-1)$$

beschränkt ist, woraus erhellt, daß die Definition der Regularität von  $\varphi(\tau)$  in der Spitze  $\infty$  von der Auswahl der Basen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  und  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2$  nicht abhängt.  $\varphi(\tau)$  heißt in der parabolischen Spitze  $s$  regulär, wenn  $\varphi^A(\tau)$  mit  $As = \infty$  in der Spitze  $\infty$  regulär ist; nach (49) hängt diese Definition von  $A$  nicht ab und überdies ist  $\varphi(\tau)$  auch in allen nach  $G$  zu  $s$  äquivalenten parabolischen Spitzen regulär, wenn dies für  $s$  selbst zutrifft. Wir definieren jetzt  $\varphi(\tau)$  als eine (ganze) automorphe Form für  $G$  von der Dimension  $-r$  mit dem Multiplikatorsystem  $v$ , wenn  $\varphi(\tau)$  im Innern von  $\mathfrak{T}$  und in allen parabolischen Spitzen von  $G$  regulär ist und wenn die Umsetzungsformeln (5) gelten. Nach (19) ist mit  $\varphi(\tau) \in \{G, -r, v\}$  auch die mit beliebigem reellen unimodularen  $A$  transformierte Form  $\varphi^A(\tau) \in \{A^{-1}GA, -r, v^A\}$  eine ganze automorphe Form.

## § 2.

### Poincarésche Reihen.

Ein ausreichendes Hilfsmittel, um die eingangs besprochenen Existenzsätze zu erhärten, hat man in den auf mehrere Veränderliche verallgemeinerten, für den Spezialfall  $n = 1$  von Petersson betrachteten Reihen  $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$  (vgl. l. c. <sup>4)</sup>). Der Umstand, daß es für  $n > 1$  auch hyperbolische Substitutionen gibt, welche eine parabolische Spitze als Fixpunkt haben, bringt ein neues

Element in die Theorie dieser Reihen. Der Vollständigkeit halber soll der in P. durchgeführte Ansatz, aus welchem die Formen  $G_{-r}(\tau; v; A, F; R)$  entspringen, in diesem Paragraphen für  $n > 1$  in extenso reproduziert werden.

Die zweiten Zeilen  $M_1, M_2$  zweier reellen unimodularen Substitutionen  $M_1, M_2$  heißen assoziiert, wenn  $M_2 = \lambda M_1$  mit  $\lambda^{(v)} > 0$  ( $v = 1, \dots, n$ ). Die Punkte  $\infty = \{\infty, \dots, \infty\}$  und  $s = A^{-1}\infty$  mit reellem unimodularem  $A$  seien parabolische Spitzen einer vorgelegten Transformationsgruppe  $G$ . Mit  $\mathfrak{S}(A, G)$  bezeichnen wir ein vollständiges System von Substitutionen aus  $AG$  mit nicht assoziierten zweiten Zeilen. Für zwei Substitutionen  $M_1, M_2 \in AG$  mit assoziierten zweiten Zeilen:

$$M_1 = \lambda^{-1} M_2$$

gilt

$$M_1 M_2^{-1} = U^\beta D_\lambda \in AGA^{-1} \text{ mit } \lambda > 0$$

und umgekehrt. Sehen wir zwei verschiedene Systeme  $\mathfrak{S}(A, G)$  bei gleichem Argument als nicht wesentlich verschieden an, so gilt in verständlicher Bezeichnung:

1.  $\mathfrak{S}(U^\beta D_\lambda A, G) = U^\beta D_\lambda \mathfrak{S}(A, G)$   
mit beliebigen reellen  $\beta$  und  $\lambda \neq 0$ .
2.  $\mathfrak{S}(AS, S^{-1}GS) = \mathfrak{S}(A, G)S$   
mit reellem unimodularem  $S$ ,
3.  $\mathfrak{S}(A, G) = \mathfrak{S}(A, GL)$   
für  $L \in G$ .

In dem Ansatz

$$(54) \quad H_r(\tau; w; A, G; f) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, G)} \frac{f(M\tau)}{w(M) N(m_1\tau + m_2)^r}$$

mit  $M = (m_1, m_2)$  versuchen wir  $f(\tau) = f(\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n)})$  und  $w(M)$  so zu bestimmen, daß formal ohne Rücksicht auf Konvergenz

a) das einzelne Reihenglied sich nicht ändert, wenn man  $M$  durch eine andere Substitution mit assoziierter zweiter Zeile ersetzt,

b) (55)  $H_r(L\tau; w; A, G; f) = v(L) N(\gamma\tau + \delta)^r H_r(\tau; w; A, G; f)$

für  $L \in G$  mit  $L = (\gamma, \delta)$  und ein Multiplikatorsystem  $v$  von  $G$  zur Dimension  $-r$  gilt.

Sei

$$(56) \quad U^\beta D_\lambda \in AGA^{-1}, \quad \lambda > 0,$$

dann ändert sich  $N(m_1\tau + m_2)^r$  nicht, wenn man  $M$  durch  $U^\beta D_\lambda M$  ersetzt; nach a) ist also zu fordern

$$(57) \quad f(\lambda^2\tau + \beta) = \frac{w(U^\beta D_\lambda M)}{w(M)} f(\tau).$$

Wir ersetzen im allgemeinen Glied von  $H$ , den Punkt  $\tau$  durch  $L\tau$  ( $L \subset G$ ,  $\underline{L} = (\gamma, \delta)$ ) und erhalten nach Multiplikation mit  $\frac{1}{v(L)N(\gamma\tau + \delta)^r}$  den Ausdruck

$$\frac{f(M^* \tau)}{\sigma(M, L) w(M) v(L) N(m_1^* \tau + m_2^*)^r}$$

mit  $M^* = ML$ ,  $\underline{M}^* = (m_1^*, m_2^*)$ .  $M^*$  durchläuft mit  $M$  ein System  $\mathfrak{S}(A, G)$ . Die Invarianz b) ist daher gewährleistet, wenn

$$(58) \quad w(ML) = \sigma(M, L) w(M) v(L), \quad L \subset G, \quad M \subset AG.$$

Wählt man  $w(A)$  beliebig fest von 0 verschieden und definiert

$$(59) \quad w(M) = \sigma(A, L) w(A) v(L) \quad \text{für } M = AL, \quad L \subset G,$$

so läßt sich leicht zeigen, daß die Relationen (58) erfüllt sind und überdies für (56)

$$(60) \quad \frac{w(U^\beta D_1 M)}{w(M)} = v^{A-1}(U^\beta D_1)$$

gilt. Aus (57) und (60) folgt, wenn man nur die parabolischen Substitutionen ( $\lambda^2 = 1$ ) berücksichtigt, analog zur Entwicklung (42):

$$(61) \quad f(\tau) = \sum_{\mu \subset m_A} b(\mu + x_A) e^{2\pi i S(\mu + x_A)^2}$$

Darin brauchen die Koeffizienten  $b(\mu + x_A)$  nur noch so gewählt zu werden, daß (57) für die hyperbolischen Substitutionen ( $\lambda^2 \neq 1$ ) erfüllt ist; es muß also (44) gelten:

$$(62) \quad v^{A-1}(U^\beta D_1) b((\mu + x_A) \lambda^2) = e^{2\pi i S(\mu + x_A)^2} b(\mu + x_A) \\ \mu \subset m_A, \quad U^\beta D_1 \subset AGA^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

Wir nennen  $\mu_1 + x_A$  und  $\mu_2 + x_A$  mit  $\mu_1, \mu_2 \subset m_A$  assoziiert, wenn

$$\mu_2 + x_A = \lambda^2 (\mu_1 + x_A)$$

und für  $\lambda$  die Beziehung (56) gilt.  $m_A^*$  sei ein vollständiges System von Elementen  $\mu \subset m_A$ , für welche  $\mu + x_A$  nicht assoziiert sind, und mit  $\mathfrak{S}_A$  werde ein vollständiges System von Substitutionen

$$U^\beta D_1 \subset AGA^{-1} \quad \text{mit } \lambda > 0$$

und verschiedenen Multiplikatoren  $\lambda^2$  bezeichnet. Setzen wir zur Abkürzung noch für  $\mu + x_A \neq 0$ :

$$(63) \quad g(\tau, \mu + x_A) = \sum_{U^\beta D_1 \subset \mathfrak{S}_A} \frac{1}{v^{A-1}(U^\beta D_1)} e^{2\pi i S(\mu + x_A)(\lambda^2 \tau + \beta)}$$

und für  $\mu + x_A = 0$

$$(64) \quad g(\tau, 0) = \begin{cases} 1, & \text{wenn für alle } U^\beta D_1 \subset AGA^{-1}: v^{A-1}(U^\beta D_1) = 1, \lambda > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ergibt sich auf Grund von (62) die Entwicklung:

$$(65) \quad f(\tau) = \sum_{\mu \in m_A^*} b(\mu + \kappa_A) g(\tau, \mu + \kappa_A).$$

Die Koeffizienten  $b(\mu + \kappa_A)$  in (65) können beliebig gewählt werden. Wegen der Linearität von  $H_r$  im letzten Argument können wir uns nunmehr auf die Betrachtung von

$$(66) \quad H_r(\tau; w; A, G; g(\tau, \mu + \kappa_A)) = G_{-r}(\tau; v; A, G; \mu + \kappa_A) \text{ für } \mu \in m_A$$

beschränken; dabei wird noch  $v(A) = w(A)$  gesetzt. Wir transformieren  $H_r$  mit einer reellen unimodularen Substitution  $S$ , für welche  $S \infty$  parabolische Spitze von  $G$ :

$$(67) \quad H_r^S(\tau; w; A, G; f) = \sum_{M \in \mathbb{S}(A, \Theta)} \frac{f(MS\tau)}{w(M) \sigma^{(r)}(M, S) N(m_1^* \tau + m_2^*)^r},$$

wobei  $MS = (m_1^*, m_2^*)$ , und setzen

$$(68) \quad w^S(MS) \frac{w(A) \sigma^{(r)}(A, S)}{w^N(A, S)} = w(M) \sigma^{(r)}(M, S).$$

Dann gilt mit  $M = AL$

$$(69) \quad w^S(MS) = \sigma^{(r)}(AS, S^{-1}LS) w^S(AS) v^S(S^{-1}LS).$$

Wenn  $S \in G$ , dann wähle man  $w^S(AS) = w(AS)$ , so daß  $w^S = w$ ; im übrigen kann über  $w^S(AS)$  willkürlich verfügt werden. Aus (67), (68) und (69) folgt nun

$$(70) \quad H_r^S(\tau; w; A, G; f) = \frac{w^S(AS)}{\sigma^{(r)}(A, S) w(A)} H_r(\tau; w^S; AS, S^{-1}GS; f)$$

und speziell

$$(71) \quad G_{-r}^S(\tau; v; A, G; \mu + \kappa_A) = \frac{v^S(AS)}{\sigma^{(r)}(A, S) v(A)} G_{-r}(\tau; v^S; AS, S^{-1}GS; \mu + \kappa_A).$$

Wir beweisen jetzt, daß sämtliche Reihen  $G_{-r}(\tau; v; A, G; \mu + \kappa_A)$  für  $r > 2$ ,  $|v| = 1$  und  $\mu + \kappa_A \geq 0$  absolut konvergieren. Für jeden Bereich (53a) läßt sich für  $G_{-r}$  eine von  $\tau$  unabhängige konvergente Majorante angeben, womit auf Grund von (71) gezeigt sein wird, daß die Reihen  $G_{-r}$  ganze automorphe Formen darstellen.

Zunächst wird  $g(\tau, \mu + \kappa_A)$  für  $\mu + \kappa_A > 0$  und  $|v| = 1$  abgeschätzt; dazu bestimmen wir eine Basis  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2$  der Multiplikatoren der Substitutionen aus  $AGA^{-1}$ . Nach (63) gilt dann mit  $\tau = x + iy$

$$(72) \quad |g(\tau, \mu + \kappa_A)| \leq \sum_{n_1, \dots, n_{n-1} = -\infty}^{\infty} e^{-2\pi S(u + \kappa_A) y^{\frac{2n_1}{2}} \dots \lambda_{n-1}^{\frac{2n_{n-1}}{2}}}$$

Diese Summe wird abgeschätzt. Mit  $c_1, c_2, \dots$  werden nur von  $A$  und  $G$  abhängige positive Konstanten bezeichnet. Es sei  $c_1$  so bestimmt, daß

$$-2\pi S(\mu + \kappa_A) y \lambda_1^{2r_1} \dots \lambda_{n-1}^{2r_{n-1}} \leq -c_1 S(\mu + \kappa_A) y \lambda_1^{2x_1} \dots \lambda_{n-1}^{2x_{n-1}}$$

für  $v_k \leq x_k \leq v_k + 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Dann gilt nach (72)

$$(73) \quad |g(\tau, \mu + \kappa_A)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{-c_1 S(\mu + \kappa_A) y \lambda_1^{2x_1} \dots \lambda_{n-1}^{2x_{n-1}}} dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(74) \quad \varrho = (\mu + \kappa_A) y, \quad \varrho_1 = c_1 N \varrho^{\frac{1}{n}}$$

und substituieren

$$z^{(v)} = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \log \lambda_k^{(v)2} + \log \frac{\varrho^{(v)}}{N \varrho^{\frac{1}{n}}} \quad (v = 1, \dots, n),$$

wobei

$$(74a) \quad \sum_{v=1}^n z^{(v)} = 0$$

und

$$\left| \frac{\partial (x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial (z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)})} \right| = c_2,$$

dann folgt nach (73)

$$(75) \quad |g(\tau, \mu + \kappa_A)| \leq c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{-\varrho_1 S e^z dz^{(1)} \dots dz^{(n-1)}}.$$

Sei  $(z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$  ein von  $(0, \dots, 0)$  verschiedener fester Punkt und  $z^{(v)} \leq z^{(i)}$  ( $v = 1, \dots, n$ ); da nach (74a)  $z^{(i)} > 0$  und

$$\sum_{\text{sgn } z^{(v)} = +1} z^{(v)} = \sum_{\text{sgn } z^{(v)} = -1} |z^{(v)}|,$$

also

$$|z^{(i)}| \leq (n-1) z^{(i)} \quad \text{für} \quad \text{sgn } z^{(i)} = -1,$$

so kann auf

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)2} \leq (n-1)^2 z^{(i)2},$$

$$(76) \quad -S e^z \leq -e^{z^{(i)}} \leq -e^{(n-1) \frac{-3}{2} R}$$

geschlossen werden. Wir schreiben das Integral (75) auf Polarkoordinaten um:

$$z^{(1)} = R \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2}$$

$$z^{(2)} = R \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$z^{(n-2)} = R \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$z^{(n-1)} = R \sin \varphi_1$$

$$\left| \frac{\partial (z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n-1)})}{\partial (R, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})} \right| = R^{n-2} |\cos^{n-3} \varphi_1 \cos^{n-4} \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-3}|$$

und erhalten unter Berücksichtigung von (76) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |g(\tau, \mu + \kappa_A)| &\leq c_3 \int_0^\infty e^{-\varrho_1 \tau R} R^{n-2} dR = c_3 \int_1^\infty e^{-\varrho_1 \tau (\log z)^{n-2} \frac{dz}{z}} \\ &\leq c_3 e^{-\frac{\varrho_1}{2}} \int_1^\infty e^{-\frac{\varrho_1}{2} \tau (\log z)^{n-2} \frac{dz}{z}} = c_3 e^{-\frac{\varrho_1}{2}} \int_{\frac{\varrho_1}{2}}^\infty e^{-\tau \left(\log \frac{2z}{\varrho_1}\right)^{n-2} \frac{dz}{z}} \\ &\leq c_4 e^{-\frac{\varrho_1}{2}} \int_{\frac{\varrho_1}{2}}^\infty e^{-\tau \{|\log 2z|^{n-2} + |\log \varrho_1|^{n-2}\} \frac{dz}{z}} \\ &\leq e^{-\frac{\varrho_1}{2}} \left\{ c_5 + \int_{\frac{\varrho_1}{2}}^1 e^{-\tau |\log 2z|^{n-2} \frac{dz}{z}} + c_6 |\log \varrho_1|^{n-2} + c_4 |\log \varrho_1|^{n-2} \int_{\frac{\varrho_1}{2}}^1 e^{-\tau \frac{dz}{z}} \right\}. \end{aligned}$$

Für  $\varrho_1 \geq 2$  sind die letzten beiden Integrale beschränkt; für  $\varrho_1 < 2$  sind sie abgeschätzt durch  $|\log \varrho_1|^{n-2} |\log \frac{\varrho_1}{2}|$  bzw.  $|\log \frac{\varrho_1}{2}|$ , so daß

$$(77) \quad |g(\tau, \mu + \kappa_A)| \leq e^{-c_7 (N(\mu + \kappa_A) \tau)^{\frac{1}{n}}} (c_8 + c_9 |\log N(\mu + \kappa_A) \tau|^{n-1}).$$

Wir ersetzen in (77)  $\tau$  durch  $M\tau$  ( $M \in \mathfrak{G}(A, G)$ ,  $\underline{M} = (m_1, m_2)$ ); an Stelle von  $Ny$  tritt dann

$$Ny_1 = \frac{Ny}{N|m_1\tau + m_2|^{\frac{1}{n}}}.$$

Es gibt nur endlich viele solche  $M$ , für welche  $m_1 = 0$ . Ferner ist nach M., § 1 entweder  $m_1 = 0$  oder  $c_{10} |Nm_1| \geq 1$ . Beschränken wir uns auf die Punkte des Bereichs

$$(78) \quad Ny \geq \kappa_0 > 0,$$

so gilt mit nur von  $A, G, \mu + \kappa_A, \kappa_0$  abhängigen positiven Konstanten  $g_1, g_2, \dots$

$$(79) |g(M\tau, \mu + \kappa_A)| \leq \begin{cases} e^{-g_1 N y^{\frac{1}{2}}} (g_2 + g_3 |\log N y|^{n-1}) & \text{für } m_1 = 0, \\ g_4 + g_5 |\log N y|^{n-1} + g_6 |\log N |m_1 \tau + m_2||^{n-1} & \text{für } m_1 \neq 0. \end{cases}$$

Beachten wir für  $Ny \geq 1$  und  $m_1 \neq 0$  die Abschätzung

$$Ny \leq c_{10} N |m_1 y| \leq c_{10} N |m_1 \tau + m_2|,$$

$$|\log Ny| \leq |\log c_{10}| + |\log N |m_1 \tau + m_2||,$$

so folgt allgemein

$$|g(M\tau, \mu + \kappa_A)| \leq g_7 + g_8 |\log N |m_1 \tau + m_2||^{n-1}.$$

Die Reihe  $G_{-,r}(\tau; v; A, G; \mu + \kappa_A)$  hat daher im Gebiet (78) die Majorante

$$(80) \sum_{N \in \mathfrak{E}(A, \bullet)} \frac{g_7 + g_8 |\log N |m_1 \tau + m_2||^{n-1}}{N |m_1 \tau + m_2|^r},$$

welche offenbar für  $r > 2$  und

$$(81) \begin{aligned} |x^{(v)}| &\leq C_0, \quad Ny \geq \kappa_0 \\ C_1 Ny^{\frac{1}{n}} &\leq y^{(v)} \leq C_2 Ny^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

gleichmäßig konvergiert, wenn dies für die Reihe

$$(82) \sum_{N \in \mathfrak{E}(A, \bullet)} \frac{1}{N |m_1 \tau + m_2|^r}$$

zutrifft. Da für die Punkte von (81)

$$N |m_1 \tau + m_2| \geq C' N |m_1 i + m_2|$$

mit positivem  $C' = C'(C_0, C_1, C_2, \kappa_0)$  gilt (vgl. P. V, Hilfssatz 3), so reduziert sich die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz von (82) über (81) auf die Konvergenz von (82) in dem speziellen Punkt  $\tau = i$ . Die letzte Vereinfachung in der Betrachtung auf den Fall  $A = E$  kann vermöge

$$\mathfrak{E}(A, G) A^{-1} = \mathfrak{E}(E, A G A^{-1})$$

wörtlich wie in P. V, S. 148 vorgenommen werden. Es verbleibt also nur, die Konvergenz von

$$\sum_{L \in \mathfrak{E}(E, \bullet)} \frac{1}{N |\gamma \tau + \delta|^r} \quad (r > 2)$$

zu zeigen. Als wesentliches Hilfsmittel wird dabei, in Anlehnung an die Konvergenzuntersuchungen in P. V, der nichteuklidische Volumeninhalt in  $\mathfrak{I}$  herangezogen.  $\tau_0$  sei ein festgewählter innerer Punkt von  $\mathfrak{I}$ . Wir denken uns dann ein solches Repräsentantensystem  $\mathfrak{E}(E, G)$  ausgewählt, daß bei

geeigneter Wahl der positiven Konstanten  $C_0, C_1, C_2$  für alle  $L\tau_0 = x_{0L} + iy_{0L}$  ( $L \in \mathfrak{G}(E, G)$ ) die Ungleichungen

$$(83) \quad |x_{0L}^{(v)}| \leq C_0 \\ C_1 N y_{0L}^{\frac{1}{n}} \leq y_{0L}^{(v)} \leq C_2 N y_{0L}^{\frac{1}{n}} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllt sind. Mit  $s(\tau_1, \tau_2)$  bezeichnen wir den Abstand zweier Punkte  $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{T}$  in der nichteuklidischen Maßbestimmung, welche dem Bereich  $\mathfrak{T}$  in natürlicher Weise zugeordnet ist (vgl. M., § 2). Für diesen Abstand gilt die Beziehung

$$(84) \quad s^2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^n (s^{(i)}(\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}))^2,$$

wobei  $s^{(i)}(\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)})$  der Abstand der Punkte  $\tau_1^{(i)}$  und  $\tau_2^{(i)}$ , berechnet in der bekannten hyperbolischen Metrik der oberen  $\tau^{(i)}$ -Halbebene. Es sei  $\mathfrak{K}$  eine nichteuklidische Kugel um  $a_0 + ib_0$  mit dem Radius  $\varrho$ ;  $\mathfrak{K}$  ist enthalten in dem Bereich

$$s^{(v)}(\tau^{(v)}, a_0^{(v)} + ib_0^{(v)}) \leq \varrho \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

folglich gilt für  $\tau \in \mathfrak{K}$  (vgl. dazu P. V, S. 144)

$$(85) \quad b_0^{(v)} e^{-\varrho} \leq y^{(v)} \leq b_0^{(v)} e^{\varrho} \\ |\tau^{(v)} - (a_0^{(v)} + ib_0^{(v)})| \leq b_0^{(v)} (e^{\varrho} - 1) \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Wir wählen eine feste Zahl  $\varrho_0$  im Intervall

$$0 < \varrho_0 < \frac{1}{2} \min_{\substack{L \in \mathfrak{G} \\ L\tau_0 \neq \tau_0}} s(L\tau_0, \tau_0)$$

und bezeichnen mit  $\mathfrak{K}_0$  die nichteuklidische Kugel um  $\tau_0$  mit dem Radius  $\varrho_0$ . Die Punktmengen  $L_2 \mathfrak{K}_0, L_1 \mathfrak{K}_0$  ( $L_2, L_1 \in \mathfrak{G}$ ) sind dann entweder fremd oder identisch, letzteres nur dann, wenn  $L_2 = L_1 L$  mit  $L\tau_0 = \tau_0$ ;  $l_0$  sei die Anzahl dieser  $L \in \mathfrak{G}$ , welche  $\tau_0$  als Fixpunkt haben. Für  $\tau = x + iy \in \mathfrak{K}_0$ ,  $L \in \mathfrak{G}(E, G)$  sei  $L\tau = x_L + iy_L$ ; nach (85) und (83) ist dann

$$(86) \quad |x_L^{(v)} - x_{0L}^{(v)}| \leq y_{0L}^{(v)} (e^{\varrho_0} - 1) \leq C_2 (e^{\varrho_0} - 1) N y_{0L}^{\frac{1}{n}} \quad (v = 1, \dots, n),$$

ferner nach (83) und (85)

$$(87) \quad C_1 e^{-2\varrho_0} N y_L^{\frac{1}{n}} \leq C_1 e^{-\varrho_0} N y_{0L}^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\varrho_0} y_{0L}^{(v)} \leq y_L^{(v)} \\ \leq e^{\varrho_0} y_{0L}^{(v)} \leq C_2 e^{\varrho_0} N y_{0L}^{\frac{1}{n}} \leq C_2 e^{2\varrho_0} N y_L^{\frac{1}{n}},$$

also mit  $C_3 = C_1 e^{-2\varrho_0}$ ,  $C_4 = C_2 e^{2\varrho_0}$  schließlich

$$(88) \quad C_3 N y_L^{\frac{1}{n}} \leq y_L^{(v)} \leq C_4 N y_L^{\frac{1}{n}} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Da

$$N y_0 L = \frac{N y_0}{N |\gamma \tau_0 + \delta|^2} \leq \begin{cases} N y_0 & \text{für } \gamma = 0, \\ N y_0^{-1} N \gamma^{-2} & \text{für } \gamma \neq 0 \end{cases}$$

und  $N \gamma^{-2}$  für  $\gamma \neq 0$  beschränkt ist, so folgt aus (84), (86) und (87), daß

$$(89) \quad |x_L^{(v)}| \leq C_{51} y_L^{(v)} \leq C_6 \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

$\mathfrak{D}_R$  sei der Durchschnitt der nichteuklidischen Kugel  $\mathfrak{R}_R$  vom Radius  $R$  um  $\tau = i$  mit der durch

$$(90) \quad C_3 N y^{\frac{1}{n}} \leq y^{(v)} \leq C_4 N y^{\frac{1}{n}} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

$$(91) \quad |x^{(v)}| \leq C_5$$

definierten Punktmenge, in welcher nach (88) und (89) alle Kugeln  $L_{R_0}$  ( $L \subset (E, G)$ ) enthalten sind. Man kann den nichteuklidischen, gegenüber Automorphismen von  $\mathfrak{T}$  invarianten Volumeninhalt

$$(92) \quad V(\mathfrak{D}_R) = \int \dots \int_{\mathfrak{D}_R} N \frac{dx dy}{y^2}$$

von  $\mathfrak{D}_R$  mit Hilfe der nachfolgenden Überlegungen leicht abschätzen. Wir wählen eine Basis  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2$  für die Multiplikatoren der Substitutionen aus der affinen Gruppe von  $G$  und führen in (92) die Variablensubstitution

$$(93) \quad \begin{aligned} y &= z \lambda_1^{2x_1} \lambda_2^{2x_2} \dots \lambda_{n-1}^{2x_{n-1}}, \\ \left| \frac{\partial (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})}{\partial (x, x_1, \dots, x_{n-1})} \right| &= \Delta z^{n-1} \quad (\Delta \text{ konstant} > 0) \end{aligned}$$

aus. Nach (90) gilt für  $\tau \in \mathfrak{D}_R$

$$z^n = N y, \quad C_3 \leq \frac{y}{z} = \lambda_1^{2x_1} \dots \lambda_{n-1}^{2x_{n-1}} \leq C_4,$$

woraus

$$(94) \quad |x_k| \leq C_7 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

folgt. Eine in  $\mathfrak{D}_R$  gültige Abschätzung für  $z$  gewinnt man in folgender Weise. Integriert man geradlinig vom Punkte  $i$  über  $x^{(v)} + i$  nach  $\tau^{(v)} = x^{(v)} + i y^{(v)}$ , so erhält man auf Grund der Minimumeigenschaft von  $s^{(v)}(\tau^{(v)}, i)$  einerseits

$$s^{(v)}(\tau^{(v)}, i) \leq \int_i^{\tau^{(v)}} \frac{\sqrt{dx^{(v)2} + dy^{(v)2}}}{y^{(v)}} = |x^{(v)}| + |\log y^{(v)}| \leq C_8 + |\log N y^{\frac{1}{n}}|$$

mit  $C_8 = C_5 + \text{Max}(-\log C_3, \log C_4)$ , andererseits nach (85)

$$s^{(v)}(\tau^{(v)}, i) \geq |\log y^{(v)}| \geq |\log N y^{\frac{1}{n}}| - C_9$$

mit  $C_9 = \text{Max} (-\log C_3, \log C_4)$ , insgesamt also

$$(95) \quad \begin{aligned} s^{(n)}(\tau^{(n)}, i) &= |\log N y^{\frac{1}{n}}| + \xi^{(n)}, \\ |\xi^{(n)}| &\leq C_{10} = \text{Max} (C_3, C_4). \end{aligned}$$

Die Zahl  $\delta_0$  sei im Intervall

$$(96) \quad 0 < \delta_0 < \frac{r-2}{r+2}$$

fest gewählt. Unter der Voraussetzung

$$(97) \quad R \geq C_{11} = C_{10} \frac{(1-\delta_0)}{\delta_0} \sqrt[n]{n}$$

zeigen wir, daß

$$(98) \quad z \geq e^{-\frac{1}{1-\delta_0} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} R}.$$

Beachtet man (95), dann nimmt der Beweis von (98) folgenden Verlauf.

Wenn  $C_{10} > \delta_0 |\log N y^{\frac{1}{n}}|$ , dann gilt

$$\begin{aligned} -\frac{C_{10}}{\delta_0} &< -|\log N y^{\frac{1}{n}}| = -|\log z| \leq \log z, \\ -\frac{1}{1-\delta_0} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} R &\leq -\frac{C_{10}}{\delta_0} \leq \log z, \end{aligned}$$

also (98); es kann also  $C_{10} \leq \delta_0 |\log N y^{\frac{1}{n}}|$  angenommen werden. Aus  $\tau \in \mathfrak{R}_R$ , d. h.

$$(99) \quad \sum_{i=1}^n (|\log N y^{\frac{1}{n}}| + \xi^{(i)})^2 \leq R^2,$$

schließt man dann

$$n |\log N y^{\frac{1}{n}}|^2 (1 - \delta_0)^2 \leq R^2,$$

also ebenfalls

$$\log z = \log N y^{\frac{1}{n}} \geq -|\log N y^{\frac{1}{n}}| \geq -\frac{1}{1-\delta_0} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} R$$

Aus (91), (92), (93), (94) und (98) ergibt sich damit für  $R \geq C_{11}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} (100) \quad V(\mathfrak{D}_R) &\leq A (2C_5)^n (2C_7)^{n-1} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{n+1}} \\ &\quad e^{-\frac{1}{1-\delta_0} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} R} \\ &= n A (2C_5)^n (2C_7)^{n-1} e^{\frac{1}{1-\delta_0} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} R} = C_{12} e^{\frac{1}{1-\delta_0} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} R} \end{aligned}$$

Sei  $L \in \mathfrak{S}(E, G)$ ,  $\tau \in \mathfrak{R}_0$  und

$$(101) \quad s(L\tau_0, i) \geq C_{10} \frac{1+\delta_0}{\delta_0} \sqrt{n} + \varrho_0,$$

also

$$(102) \quad s(L\tau, i) \geq C_{10} \frac{1+\delta_0}{\delta_0} \sqrt{n}.$$

Dann muß  $C_{10} \leq \delta_0 |\log N y_L^{\frac{1}{n}}|$  gelten, da andernfalls nach (95) und (84)

$$s(L\tau, i)^2 < n \left( \frac{C_{10}}{\delta_0} + C_{10} \right)^2 = C_{10}^2 \frac{(1+\delta_0)^2}{\delta_0^2} n$$

im Widerspruch zu (101). Es folgt daher nach (95)

$$s(L\tau, i) \leq \sqrt{n} (1+\delta_0) |\log N y_L^{\frac{1}{n}}|,$$

mithin unter der Voraussetzung (101)

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n s^{(r)}(L^{(r)}\tau^{(r)}, i) &\geq \sum_{r=1}^n |\log y_L^{(r)}| \geq |\log N y_L| \\ &\geq \sqrt{n} \frac{1}{1+\delta_0} s(L\tau, i). \end{aligned}$$

Wie in P. V, S. 145 erhält man aus (89)

$$e^{s^{(r)}(L^{(r)}\tau^{(r)}, i)} \leq \frac{C_5^2 + (y_L^{(r)} + 1)^2}{y_L^{(r)}} \leq \frac{y_L^{(r)}}{y_L^{(r)}} C_{13}^{\frac{1}{n}}$$

und damit

$$(103) \quad N \frac{y_L}{y} = \frac{1}{N |\gamma\tau + \delta|^2} \leq C_{13} e^{-\sum_{r=1}^n s^{(r)}(L^{(r)}\tau^{(r)}, i)} \leq C_{13} e^{-\sqrt{n} \frac{1}{1+\delta_0} s(L\tau, i)}$$

Es sei  $\mathfrak{S}_{R'}$  die Menge,  $m_{R'}$  die Anzahl der  $L \in \mathfrak{S}(E, G)$  mit  $L\tau_0 \in \mathfrak{D}_{R'}$ ;  $V_0$  bezeichne das nichteuklidische Volumen von  $\mathfrak{R}_0$ . Ein Vergleich der Volumina liefert

$$m_{R'} V_0 \leq l_0 V(\mathfrak{D}_{R'} + \varrho_0) \leq l_0 C_{12} e^{\frac{1}{1+\delta_0} \sqrt{n}(R' + \varrho_0)},$$

falls  $R' + \varrho_0 \geq C_{11}$ , also

$$(104) \quad m_{R'} \leq C_{14} e^{\frac{1}{1+\delta_0} \sqrt{n} R'} \quad \text{für } R' \geq C_{11} - \varrho_0.$$

Wir wählen einen festen, die Ungleichung

$$R \geq \max \left( C_{11} - \varrho_0, C_{11} \frac{1+\delta_0}{\delta_0} \sqrt{n} + \varrho_0 \right)$$

befriedigenden Wert für  $R$  und setzen

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{S}_R, \quad \mathfrak{I}_m = \mathfrak{S}_m R - \mathfrak{S}_{(m-1)R} \quad \text{für } m \geq 2.$$

Für  $L \subset \mathfrak{I}_m$ ,  $m \geq 2$  ist dann (101) erfüllt und (104) mit  $R' = mR$  anzuwenden:

$$(105) \quad \sum_{L \subset \mathfrak{I}_m} \frac{1}{N|\gamma\tau + \delta|^r} \leq C_{14} e^{\frac{1}{1-\delta_0} \sqrt{n} R} \cdot C_{15}^{\frac{r}{2}} e^{-\sqrt{n} \frac{1}{1+\delta_0} ((m-1)R - \epsilon_0) \frac{r}{2}} \\ \leq C_{15} e^{-\sqrt{n} R \epsilon_0 m},$$

$$\epsilon_0 = \frac{r}{2(1+\delta_0)} - \frac{1}{(1-\delta_0)} = \frac{(r-2) - \delta_0(r+2)}{2(1-\delta_0^2)} > 0.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{L \subset \mathfrak{I}_{R'}} \frac{1}{N|\gamma\tau + \delta|^r} \leq \sum_{L \subset \mathfrak{I}_1} \frac{1}{N|\gamma\tau + \delta|^r} + C_{15} \frac{e^{-2\sqrt{n} R \epsilon_0}}{1 - e^{-\sqrt{n} R \epsilon_0}}$$

für beliebiges  $R' \geq 0$ . Da die Summe über  $\mathfrak{I}_1$  nur endlich viele Glieder enthält, ist also die behauptete gleichmäßige Konvergenz der Reihen  $G_{-,r}(\tau; v; A, G; \mu + \kappa_A)$  bewiesen. Wenn  $\mu + \kappa_A > 0$ , dann geht nach (79) und (80) jedes Glied von  $G_{-,r}$ , also auch  $G_{-,r}$  selbst bei Annäherung von  $\tau$  innerhalb (90) und (91) an die parabolische Spitze  $\infty$  gegen 0. In der „Potenzreihenentwicklung“ von  $G_{-,r}$  zur Spitze  $\infty$  kann dann ein konstantes Glied ungleich 0 nicht vorkommen. Wegen der Transformationsformeln für  $G_{-,r}$  trifft dieser Sachverhalt für alle parabolischen Spitzen zu. Allgemein soll eine ganze Form eine Spitzenform heißen, wenn in den „Potenzreihenentwicklungen“ der Form zu sämtlichen parabolischen Spitzen die konstanten Glieder verschwinden. Die Reihen  $G_{-,r}$  sind also für  $\mu + \kappa_A > 0$  Spitzenformen.

Zusammenfassend stellen wir fest:

**Satz 1.** Die Poincaréschen Reihen  $G_{-,r}(\tau; v; A, G; \mu + \kappa_A)$  stellen für  $r > 2$ ,  $|v| = 1$ ,  $\mu + \kappa_A \geq 0$  ganze automorphe Formen, für  $\mu + \kappa_A > 0$  sogar Spitzenformen dar.

Es gelten die Transformationsformeln (71). Die Entwicklungen von  $G_{-,r}$  zu den parabolischen Spitzen können explizit angegeben werden und sind erwartungsgemäß von ähnlicher Beschaffenheit, wie die Potenzreihenentwicklungen im Spezialfall  $n = 1$  <sup>8)</sup>. Auch im allgemeinen setzen sich die Entwicklungskoeffizienten aus Werten von Besselschen Funktionen und verallgemeinerten Kloostermanschen Summen zusammen. Die Eisensteinreihen  $G_{-,r}(\tau; 1; A, M(n), 0)$  ganzzahliger Dimension für die Hauptkongruenzuntergruppe  $M(n)$  der Hilbertschen Modulgruppe  $M(1)$  zur Idealstufe  $n$  hat Kloosterman <sup>9)</sup> ausführlich untersucht. Ich verweise ferner auf die

<sup>8)</sup> H. Petersson, Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, Acta mathematica 58 (1932), S. 169–215.

<sup>9)</sup> H. D. Kloosterman, Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Univ. 6 (1928), S. 163–188.

Arbeit<sup>10)</sup>, in welcher erstmalig automorphe Formen nicht-ganzer Dimension in mehreren Veränderlichen, nämlich die Eisensteinreihen

$$G_{-\frac{k}{2}}(\tau; v_0; A, \mathbf{M}(n); 0)$$

für  $n = 2$ , das  $\theta$ -Multiplikatorsystem  $v_0$  und  $k = 3, 5, 7, \dots$  betrachtet worden sind.

Da nicht entschieden ist, wann die Reihen  $G_{-\tau}$  identisch verschwinden, so ist die Existenz von ganzen nicht identisch verschwindenden Formen zu einem vorgegebenen Multiplikatorsystem  $v$  noch nicht gesichert. Gewiß ist nur

$$(106) \quad G_{-\tau}(\tau; 1; A, G; 0) \neq 0 \text{ für ganz rationales gerades } \tau > 2;$$

denn das konstante Glied in der Entwicklung dieser Form zur parabolischen Spitze  $A^{-1} \infty$  ist von 0 verschieden, wie man leicht sieht. Wir beenden die Ausführungen dieses Paragraphen mit dem Beweis der folgenden Existenzaussage.

**Satz 2.** Sei  $v$  ein vorgegebenes Multiplikatorsystem zu  $G$  für die Dimension  $-\tau < -2$  mit  $|v| = 1$ , dann gibt es eine natürliche Zahl  $m$  derart, daß die Klasse  $\{G, -\tau m, v^m\}$  eine nicht identisch verschwindende ganze automorphe Form enthält.

Zum Beweis bilden wir (vgl. S., S. 646) die Funktion

$$(107) \quad F(z) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \mathfrak{O})} \left( z - \frac{v(M) N(m_1 \tau + m_2)}{g(M \tau, \mu + \kappa_A)} \right)^{-1}$$

mit  $\mu + \kappa_A \geq 0$ ,  $\tau > 2$ ,  $|v| = 1$ . Aus der bewiesenen Konvergenz für die Reihen  $G_{-\tau}$  folgt die von  $F(z)$ . Wenn in einem speziellen Punkt  $\tau$  der Nenner  $g(M \tau, \mu + \kappa_A)$  verschwindet, so ersetze man das zugehörige Reihenglied durch 0.  $F(z)$  kann nicht identisch verschwinden, da bei allgemeiner Wahl von  $\tau$  die Funktion  $F(z)$  im Endlichen Pole erster Ordnung hat. In der Potenzreihenentwicklung nach  $z$

$$(108) \quad -F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} H_{\tau, m}(\tau; v^m; A, G; g^m(\tau, \mu + \kappa_A))$$

mit

$$H_{\tau, m}(\tau; v^m; A, G; g^m(\tau, \mu + \kappa_A)) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \mathfrak{O})} \frac{g^m(M \tau, \mu + \kappa_A)}{v^m(M) N(m_1 \tau + m_2)^{\tau m}}$$

können daher nicht alle Koeffizienten identisch in  $\tau$  verschwinden. Damit ist die Behauptung bewiesen; denn  $H_{\tau, m}$  ist eine ganze Form in  $\{G, -\tau m, v^m\}$ .

<sup>10)</sup> H. Maaß, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahlgiger Dimension mit  $\theta$ -Multiplikatoren in zwei Variablen, Math. Zeitschr. 43 (1938), S. 709–738.

## § 3.

## Algebraische Relationen zwischen automorphen Formen.

Um zu einer Gruppe  $G$  eine Funktionentheorie zu entwickeln, muß  $G$  den eingangs erwähnten Forderungen genügen, die jetzt genauer präzisiert werden sollen. Wir setzen voraus, daß es nur endlich viele nicht äquivalente parabolische Spitzen von  $G$  gibt, und wählen ein festes volles System von nicht äquivalenten Spitzen  $s_1 = \infty, s_2, \dots, s_h$  ( $h \geq 1$ ) aus. Die reellen unimodularen Substitutionen

$$A_1 = E, A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, h)$$

seien derart bestimmt, daß

$$A_k s_k = \infty \quad (k = 1, 2, \dots, h).$$

Der Modul  $t_k$  der Translationen in der affinen Gruppe von  $A_k G A_k^{-1}$  werde erzeugt von  $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kn}$ , und  $\lambda_{k1}^2, \lambda_{k2}^2, \dots, \lambda_{kn-1}^2$  sei eine Basis für die Gruppe der Multiplikatoren der affinen Substitutionen in  $A_k G A_k^{-1}$ .

Wir verabreden die Bezeichnung

$$\tau = x + iy, Y = \log y, A_{kj} = \log \lambda_{kj}^2 \quad (k = 1, \dots, h; j = 1, \dots, n-1),$$

$$(109) \quad A_{k0}^{(v)} = \frac{1}{n} \quad (k = 1, \dots, h; v = 1, \dots, n),$$

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_{kj} \alpha_{kj}, Y = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_{kj} A_{kj} \quad (k = 1, \dots, h)$$

und definieren die Punktmenge  $A_k \mathfrak{P}_k^{(\kappa_0)}$  durch

$$(110) \quad -\frac{1}{2} \leq \xi_{kj} < \frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$-\frac{1}{2} \leq \eta_{kl} < \frac{1}{2} \quad (l = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$(111) \quad \eta_{k0} \geq \log \kappa_0 \quad (\kappa_0 > 0).$$

Die Forderung, der  $G$  genügen soll, läßt sich nunmehr folgendermaßen formulieren. Es soll möglich sein, die Vereinigungsmenge

$$(112) \quad \mathfrak{P}^{(\kappa_0)} = \sum_{k=1}^h \mathfrak{P}_k^{(\kappa_0)}$$

bei geeigneter Wahl eines hinreichend großen  $\kappa_0$  durch eine Punktmenge  $\mathfrak{B}^{(\kappa_0)}$ , die mit ihrem Rand ganz im Innern von  $\mathfrak{T}$  liegt, zu einem Fundamentalbereich

$$(113) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{P}^{(\kappa_0)} + \mathfrak{B}^{(\kappa_0)}$$

zu ergänzen. Nach den Ergebnissen von M., § 3 genügen die Hilbertschen Modulgruppen und deren Untergruppen von endlichem Index dieser Bedingung. Der Definition einer ganzen Form  $\varphi(\tau)$  kann wegen

$$(114) \quad \varphi^{A_k^{-1}}(\tau) = N(c_k A_k^{-1} \tau + d_k)^r \varphi(A_k^{-1} \tau) \quad (k = 1, 2, \dots, h)$$

die folgende Fassung gegeben werden. Eine im Innern von  $\mathfrak{T}$  regulär analytische Funktion  $\varphi(\tau)$ , die den Transformationsformeln (5) genügt, heißt eine ganze automorphe Form, wenn  $\varphi^{A_k^{-1}}(\tau)$  in  $A_k \mathfrak{P}_k^{(v)}$  oder  $N(c_k \tau + d_k)^r \varphi(\tau)$  in  $\mathfrak{P}_k^{(v)}$  für  $k = 1, 2, \dots, h$  beschränkt ist. Wir setzen in fester Bedeutung für  $k = 1, 2, \dots, h$ :

$$(115) \quad \begin{aligned} \varphi^{A_k^{-1}}(U^\alpha) &= e^{2\pi i \varrho_k(\alpha)} \text{ für } \alpha \in t_k, \quad (\varrho_k(\alpha) \text{ linear in } \alpha), \\ S(\mu_k, \alpha_k m) &= \delta_{1m}, \quad m_k = [\mu_{k1}, \dots, \mu_{kn}], \\ \varrho_k(\alpha) &\equiv S(\alpha_k \alpha) \pmod{[1]} \text{ für } \alpha \in t_k. \end{aligned}$$

Für eine ganze Form  $\varphi(\tau)$  gelten dann auf Grund von § 1 die Entwicklungen

$$(116) \quad \varphi^{A_k^{-1}}(\tau) = \sum_{\substack{\mu \in m_k \\ \mu + \alpha_k \geq 0}} a_k(\mu + \alpha_k) e^{2\pi i S(\mu + \alpha_k)\tau}$$

mit

$$(117) \quad a_k(\mu + \alpha_k) = \frac{1}{J_k} \int_{\mathfrak{P}_k} \dots \int \varphi^{A_k^{-1}}(\tau) e^{-2\pi i S(\mu + \alpha_k)\tau} dx^{(1)} \dots dx^{(n)},$$

wobei

$$S\mu_{k1}x = t_{k1}, \quad \left| \frac{\partial(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})}{\partial(t_{k1}, \dots, t_{kn})} \right| = J_k$$

und  $\mathfrak{P}_k$  die Punktmenge, welche dem Würfel

$$-\frac{1}{2} \leq t_{k1} \leq \frac{1}{2} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

entspricht. Da für eine beliebige reelle unimodulare Substitution  $S$  mit  $\underline{S} = (\gamma, \delta)$  die Beziehung

$$Ny^* = \frac{Ny}{N|\gamma\tau + \delta|}, \quad \Im\tau = y, \quad \Im S\tau = y^*$$

gilt, folgt also für  $|\delta| = 1$  und reelles  $\tau$

$$(118) \quad Ny^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)| = Ny^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau^*)| = Ny^{\frac{r}{2}} |\varphi^{A_k^{-1}}(\tau_k)| \quad (k = 1, \dots, h),$$

falls  $L\tau = \tau^* = x^* + iy^*$ ,  $L \in G$ ,  $A_k\tau = \tau_k = x_k + iy_k$ . Die nachfolgenden Ergebnisse dieses und des vierten Paragraphen sind in starker Anlehnung an die unter 3) zitierte Siegelsche Untersuchung dargestellt und bewiesen worden. Ohne daß wir es stets bemerken, soll ständig  $|v| = 1$  und  $\tau$  reell angenommen werden. Es gilt dann

**Satz 3.** Eine ganze automorphe Form  $\subset \{G, -r, v\}$  positiver Dimension  $-r > 0$  muß notwendig identisch verschwinden.

Zum Beweis denken wir uns eine ganze Form  $\varphi(\tau) \subset \{G, -r, v\}$  mit  $r < 0$  vorgelegt. Nach (118) ist der Ausdruck  $Ny^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)|$  invariant gegen-

über den Substitutionen von  $G$  und auf Grund von  $r < 0$  und der Definition einer ganzen Form im Fundamentalbereich  $\mathfrak{F}$  beschränkt. Es gilt daher in ganz  $\mathfrak{T}$

$$|\varphi(\tau)| < C N y^{-\frac{r}{2}}$$

für eine gewisse Konstante  $C$ . Für  $k = 1$  folgt dann nach (117) die Ungleichung

$$|a_1(\mu + \kappa_1)| e^{-2\pi S(\mu + \kappa_1)y} < C N y^{-\frac{r}{2}} \quad \text{für } \mu \subset m_1,$$

aus welcher für  $y \rightarrow 0$  geschlossen wird, daß alle  $a_1(\mu + \kappa_1) = 0$ , d. h. daß  $\varphi(\tau)$  identisch verschwindet. Satz 3 wird später ergänzt, indem wir zeigen werden, daß eine ganze Form der Dimension 0 notwendig konstant ist. Wir betrachten jetzt eine ganze Form  $\varphi(\tau)$  nicht-positiver Dimension  $-r$  und wollen voraussetzen, daß in den zugehörigen Entwicklungen (116)

$$(119) \quad \begin{aligned} a_k(\mu + \kappa_k) &= 0 \quad \text{für } \mu \subset m_k \quad \text{und} \\ N(\mu + \kappa_k) &\leq m \quad (k = 1, 2, \dots, h). \end{aligned}$$

Aus den nachfolgenden Abschätzungen, die sich auf die Voraussetzung (119) gründen, geht das wichtige Resultat hervor, daß  $\varphi(\tau)$  identisch verschwindet, sobald  $m$  eine nur von  $r$  abhängige Schranke übertrifft. Mit  $g_1, g_2, \dots$  werden im folgenden positive, nur von  $G, A_k, \alpha_{kj}, \lambda_{kl}^2$  ( $k = 1, \dots, h; j = 1, \dots, n; l = 1, \dots, n-1$ ) abhängige Konstanten bezeichnet. Zunächst wird  $\varphi^{A_k^{-1}}(\tau_k)$  für  $\tau_k \subset A_k(\mathfrak{P}_k^{(\kappa_0)} + \mathfrak{B}^{(\kappa_0)})$  abgeschätzt. Wegen der Konvergenz der Reihe (116) für alle Punkte von  $\mathfrak{T}$  ist bei jeder Wahl von  $g_2$  der Ausdruck  $a_k(\mu + \kappa_k) e^{-g_2 \pi S(\mu + \kappa_k)y_k}$  als Funktion von  $\mu \subset m_k$  beschränkt. Wir wählen  $g_2$  so klein, daß

$$(120) \quad g_2 \leq y_k^{(v)} = \Im \tau_k^{(v)} \quad \text{für } \tau_k \subset A_k(\mathfrak{P}_k^{(\kappa_0)} + \mathfrak{B}^{(\kappa_0)}),$$

und denken uns darauf  $\varphi(\tau)$  so normiert, daß

$$(121) \quad |a_k(\mu + \kappa_k)| \leq e^{\pi S(\mu + \kappa_k)y_k} \quad (\mu \subset m_k, k = 1, 2, \dots, h)$$

für  $\tau_k \subset A_k(\mathfrak{P}_k^{(\kappa_0)} + \mathfrak{B}^{(\kappa_0)})$ . Für die Punkte dieses Bereichs gilt daher

$$(122) \quad |\varphi^{A_k^{-1}}(\tau_k)| \leq \sum_{\substack{\mu \subset m_k, \mu + \kappa_k > 0 \\ N(\mu + \kappa_k) > m}} e^{-\pi S(\mu + \kappa_k)y_k}.$$

Für eine natürliche Zahl  $t$  sei  $Z_k(t)$  die Anzahl der  $\mu \subset m_k$ , für welche

$$\mu + \kappa_k > 0, \quad t-1 < S(\mu + \kappa_k)y_k \leq t, \quad N(\mu + \kappa_k) > m.$$

Nach (120) ist offenbar

$$Z_k(t) \leq g_4 t^n$$

und  $Z_k(t) > 0$  nur dann, wenn  $t^n \geq N(\mu + \kappa_k) y_k > m N y_k$ , also  $t > m^{\frac{1}{n}} N y_k^{\frac{1}{n}}$ , so daß aus (122) für  $\tau_k \in A_k(\mathfrak{P}_k^{(x_0)} + \mathfrak{B}^{(x_0)})$  die Abschätzung

$$|\varphi^{A_k^{-1}}(\tau_k)| \leq g_k \sum_{t > m^{\frac{1}{n}} N y_k^{\frac{1}{n}}} t^n e^{-\pi(t-1)} < g_k e^{-\frac{\pi}{2} m^{\frac{1}{n}} N y_k^{\frac{1}{n}}}$$

folgt. Variiert  $\tau_k$  in  $A_k(\mathfrak{P}_k^{(x_0)} + \mathfrak{B}^{(x_0)})$ , so wird daher das Maximum  $M_k$  des Betrages von

$$\varphi^{A_k^{-1}}(\tau_k) e^{\frac{\pi}{4} m^{\frac{1}{n}} N y_k^{\frac{1}{n}}}$$

im Endlichen, etwa in  $\tau_k^0 \in A_k(\mathfrak{P}_k^{(x_0)} + \mathfrak{B}^{(x_0)})$  angenommen. Es gilt also für  $k = 1, 2, \dots, h$

$$(123) \quad |\varphi^{A_k^{-1}}(\tau_k)| \leq M_k e^{-\frac{\pi}{4} m^{\frac{1}{n}} N y_k^{\frac{1}{n}}} \text{ für } \tau_k \in A_k(\mathfrak{P}_k^{(x_0)} + \mathfrak{B}^{(x_0)}),$$

im Punkt  $\tau_k^0$  sogar mit dem Gleichheitszeichen. Für eine geeignete, fest gewählte Zahl  $j$  aus der Reihe  $1, 2, \dots, h$  ist

$$(124) \quad M_k \leq M_j \quad (k = 1, 2, \dots, h).$$

Das Ziel unserer Überlegungen ist der Nachweis von  $M_j = 0$ . Zu einem beliebigen Punkt  $\tau = x + iy$  von  $\mathfrak{T}$  bestimme man der Reihe nach  $\tau^* = A_j^{-1} \tau = x^* + iy^*$ ,  $L \subset G$  derart, daß  $\tilde{\tau} = L\tau^* = \tilde{x} + i\tilde{y}$  in  $\mathfrak{F}$  liegt, also etwa  $\tilde{\tau} \in (\mathfrak{P}_i^{(x_0)} + \mathfrak{B}^{(x_0)})$  für ein gewisses  $i$  und schließlich  $\tau_i = A_i \tilde{\tau} = x_i + iy_i$ . Es besteht dann nach (118)

$$N y_i^{\frac{r}{2}} |\varphi^{A_i^{-1}}(\tau_i)| = N y^{*\frac{r}{2}} |\varphi(\tau^*)| = N \tilde{y}^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tilde{\tau})| = N y_i^{\frac{r}{2}} |\varphi^{A_i^{-1}}(\tau_i)|,$$

woraus sich mit (123) und (124)

$$|\varphi^{A_j^{-1}}(\tau)| \leq M_j N y^{-\frac{r}{2}} N y_i^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{\pi}{4} m^{\frac{1}{n}} N y_i^{\frac{1}{n}}}$$

ergibt. Setzt man darin an Stelle von

$$z^{\frac{nr}{2}} e^{-\frac{\pi}{4} m^{\frac{1}{n}} z} \quad (z = N y_i^{\frac{1}{n}})$$

den maximalen Wert ein, der für  $z \geq 0$  an der Stelle  $z = \frac{2nr}{\pi} m^{-\frac{1}{n}}$  liegt, so erhält man

$$(125) \quad |\varphi^{A_j^{-1}}(\tau)| \leq M_j \left( \frac{2nr}{\pi} m^{-\frac{1}{n}} N y^{-\frac{1}{n}} \right)^{\frac{nr}{2}}$$

Diese Abschätzung gilt auch für  $r = 0$ , wenn man in diesem Fall  $r$  durch 1 ersetzt. Wir wählen speziell  $\tau = x + i \frac{1}{2} y_j^0$ , wobei  $y_j^0$  der Imaginärteil des oben ausgezeichneten Punktes  $\tau_j^0$ . Die Koeffizientenformel (117) liefert dann für  $\mu \subset m_j$

$$a_j(\mu + \kappa_j) e^{-2\pi i S(\mu + \kappa_j) y_j^0} \\ = \frac{1}{d_j} \int \dots \int_{\mathfrak{P}_j} \varphi_j^{-1}(\tau_j) e^{-2\pi i S(\mu + \kappa_j)x} dx^{(1)} \dots dx^{(n)} e^{-\pi i S(\mu + \kappa_j) y_j^0}$$

und führt über (125) zu

$$|\varphi_j^{-1}(\tau_j^0)| \leq M_j \left( \frac{4nr}{e\pi} m^{-\frac{1}{n}} N y_j^{0-\frac{1}{n}} \right)^{\frac{nr}{2}} \sum_{\substack{\mu \subset m_j, \mu + \kappa_j > 0 \\ N(\mu + \kappa_j) > m}} e^{-\pi i S(\mu + \kappa_j) y_j^0}.$$

Die letzte Summe ist oben durch  $g_3 e^{-\frac{\pi}{2} m^{\frac{1}{n}} N y_j^{0-\frac{1}{n}}}$  abgeschätzt worden. Beachtet man noch, daß in (123) für  $k = j$  und  $\tau_j = \tau_j^0$  das Gleichheitszeichen gilt, so ergibt sich schließlich die Ungleichung

$$M_j e^{\frac{\pi}{4} m^{\frac{1}{n}} N y_j^{0-\frac{1}{n}}} \leq M_j g_3 \left( \frac{4nr}{e\pi} m^{-\frac{1}{n}} N y_j^{0-\frac{1}{n}} \right)^{\frac{nr}{2}}.$$

und, wenn wir für  $N y_j^{0-\frac{1}{n}}$  nach (120) den kleinsten Wert  $g_3$  eintragen,

$$(126) \quad M_j e^{\frac{\pi}{4} g_3 m^{\frac{1}{n}}} \leq M_j g_3 \left( \frac{4nr}{e\pi g_3} m^{-\frac{1}{n}} \right)^{\frac{nr}{2}};$$

Auf  $M_j = 0$  kann geschlossen werden, wenn

$$e^{\frac{\pi}{4} g_3 m^{\frac{1}{n}}} > g_3, \quad \frac{4nr}{e\pi g_3} m^{-\frac{1}{n}} < 1$$

erfüllt ist. Dazu braucht man mit geeigneten  $g_1$  und  $g_2$  nur

$$m > \text{Max } (g_1 r^n, g_2)$$

zu fordern. Wir stellen damit fest:

**Satz 4.**  $\varphi(\tau)$  sei eine ganze Modulform  $\subset \{G, -r, v\}$  mit  $r \geq 0$  und  $|v| = 1$ . In den zugeordneten Entwicklungen

$$\varphi_k^{-1}(\tau) = \sum_{\substack{\mu + \kappa_k \geq 0 \\ \mu \subset m_k}} a_k(\mu + \kappa_k) e^{2\pi i S(\mu + \kappa_k)\tau}$$

sei

$$(127) \quad a_k(\mu + \kappa_k) = 0 \quad \text{für } \mu \subset m_k, N(\mu + \kappa_k) \leq m \quad (k = 1, \dots, h),$$

dann verschwindet  $\varphi(\tau)$  identisch, sobald

$$(128) \quad m > \text{Max}(g_1 r^m, g_2).$$

Da zwischen den Koeffizienten  $a_k(\mu + \kappa_k)$  mit assoziiertem Argument die Beziehung (44) besteht und es nur endlich viele nichtassozierte  $\mu + \kappa_k$  mit  $\mu \in m_k$ ,  $\mu + \kappa_k \geq 0$  und  $N(\mu + \kappa_k) \leq m$  gibt, wie unten näher ausgeführt wird, so kann auf Grund von Satz 4 jede Identität von automorphen Formen durch Ausrechnen von endlich vielen Zahlkoeffizienten in den Entwicklungen zu den parabolischen Spitzen verifiziert werden. Es folgt jetzt eine Untersuchung über die algebraischen Relationen, die zwischen ganzen automorphen Formen ganz rationaler Dimension mit dem Multiplikator-system 1 bestehen. Wenn  $\varphi(\tau)$  eine ganze Form aus  $\{G, -r, v\}$ , dann nennen wir  $r$  das Gewicht von  $\varphi(\tau)$ . Es seien  $k$  ganze Formen  $\varphi_j(\tau) \in \{G, -r_j, 1\}$  von ganz rationalem Gewicht  $r_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) gegeben; dann heißt

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) = \sum a_{l_1 l_2 \dots l_k} \varphi_1^{l_1} \varphi_2^{l_2} \dots \varphi_k^{l_k},$$

wo über alle ganz rationalen  $l_j \geq 0$  mit  $\sum_{j=1}^k l_j r_j = r$  summiert wird, ein iso-

bares Polynom in  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  vom Gewicht  $r$ , und wenn

$$f(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_k(\tau)) \equiv 0,$$

ohne daß alle Zahlkoeffizienten  $a_{l_1 \dots l_k}$  verschwinden, so sagt man, zwischen den  $k$  Formen  $\varphi_j(\tau)$  besteht eine isobare algebraische Gleichung vom Gewicht  $r$ . Wir zeigen die Existenz einer solchen Gleichung für irgendwelche in der Anzahl

$$(129) \quad k = n + 2$$

vorgegebenen ganzen Formen  $\varphi_j(\tau)$  von ganzzahligem positiven Gewicht  $r_j$ . Dazu setzen wir

$$R = \prod_{j=1}^k r_j, \quad q = t^{k-1} R^{k-2}$$

und bemerken, daß es bei beliebigem natürlichen  $t$  nach S., S. 639 mindestens

$q + 1$  verschiedene Potenzprodukte  $\varphi_1^{l_1} \varphi_2^{l_2} \dots \varphi_k^{l_k}$  vom Gewicht  $\sum_{j=1}^k l_j r_j = (2k - 2)tR$  mit  $l_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) gibt.  $q + 1$  verschiedene dieser Potenzprodukte werden in irgendeiner Reihenfolge mit  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_q$  bezeichnet. Die Koeffizienten der Linearform

$$\Phi = \varrho_0 \Phi_0 + \varrho_1 \Phi_1 + \dots + \varrho_q \Phi_q$$

können dann nicht-trivial so bestimmt werden, daß  $q$  beliebige Koeffizienten in den  $h$  „Potenzreihenentwicklungen“ für  $\Phi^{j-1}(\tau)$  ( $j = 1, 2, \dots, h$ ) zur Spitze  $\infty$  zum Verschwinden gebracht werden; denn man braucht dazu

nur  $q$  lineare homogene Gleichungen mit  $q + 1$  Unbekannten zu lösen. Indem wir  $t$  hinreichend groß wählen, erfüllen wir die Voraussetzung dafür, daß Satz 4 auf  $\varphi = \Phi$  angewendet werden kann. Das Verschwinden von  $a_j(\mu + x_j)$  für  $\mu \in m_j$  hängt, wie wir sahen, nur von der Klasse  $\{\mu + x_j\}$  der zu  $\mu + x_j$  assoziierten Größen ab. In jeder solchen Klasse gibt es aber einen Repräsentanten, für welchen

$$g_0 N(\mu + x_j)^{\frac{1}{n}} \leq (\mu + x_j)^{(v)} \leq g_7 N(\mu + x_j)^{\frac{1}{n}} \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

so daß für die Anzahl  $K(m)$  der Klassen  $\{\mu + x_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots, h$ ) mit  $\mu + x_j \geq 0$ ,  $N(\mu + x_j) \leq m$  eine Abschätzung

$$K(m) \leq g_8 m$$

gilt. Wir fixieren  $m$  durch die Gleichung

$$(130) \quad q = g_8 m$$

und können dann  $e_0, e_1, \dots, e_q$  nicht sämtlich verschwindend so bestimmen, daß (127) für  $\Phi$  erfüllt ist. (130) besagt

$$t(2k-2)^{-n}((2k-2)tR)^n = g_8 m,$$

wobei  $(2k-2)tR$  das Gewicht von  $\Phi$ . Für  $(2k-2)t \geq g_9$  ( $=$  natürliche Zahl) ist daher auf Grund von Satz 4  $\Phi \equiv 0$ . Dieses Ergebnis formulieren wir in

**Satz 5.** Zwischen  $n + 2$  ganzen automorphen Formen  $\varphi_j(\tau) \in \{G, -r_j, 1\}$  von ganz rationalem Gewicht  $r_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n + 2$ ) besteht eine isobare algebraische Gleichung vom Gewicht  $g_9 r_1 r_2 \dots r_{n+2}$ .

Es ergibt sich jetzt leicht

**Satz 6.** Eine ganze automorphe Form  $\in \{G, 0, 1\}$  ist notwendig konstant.

Sei nämlich  $\varphi(\tau) \in \{G, 0, 1\}$ , dann liegt auch

$$\Phi = e_0 + e_1 \varphi + \dots + e_q \varphi^q$$

in der Klasse  $\{G, 0, 1\}$ . Für

$$q \geq g_8 m, \quad m > g_2$$

und ein geeignetes Zahlssystem  $e_0, \dots, e_q \neq 0, \dots, 0$  ist nach Satz 4  $\Phi \equiv 0$ , d. h.  $\varphi$  konstant, q. e. d.

#### § 4.

##### Der Körper der automorphen Funktionen.

Eine automorphe Funktion  $f(\tau)$  zu  $G$  definieren wir als Quotient  $f = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$  ( $\varphi_2 \neq 0$ ) zweier ganzer Formen  $\varphi_1, \varphi_2 \in \{G, -r, v\}$  von beliebiger reeller Dimension  $-r < 0$  mit einem Multiplikatorsystem  $v$  vom Betrag 1.

Die automorphen Funktionen bilden offenbar einen Körper. Mit der Feststellung, daß es sich hierbei um einen algebraischen Funktionskörper handelt, kommen wir jetzt zum Kern der Theorie. Eine wesentliche Beschränkung in der nachfolgenden Untersuchung gestattet

**Satz 7.** Jede automorphe Funktion  $f(\tau)$  zu  $G$  läßt sich als Quotient  $f = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$  ( $\varphi_2 \neq 0$ ) zweier ganzer Formen  $\varphi_1, \varphi_2 \in \{G, -g, 1\}$  mit ganz rationalem  $g > 0$  darstellen.

Wenn nämlich  $f = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$  ( $\varphi_2 \neq 0$ ) und  $\varphi_1, \varphi_2 \in \{G, -r, v\}$ , dann ist  $v^{-1}$  ein Multiplikatorssystem zur Dimension  $-g_1 + r$ , wobei  $g_1$  ganz rational, und es gibt für  $g_1 - r > 2$  nach Satz 2 eine natürliche Zahl  $m$  derart, daß  $\{G, -(g_1 - r)m, v^{-m}\}$  eine nicht identisch verschwindende ganze Form  $\varphi$  enthält. Dann ist

$$f = \frac{\varphi_1 \varphi_2^{m-1} \varphi}{\varphi_2^m \varphi}, \quad \varphi_1 \varphi_2^{m-1} \varphi, \varphi_2^m \varphi \in \{G, -g_1 m, 1\},$$

q. e. d.

Unter den automorphen Funktionen von  $G$  kann es höchstens  $n$  algebraisch unabhängige geben; denn für  $n+1$  willkürlich vorgegebene automorphe Funktionen  $f_j = \frac{\varphi_j}{\varphi_{n+2}}$  ( $\varphi_{n+2} \neq 0, j = 1, 2, \dots, n+1$ ), die immer mit gemeinsamer Nennerform  $\varphi_{n+2} \in \{G, -g, 1\}$  mit ganz rationalem  $g$  dargestellt werden können, entspringt aus der isobaren algebraischen Gleichung, die auf Grund von Satz 5 für die ganzen Formen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+2}$  besteht, eine algebraische Gleichung für die Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ . Es handelt sich darum, jetzt wirklich  $n$  algebraisch unabhängige automorphe Funktionen nachzuweisen. Dazu dienen die folgenden Überlegungen. Mit  $\mathfrak{S}_0$  bezeichnen wir ein volles System von Matrizen aus  $G$ , deren zweite Zeilen nicht assoziiert im weiteren Sinne sind, d. h. für zwei Matrizen  $M_1, M_2 \in \mathfrak{S}_0$  soll nicht gelten

$$\underline{M}_2 = \lambda \underline{M}_1.$$

Die zusätzliche Einschränkung  $\lambda > 0$ , die wir oben bei der Definition von  $\mathfrak{S}(E, G)$  gemacht haben, wird hier fallen gelassen. Offenbar ist

$$\mathfrak{S}(E, G) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^1 E_1^{i_1} E_2^{i_2} \dots E_n^{i_n} \mathfrak{S}_0$$

und daher für eine gerade natürliche Zahl  $g > 2$

$$(131) \quad G_{-g}(\tau; 1; E, G; 0) = 2^n \sum_{L \in \mathfrak{S}_0} \frac{1}{N(\gamma \tau + \delta)^g},$$

wobei  $L = (\gamma, \delta)$ . Wir wählen für gerades natürliches  $g > 2$  eine nicht identisch verschwindende ganze Form  $\varphi_{-g}(\tau) \in \{G, -g, 1\}$ , z. B. die eben

notierte Eisensteinreihe  $G_{-\rho}$ , und machen wie beim Beweis von Satz 2 einen Ansatz

$$(132) \quad F(z) = \sum_{L \in \mathfrak{S}_0} (z - \varphi_{-\rho}(\tau)) N(\gamma\tau + \delta)^{\rho-1}.$$

In der Potenzreihenentwicklung der nicht identisch verschwindenden Funktion

$$(133) \quad -F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) z^{m-1}$$

sind die Koeffizienten

$$f_m(\tau) = 2^{-n} (\varphi_{-\rho}(\tau))^{-m} G_{-\rho, m}(\tau; 1; E, G; 0)$$

automorphe Funktionen zu  $G$ . Es wird gezeigt, daß es unter den Funktionen  $f_1, f_2, f_3, \dots$   $n$  algebraisch unabhängige gibt. Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, daß alle Funktionen  $f_m(\tau)$  von  $n-1$  speziellen, etwa

$$(134) \quad f_k(\tau) = \chi_j(\tau) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

algebraisch abhängen, und daraus einen Widerspruch herleiten. Nach Annahme gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $k$  ein Polynom  $\omega_k(z)$ , welches von  $z$  abhängt, Polynome in  $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$  als Koeffizienten und  $f_k$  als Nullstelle hat.  $\omega_k(z)$  soll über dem von  $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$  erzeugten Körper als irreduzibel vorausgesetzt werden; demnach ist die Diskriminante  $d_k$  von  $\omega_k(z)$  nicht identisch gleich Null.  $d_k$  ist ein Polynom in  $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ . Die Funktionsmatrix

$$(135) \quad \left( \frac{\partial \chi_{\mu}(\tau)}{\partial \tau^{(v)}} \right) \quad (\mu = 1, \dots, n-1; v = 1, \dots, r)$$

habe den Rang  $r$ ; mit  $\Delta$  bezeichnen wir eine  $r$ -reihige Unterdeterminante von (135), welche nicht identisch verschwindet. Bei den folgenden Überlegungen beachte man, daß die Funktionen  $\varphi_{-\rho}, f_k$  und damit auch  $\Delta, d_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) an jeder Stelle  $\tau$  von  $\mathfrak{L}$  als Quotienten von Potenzreihen in  $\tau$  dargestellt werden können. Mit  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$  bezeichnen wir offene  $n$  dimensionale Punktmengen in  $\mathfrak{L}$ . Zunächst bestimmen wir  $\mathfrak{B}_0$  derart, daß

1.  $\varphi_{-\rho}(\tau), \chi_1(\tau), \dots, \chi_{n-1}(\tau)$  regulär für  $\tau \in \mathfrak{B}_0$ ,
2.  $\varphi_{-\rho}(\tau), \Delta(\tau) \neq 0$  für  $\tau \in \mathfrak{B}_0$ ,
3.  $N|\gamma\tau + \delta| > 1$  für  $L \in \mathfrak{S}_0, L = (\gamma, \delta), \gamma \neq 0, \tau \in \mathfrak{B}_0$ .

Die dritte Forderung kann wegen  $N|\gamma\tau + \delta| \geq N|\gamma y|$  und der Beschränktheit von  $N|\gamma|^{-1}$  für  $\gamma \neq 0$  leicht erfüllt werden und besagt, daß für alle  $\tau \in \mathfrak{B}_0$  die Funktion  $F(z)$  nach (132) genau eine Polstelle vom kleinsten Betrag hat, nämlich  $z = \varphi_{-\rho}(\tau)$ . Für eine geeignete Anordnung

$$(136) \quad L_1, L_2, L_3, \dots \text{ ad inf.}$$

der Substitutionen  $L$  aus  $\mathfrak{S}_0$  mit  $\gamma \neq 0$  und eine entsprechende Gebiets-schachtelung

$$(137) \quad \mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \mathfrak{B}_3 \supset \dots \text{ ad inf.}$$

kann ferner mit  $\underline{L}_j = (\gamma_j, \delta_j)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) für alle natürlichen Zahlen  $k$  angenommen werden, daß

a)  $d_k(\tau)$  regulär und  $\neq 0$  für  $\tau \in \mathfrak{B}_k$ ,

b)  $N |\gamma_k \tau + \delta_k| < N |\gamma_l \tau + \delta_l|$  für  $l > k$ ,  $\tau \in \mathfrak{B}_l$ .

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach  $k$  und nehmen an, daß in der Anordnung von  $\mathfrak{S}_0$  der  $k$ -te Schritt vollzogen und ebenfalls der Abschnitt  $\mathfrak{B}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{B}_k$  schon geeignet bestimmt sei.  $L_{k+1}$  und  $\mathfrak{B}_{k+1}$  werden durch die folgende Betrachtung geliefert.  $d_{k+1}(\tau)$  ist als Polynom in  $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$  nach 1. in  $\mathfrak{B}_0$  regulär und sei auf der offenen  $n$  dimensionalen Teilmenge  $\mathfrak{B}'_{k+1} \subset \mathfrak{B}_k$  von 0 verschieden. Für jeden Punkt  $\tau \in \mathfrak{B}'_{k+1}$  und

$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}_0 - \sum_{j=1}^k L_j$ ,  $L \in \mathfrak{S}_k$  mit  $\underline{L} = (\gamma, \delta)$  betrachten wir

$$\text{Min}_{L \in \mathfrak{S}_k, \gamma \neq 0} N |\gamma \tau + \delta| = m_\tau$$

und bestimmen die Anzahl  $a_\tau$  der Substitutionen  $L \in \mathfrak{S}_k$ , für welche  $N |\gamma \tau + \delta| = m_\tau$ ,  $\gamma \neq 0$ . Da die Werte von  $a_\tau$  diskret liegen, so wird das Minimum von  $a_\tau$  in einem Punkt  $\tau_{k+1} \in \mathfrak{B}'_{k+1}$  angenommen. Die zugehörigen Substitutionen aus  $\mathfrak{S}_k$ , für welche also  $N |\gamma \tau + \delta| = m_{\tau_{k+1}}$ ,  $\gamma \neq 0$ , werden mit  $L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{k+a}$  ( $a = a_{\tau_{k+1}}$ ) bezeichnet. Da nur für endlich viele  $L \in \mathfrak{S}_0$  der Betrag von  $N (\gamma \tau + \delta)$  unterhalb einer vorgegebenen Schranke liegt, wie auch immer  $\tau \in \mathfrak{B}'_{k+1}$  gewählt sei, so müssen die Beziehungen

$$N |\gamma_{k+1} \tau + \delta_{k+1}| = \dots = N |\gamma_{k+a} \tau + \delta_{k+a}| < N |\gamma \tau + \delta|$$

mit  $\underline{L}_{k+j} = (\gamma_{k+j}, \delta_{k+j})$  ( $j = 1, \dots, a$ ),  $\underline{L} = (\gamma, \delta)$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $L \in \mathfrak{S}_0 - \sum_{j=1}^{k+a} L_j$ , die zunächst nur für  $\tau_{k+1}$  gelten, auf Grund der Extremaleigenschaft von  $a$  auch noch für eine volle Umgebung  $\mathfrak{B}_{k+1} \subset \mathfrak{B}'_{k+1}$  von  $\tau_{k+1}$  erfüllt sein. Man braucht nur noch  $a = 1$  zu zeigen. Für  $i = 1, 2, \dots, a$ ,  $\tau \in \mathfrak{B}_{k+1}$  ist

$$N \left( \frac{\gamma_{k+i} \tau + \delta_{k+i}}{\gamma_{k+1} \tau + \delta_{k+1}} \right)$$

eine analytische Funktion mit konstantem Betrag, infolgedessen gilt

$$(\gamma_{k+i} \tau + \delta_{k+i}) = \lambda_i (\gamma_{k+1} \tau + \delta_{k+1}) \text{ für } \tau \in \mathfrak{B}_{k+1} \quad (i = 1, \dots, a)$$

mit konstanten  $\lambda_i$ , d. h. die Substitutionen  $L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{k+a}$  haben im weiteren Sinne assoziierte zweite Zeilen. Nach Definition von  $\mathfrak{S}_0$  folgt also  $a = 1$ , q. e. d. Wir können, wie man leicht sieht, die Auswahl der Mengen  $\mathfrak{B}_k$  so vornehmen, daß ein Häufungspunkt  $\tau_0$  der Folge  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$

im Innern aller Punktmengen  $\mathfrak{B}_k$  enthalten ist. Die Koeffizienten aller Polynome  $\omega_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) sind nach 1. als Polynome in  $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$  in  $\mathfrak{B}_0$  regulär. Da ferner die Unterdeterminante  $\Delta(\tau)$  regulär und  $\neq 0$  für  $\tau \in \mathfrak{B}_0$  ist, so gibt es eine analytische Kurve  $\tau(t) \subset \mathfrak{B}_0$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) durch  $\tau_0 (= \tau(0))$ , für welche

$$\sum_{r=1}^n \left| \frac{d\tau^{(r)}(t)}{dt} \right| > 0 \quad (-1 < t < 1)$$

und

$$(138) \quad \chi_j(\tau(t)) = \chi_j(\tau_0) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

gilt. Hiernach ist  $d_k(\tau(t)) = d_k(\tau_0) \neq 0$ , mithin  $f_k(\tau)$  regulär längs  $\tau(t)$  und

$$f_k(\tau(t)) = f_k(\tau_0) \quad (-1 \leq t \leq 1; k = 1, 2, \dots).$$

$F(z)$  ändert sich also längs  $\tau(t)$  nicht, und die Lage der Polstellen, insbesondere derjenigen vom kleinsten Betrag bleibt erhalten. Aus (132) entnimmt man dann

$$(139) \quad \begin{aligned} \varphi_{-\vartheta}(\tau(t)) &= \varphi_{-\vartheta}(\tau_0), \\ N(\gamma\tau(t) + \delta)^{\vartheta} &= N(\tilde{\gamma}\tau_0 + \tilde{\delta})^{\vartheta} \end{aligned} \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

wobei  $L, \tilde{L} \subset \mathfrak{G}_0$  mit  $L = (\gamma, \delta)$ ,  $\tilde{L} = (\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ ,  $\gamma \neq 0$  und  $L \rightarrow \tilde{L}$  eine gewisse, noch von  $t$  abhängige Permutation der  $L \subset \mathfrak{G}_0$  mit  $\gamma \neq 0$ . Wir bestimmen eine Folge positiver Zahlen  $\varepsilon_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) derart, daß

$$\tau(t) \subset \mathfrak{B}_k \quad \text{für} \quad -\varepsilon_k \leq t \leq \varepsilon_k,$$

und bemerken, daß auf Grund von b)

$$\begin{aligned} N|\gamma_j\tau(t) + \delta_j| &< N|\gamma_{j+1}\tau(t) + \delta_{j+1}| \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \\ N|\gamma_k\tau(t) + \delta_k| &< N|\gamma_l\tau(t) + \delta_l| \quad (l > k) \end{aligned}$$

für  $|t| \leq \varepsilon_k$ . Diese Ungleichungen können zusammen mit (139) nur dann bestehen, wenn

$$\tilde{L}_j = L_j \quad \text{für} \quad j \leq k, \quad |t| \leq \varepsilon_k.$$

Da also

$$N(\gamma_j\tau(t) + \delta_j)^{\vartheta} = N(\gamma_j\tau_0 + \delta_j)^{\vartheta} \quad \text{für} \quad j \leq k, \quad |t| \leq \varepsilon_k,$$

so folgt

$$(140) \quad \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial \tau^{(r)}} N(\gamma_j\tau(t) + \delta_j) \frac{d\tau^{(r)}(t)}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad j \leq k, \quad |t| \leq \varepsilon_k.$$

Wählen wir  $k \geq n$  und  $n$  beliebige Werte für  $j$  im Intervall  $1 \leq j \leq k$  und beachten, daß nicht alle Ableitungen  $\frac{d\tau^{(r)}}{dt}$  für  $t=0$  verschwinden, so zieht (140) das Verschwinden der Gleichungsdeterminante

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau^{(r)}} N(\gamma_j\tau_0 + \delta_j) \right| = 0$$

nach sich, woraus also folgt, daß die Determinante

$$(141) \quad \left| \frac{1}{\tau_0^{(j)} + \frac{\delta_j^{(j)}}{\gamma_j^{(j)}}} \right| = 0$$

für  $n$  beliebige Werte von  $j$  aus der natürlichen Zahlenreihe.

Sei  $L \subset G$  mit  $\underline{L} = (\gamma, \delta)$ ,  $\gamma \neq 0$  vorgegeben, und  $j$  so bestimmt, daß  $\underline{L} = \lambda \underline{L}_j$ , dann ist  $-L^{-1} \infty = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\delta_j}{\gamma_j}$ . Ersetzt man  $L$  durch  $LU^\mu$ ,  $U^\mu \subset G$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ), so geht  $\frac{\delta}{\gamma}$  in  $\frac{\delta}{\gamma} + \alpha_\mu$  über und nach (141) muß

$$\left| \frac{1}{\tau_0^{(j)} + \frac{\delta_j^{(j)}}{\gamma_j^{(j)}} + \alpha_\mu^{(j)}} \right| = 0 \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

gelten. Das führt zu einem Widerspruch, wenn wir die Translationen  $\alpha_\mu$  so auswählen, daß  $|\alpha_\mu^{(n)}| < 1$  und  $|\alpha_\mu^{(j)}|$  für  $\nu \neq \mu$  hinreichend groß wird. Die Annahme, daß es unter den  $f_m(\tau)$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) höchstens  $n-1$  algebraisch unabhängige Funktionen gibt, ist also falsch. Speziell für  $\varphi_{-g}(\tau) = G_{-g}(\tau; 1; E, G; 0)$  erhalten wir das folgende Resultat.

**Satz 8.** *Unter den Funktionen*

$$G_{-g, m}(\tau; 1; E, G; 0) G_{-g}^{-m}(\tau; 1; E, G; 0) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

für eine feste natürliche gerade Zahl  $g > 2$  befinden sich  $n$  über dem Körper der komplexen Zahlen algebraisch unabhängige.

Wir verschaffen uns noch die Einsicht, daß die rationalen Funktionen von  $n+1$  geeigneten automorphen Funktionen zu  $G$  den Körper aller automorphen Funktionen vollständig ausschöpfen. Sei  $f(\tau)$  eine beliebige automorphe Funktion und  $f_1(\tau), \dots, f_n(\tau)$  ein festes System von algebraisch unabhängigen automorphen Funktionen. Es gibt dann Darstellungen durch Quotienten ganzer Formen:

$$f = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad f_j = \frac{\varphi_j}{\varphi_0} \quad (\varphi_1, \varphi_0 \neq 0), \quad \varphi_k \in \{G, -r, 1\}, \quad \varphi_l \in \{G, -r_0, 1\}$$

mit ganz rationalen  $r, r_0$ . Für die beiden Formensysteme  $\varphi_k, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  ( $k = 1, 2$ ) gibt es auf Grund von Satz 5 isobare algebraische Gleichungen

$$(142) \quad \Omega_k(\varphi_k; \varphi_0, \dots, \varphi_n) = 0 \quad (k = 1, 2),$$

die in  $\varphi_k$  einen Grad  $\leq g, r_0^{n+1}$  haben. In jeder dieser Gleichungen muß  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  wirklich vorkommen, da die Formen  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  isobar algebraisch unabhängig sind wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Funktionen  $f_1, \dots, f_n$ . Setzt man  $\varphi_2 = f \varphi_1$  und eliminiert aus den Gleichungen (142)

durch Resultantenbildung die Form  $\psi_1$ , so erhält man eine isobare algebraische Gleichung für  $f, q_0, \dots, q_n$  und damit eine algebraische Gleichung

$$\Omega(f; f_1, \dots, f_n) = 0,$$

die in  $f$  beschränkten Grad hat.

Wir bestimmen eine automorphe Funktion  $f_{n+1}$  von maximalem Grad über dem System  $f_1, \dots, f_n$ . Auf Grund des Satzes vom primitiven Element wird der Körper der automorphen Funktionen zu  $G$  von  $f_1, \dots, f_{n+1}$  rational erzeugt. Das Hauptergebnis dieses Paragraphen fassen wir zusammen in

**Satz 9.** *Im Körper  $K$  der automorphen Funktionen zu  $G$  gibt es  $n$  über dem Körper  $Z$  der komplexen Zahlen algebraisch unabhängige Funktionen  $f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_n(\tau)$ .  $K$  ist eine endliche Erweiterung von  $Z(f_1, f_2, \dots, f_n)$ .*

### § 5.

**Der Vollständigkeitssatz. Charakterisierung der Poincaréschen Reihen.**

Für die Substitutionsgruppe  $G$  seien bis zum Schluß die Voraussetzungen von § 3 erfüllt, d. h. es soll nur endlich viele paarweise inäquivalente parabolische Spitzen und einen Fundamentalbereich  $\mathfrak{F}$  für  $G$  von der Gestalt (113) geben. Die aus zwei beliebigen ganzen Formen  $f(\tau), \varphi(\tau) \in \{G, -r, v\}$  mit  $r > 0, |v| = 1$  gebildete Differentialform

$$(143) \quad f(\tau) \overline{\varphi(\tau)} N(y^{r-2} dx dy)^{11)}$$

wird durch eine beliebige reelle unimodulare Substitution  $\tau \rightarrow S\tau$  in

$$f^S(\tau) \overline{\varphi^S(\tau)} N(y^{r-2} dx dy)$$

übergeführt, bleibt also invariant gegenüber den Substitutionen  $L \subset G$ , wie eine einfache Rechnung zeigt. Wir nennen  $\varphi(\tau)$  eine Spitzenform, wenn in den Entwicklungen von  $\varphi(\tau)$  zu sämtlichen parabolischen Spitzen die konstanten Glieder verschwinden. Es sei  $f(\tau)$  oder  $\varphi(\tau)$  eine Spitzenform. Aus den Transformationsformeln

$$(144) \quad \int_{\mathfrak{F}} \dots \int f(\tau) \overline{\varphi(\tau)} N(y^{r-2} dx dy) = \int_{A_k \mathfrak{F}} \dots \int f^{A_k^{-1}}(\tau) \overline{\varphi^{A_k^{-1}}(\tau)} N(y^{r-2} dx dy)$$

( $k = 1, 2, \dots, h$ ) entnimmt man leicht die Konvergenz der mehrfachen Integrale, wenn man beachtet, daß eine Spitzenform bei Annäherung innerhalb des Fundamentalbereichs an die parabolische Spitze  $\infty$  exponentiell gegen 0 geht. Die Invarianzeigenschaft der Differentialform (143) hat zur Folge, daß die Integrale (144) von der Auswahl des Fundamentalbereichs  $\mathfrak{F}$  nicht abhängen. Das berechtigt uns, das Integral

$$(145) \quad (f, \varphi) = (f, \varphi)_0 = \int_{\mathfrak{F}} \dots \int f(\tau) \overline{\varphi(\tau)} N(y^{r-2} dx dy)$$

<sup>11)</sup>  $\bar{a}$  bedeutet die konjugiert komplexe Zahl zu  $a$ .

als das skalare Produkt von  $f$  und  $\varphi$  zu bezeichnen. Für eine Spitzenform  $\varphi(\tau)$  ist offenbar

$$(\varphi, \varphi) \geq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $\varphi$  identisch verschwindet. Ferner ist

$$(146) \quad (f, \varphi) = \overline{(\varphi, f)},$$

$$(147) \quad \left( \sum_{j=1}^m x_j f_j, \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j \right) = \sum_{j,k=1}^m x_j \bar{\xi}_k (f_j, \varphi_k),$$

wenn  $f_j, \varphi_j \in \{G, -r, v\}$ ,  $x_j, \xi_j$  beliebige komplexe Zahlen und  $\varphi_j$  sämtlich Spitzenformen ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), und schließlich nach (144)

$$(148) \quad (f, \varphi)_{\mathfrak{S}} = (f^{\mathfrak{S}}, \varphi^{\mathfrak{S}})_{\mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{S}}$$

für eine beliebige reelle unimodulare Substitution  $S$ . Eine Spitzenform  $\varphi$  heißt zu einer anderen Form  $f$  der gleichen linearen Schar  $\{G, -r, v\}$  orthogonal, wenn  $(f, \varphi) = 0$ . Wir berechnen das skalare Produkt einer beliebigen Form  $f$  und einer Poincaréschen Reihe. Nach (71) und (148) gilt für  $k = 1, 2, \dots, h$

$$(149) \quad \sigma^{(r)}(A_k, A_k^{-1}) v(A_k) (f(\tau), G_{-r}(\tau, v; A_k, G; \mu + \kappa_k))_{\mathfrak{S}} \\ = (f^{A_k^{-1}}(\tau), G_{-r}(\tau; v^{A_k^{-1}}; E, A_k G A_k^{-1}; \mu + \kappa_k))_{A_k \mathfrak{S} A_k^{-1}},$$

woraus hervorgeht, daß man sich auf den Spezialfall  $k = 1$ , d. h.  $A_k = E$  beschränken kann. In diesem Fall lassen sich die Poincaréschen Reihen für  $\mu + \kappa_1 > 0$  formal etwas einfacher als in der Gestalt (54) schreiben. Durchläuft nämlich  $L_0$  alle Substitutionen von  $\mathfrak{H}_K$  in (63) und  $L$  alle Substitutionen von  $\mathfrak{S}(E, G)$ , dann erhält man in der Gesamtheit aller  $L_0 L$  ein vollständiges System  $\mathfrak{S}_0$  von Substitutionen aus  $G$  mit paarweise verschiedenen zweiten Zeilen, und man erkennt auf Grund der Darstellungen (54), (63) und (66) sofort, daß

$$(150) \quad G_{-r}(\tau; v; E, G; \mu + \kappa_1) = \sum_{L \in \mathfrak{S}_0} \frac{e^{2\pi i S(\mu + \kappa_1) L \tau}}{v(L) N(\gamma \tau + \delta)^r},$$

falls  $L = (\gamma, \delta)$ ,  $\mu + \kappa_1 > 0$ . Für eine beliebige ganze Form

$$(151) \quad f(\tau) = \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{m}_1 \\ r + \kappa_1 \leq 0}} c(\nu + \kappa_1) e^{2\pi i S(\nu + \kappa_1) \tau}$$

aus  $\{G, -r, v\}$  und für  $\mu + \kappa_1 > 0$  nimmt die Berechnung des Skalarprodukts folgenden Verlauf.

$$\begin{aligned} (f(\tau), G_{-r}(\tau; v; E, G; \mu + \kappa_1)) \\ &= \sum_{L \in \mathfrak{S}_0} \int_{\mathfrak{H}} \dots \int_{\mathfrak{H}} f(\tau) v(L) \overline{N(\gamma \tau + \delta)^{-r}} e^{-2\pi i S(\mu + \kappa_1) L \tau} N(y\tau - 2 dx dy) \\ &= \sum_{L \in \mathfrak{S}_0} \int_{\mathfrak{H}} \dots \int_{\mathfrak{H}} f(\tau) e^{-2\pi i S(\mu + \kappa_1) \tau} N(y\tau - 2 dx dy) \\ &= \int_{\mathfrak{H}} \dots \int_{\mathfrak{H}} f(\tau) e^{-2\pi i S(\mu + \kappa_1) \tau} N(y\tau - 2 dx dy). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathfrak{B} = \sum_{L \in \mathfrak{E}} L \mathfrak{F}$  ein Fundamentalbereich für die Gruppe  $\Gamma$  der Translationen in  $G$ , und zwar ist jeder Punkt  $2^n$ -fach überdeckt, weil nach (16) je  $2^n$  Substitutionen von  $G$  mit paarweise verschiedenen zweiten Zeilen auf die Punkte  $\tau \in \mathfrak{T}$  die gleiche Wirkung haben. Da der Integrand des Integrals über  $\mathfrak{B}$  gegenüber den Substitutionen von  $\Gamma$  invariant ist, so kann  $\mathfrak{B}$  offenbar durch das  $2^n$ -fache des (einfachen) Fundamentalbereichs  $\mathfrak{B}$ , der durch das erste der Ungleichungssysteme (110) für  $k = 1$  beschrieben wird, ersetzt werden. Die Vertauschbarkeit von Summation und Integration in der oben ausgeführten Rechnung läßt sich mit der in § 2 ausgesprochenen und bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz der Poincaréschen Reihen rechtfertigen. Trägt man nun in

$$(f, G_{-r}) = 2^n \int_{\mathfrak{B}} \int f(\tau) e^{-2\pi i S(\mu + \kappa_1)\tau} N(y^{r-2} dx dy)$$

die Entwicklung (151) ein, so erhält man nach elementarer Gleichung

$$(152) \quad (f(\tau), G_{-r}(\tau; v; E, G; \mu + \kappa_1)) = 2^n N(\mu + \kappa_1)^{1-r} e_1^{(r)} c(\mu + \kappa_1)$$

mit

$$(153) \quad e_1^{(r)} = \Delta_1^{-1} \{(4\pi)^{1-r} \Gamma(r-1)\}^n.$$

Der Fall  $\mu + \kappa_1 = 0$  kann nur dann eintreten, wenn  $\kappa_1 \in m_1$ . Das sei jetzt angenommen. Die Eisensteinsche Reihe  $G_{-r}(\tau; v; E, G; 0)$  verschwindet genau dann nicht identisch, wenn es überhaupt eine nicht identisch verschwindende Form in  $\{G, -r, v\}$  gibt, in deren Entwicklung zur Spitze  $\infty$  ein von 0 verschiedenes konstantes Glied vorkommt. Gibt es nämlich eine solche Form  $f_1(\tau)$ , so folgt nach (44), angewandt auf  $\mu + \kappa_1 = 0$ ,

$$(154) \quad v(U^\beta D_i) = 1 \quad \text{für} \quad U^\beta D_i \subset G, \lambda > 0,$$

also nach (64)

$$(155) \quad G_{-r}(\tau; v; E, G; 0) = \sum_{L \in \mathfrak{E}(E, G)} \frac{1}{v(L) N(\gamma\tau + \delta)^r}.$$

Als Repräsentanten der Substitutionen mit  $\gamma = 0$  denken wir uns die  $2^n$  Potenzprodukte  $L$  der in (16) genannten Substitutionen  $E_1, E_2, \dots, E_n$  ausgewählt. Für diese gilt

$$f_1(\tau) = f_1(L\tau) = v(L) N(\gamma\tau + \delta)^r f_1(\tau),$$

wegen  $f_1(\tau) \neq 0$  also  $v(L) N(\gamma\tau + \delta)^r = 1$ . Das konstante Glied in der Entwicklung von  $G_{-r}$  zur Spitze  $\infty$  lautet daher  $2^n$ , ist also ebenfalls von 0 verschieden. Diese Aussage ist offenbar mit  $G_{-r} \neq 0$  gleichwertig. Unter der Voraussetzung (154) bilden wir das skalare Produkt von  $G_{-r}$  mit einer beliebigen ganzen Spitzenform  $f(\tau) \in \{G, -r, v\}$ , für welche eine Entwicklung von der Art (65) gilt:

$$f(\tau) = \sum_{\substack{\mu \in m_1^* \\ \mu > 0}} c(\mu) \sum_{L_0 \in \mathfrak{E}_E} e^{2\pi i S \mu L_0 \tau}.$$

Setzen wir  $\mathfrak{B}_0 = \sum_{L \in \mathfrak{S}(E, \mathfrak{G})} L \mathfrak{F}$  und beachten  $\mathfrak{B} = \sum_{L \in \mathfrak{B}_E} L_0 \mathfrak{B}_0$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (f(\tau), G_{-r}(\tau; v; E, G; 0)) &= \sum_{L \in \mathfrak{S}(E, \mathfrak{G})} \int_{\mathfrak{F}} \dots \int f(\tau) v(L) \overline{N(\gamma\tau + \delta)^{-r}} N(y^{r-2} dx dy) \\
 &= \sum_{L \in \mathfrak{S}(E, \mathfrak{G})} \int_{L \mathfrak{F}} \dots \int f(\tau) N(y^{r-2} dx dy) \\
 (156) \quad &= \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{m}_1^* \\ \mu > 0}} c(\mu) \sum_{L_0 \in \mathfrak{B}_E} \int_{\mathfrak{B}_0} \dots \int e^{2\pi i S \mu L_0 \tau} N(y^{r-2} dx dy) \\
 &= 2^n \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{m}_1^* \\ \mu > 0}} c(\mu) \int_{\mathfrak{B}} \dots \int e^{2\pi i S \mu \tau} N(y^{r-2} dx dy) = 0.
 \end{aligned}$$

Die entsprechenden Überlegungen gelten für alle parabolischen Spitzen, da eine beliebige immer nach  $\infty$  transformiert werden kann. Wir setzen

$$\begin{aligned}
 (157) \quad &g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu + \kappa_k) \\
 &= \begin{cases} 2^{-n} \sigma^{(r)}(A_k, A_k^{-1}) v(A_k) N(\mu + \kappa_k)^{r-1} G_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu + \kappa_k) & \text{für } \mu + \kappa_k > 0, \\ 2^{-n} \sigma^{(r)}(A_k, A_k^{-1}) v(A_k) G_{-r}(\tau; v; A_k, G; 0) & \text{für } \mu + \kappa_k = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

und erhalten zufolge der allgemeinen Transformationstheorie für eine beliebige Form  $f(\tau) \in \{G, -r, v\}$  mit den  $h$  Entwicklungen

$$(158) \quad f^{A_k^{-1}}(\tau) = \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{m}_k \\ \mu + \kappa_k \geq 0}} c_k(\mu + \kappa_k) e^{2\pi i S(\mu + \kappa_k)\tau}$$

nach (149) und (152) das Resultat

$$(159) \quad (f(\tau), g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu + \kappa_k)) = e_k^{(r)} c_k(\mu + \kappa_k)$$

mit

$$e_k^{(r)} = \Delta_k^{-1} \{(4\pi)^{1-r} \Gamma(r-1)\}^n.$$

Auf Grund von (156) bleibt (159) auch für  $\mu + \kappa_k = 0$  gültig, wenn man dann  $f(\tau)$  auf Spitzenformen beschränkt. Für die Koeffizienten der Formen

$$\begin{aligned}
 g_{-r}^{A_k^{-1}}(\tau; v; A_k, G; \mu + \kappa_k) &= g_{-r}(\tau; v^{A_k^{-1}}; E, A_k G A_k^{-1}; \mu + \kappa_k) \\
 &= \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{m}_k \\ \nu + \kappa_k \geq 0}} c_k(\nu + \kappa_k, \mu + \kappa_k) e^{2\pi i S(\nu + \kappa_k)\tau}
 \end{aligned}$$

bestehen wegen

$$(160) \quad (g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu + \kappa_k), g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \nu + \kappa_k)) = e_k^{(r)} c_k(\nu + \kappa_k, \mu + \kappa_k)$$

und (146) die Beziehungen

$$(161) \quad c_k(\nu + \kappa_k, \mu + \kappa_k) = c_k(\mu + \kappa_k, \nu + \kappa_k),$$

falls  $\nu + \kappa_k$  oder  $\mu + \kappa_k > 0$ , speziell für  $\mu = \nu$  auch

$$c_k(\mu + \kappa_k, \mu + \kappa_k) \geq 0.$$

Nach (160) verschwindet  $g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu + \kappa_k)$  genau dann identisch, wenn  $c_k(\mu + \kappa_k, \mu + \kappa_k) = 0$ . Wie wir schon sahen, ist das auch für die Eisensteinreihen  $g_{-r}(\tau; v; A_k, G; 0)$  richtig. Die Gleichung (159) ist die Quelle einer Reihe von wichtigen Erkenntnissen (vgl. I. c.<sup>2)</sup>), die wir zusammenstellen in

**Satz 10.** Die Poincarésche Reihe  $g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu + \kappa_k)$  ist durch die nachfolgenden Eigenschaften bis auf einen konstanten Faktor eindeutig charakterisiert:

1.  $\mu + \kappa_k > 0$ .  $g_{-r}$  ist eine Spitzenform, die auf allen denjenigen Spitzenformen, in deren Entwicklung zur parabolischen Spitze  $A_k^{-1} \propto$  der Koeffizient zum Exponenten  $\mu + \kappa_k$  verschwindet, senkrecht steht.

2.  $\mu + \kappa_k = 0$ . In den Entwicklungen von  $g_{-r}$  zu den sämtlichen parabolischen Spitzen  $A_l^{-1} \propto$ ,  $l \neq k$ , verschwinden die konstanten Glieder.  $g_{-r}$  steht auf allen Spitzenformen senkrecht.

Beim Beweis kann auf Grund von Satz 4 von der Tatsache Gebrauch gemacht werden, daß jede der linearen Scharen  $\{G, -r, v\}$  von endlich vielen Formen erzeugt wird. Wie wir schon sahen, läßt sich eine beliebige Form mit Hilfe der Eisensteinreihen ( $\mu + \kappa_k = 0$ ) stets auf eine Spitzenform reduzieren. Zur weiteren vollständigen Reduktion reichen die Poincaréschen Reihen  $g_{-r}(\tau; v; A_l, G; \mu + \kappa_l)$ ,  $\mu + \kappa_l > 0$  zu beliebigem aber festem  $l$  bereits aus. Wählen wir nämlich aus der von diesen Reihen erzeugten linearen Schar nach bekanntem Verfahren eine Basis von orthogonal normierten Formen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  aus, so ist eine beliebige Spitzenform  $\varphi$  aus  $\{G, -r, v\}$  durch die zugeordnete Linearform

$$\sum_{j=1}^m a_j \varphi_j \quad \text{mit} \quad (\varphi, \varphi_j) = a_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

zufolge (159) eindeutig bestimmt. Da diese Linearform bei diesem Prozeß sich selbst zugeordnet wird, ist sie mit  $\varphi$  identisch. Es gilt also der wichtige

**Satz 11.** Die nicht identisch verschwindenden Eisensteinreihen  $g_{-r}(\tau; v; A_k, G; 0)$  zu den parabolischen Spitzen  $A_k^{-1} \propto$  mit  $\kappa_k \subset m_k$  lassen sich durch endlich viele der Poincaréschen Reihen  $g_{-r}(\tau; v; A_l, G; \mu + \kappa_l)$ ,  $\mu + \kappa_l > 0$  mit beliebigem aber festem  $l$  aus der Reihe 1, 2, ...,  $h$  zu einer Basis der linearen Formenschar  $\{G, -r, v\}$  ergänzen.

Dieser sogenannte Vollständigkeitssatz wird ergänzt durch den Zusatz, daß die Maximalzahl der linear unabhängigen unter  $m$  vorgegebenen Poincaréschen Reihen

$$g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu_j + \kappa_k), \mu_j + \kappa_k > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

mit dem Rang der Matrix

$$(c_k(\mu_{\alpha} + \kappa_k, \mu_{\alpha} + \kappa_k))$$

übereinstimmt. Den sehr einfachen der Methode angemessenen hier wiedergegebenen Beweis für diese Aussage verdanke ich einer Mitteilung von

Herrn Petersson. Die beliebig ausgewählten Spitzenformen  $\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_a(\tau), \chi_1(\tau), \dots, \chi_b(\tau) \subset \{G, -r, v\}$  werden zu Formenvektoren

$$q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_a(\tau)\}, \quad r(\tau) = \{\chi_1(\tau), \dots, \chi_b(\tau)\}$$

zusammengefaßt. Sei  $\mathfrak{A}$  die von den  $\varphi_i$ ,  $\mathfrak{B}$  die von den  $\chi_k$  aufgespannte Schar,  $\mathfrak{D}$  der Durchschnitt von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  und schließlich  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{D}$  von der Dimension  $\alpha, \beta$  bzw.  $\delta$ . Für den Rang  $\varrho$  der Matrix  $(q, r) = ((\varphi_i, \chi_k))$  gilt dann

$$\delta \leq \varrho \leq \min(\alpha, \beta).$$

Zum Beweis beachte man, daß  $\varrho$  offenbar nur von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  abhängt. Ersetzt man nämlich z. B. das Erzeugendensystem  $\varphi_i$  von  $\mathfrak{A}$  durch ein anderes, so ändert sich die Maximalzahl der linear unabhängigen unter den Zeilenvektoren von  $(q, r)$  nicht. Da jede lineare Relation zwischen den  $\varphi_i$  bzw.  $\chi_k$  auch zwischen den entsprechenden Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von  $(q, r)$  besteht, so ergibt sich die angegebene obere Schranke für  $\varrho$ . Wählt man für  $\mathfrak{D}$  eine orthogonal normierte Basis und ergänzt diese zu einem Erzeugendensystem einerseits für  $\mathfrak{A}$  von der Gliederzahl  $a$ , andererseits für  $\mathfrak{B}$  von der Gliederzahl  $b$ , so folgt unmittelbar  $\delta \leq \varrho$ . Speziell für  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$  oder  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$  ist  $\delta = \min(\alpha, \beta)$ , also  $\delta = \varrho$ . Wir machen folgende Anwendung. Sei  $a = m$ ,  $q(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_m(\tau)\}$  eine Basis für die Spitzenformen aus  $\{G, -r, v\}$  und

$$q^{A_k^{-1}}(\tau) = \sum_{\substack{\mu \in m_k \\ \mu + \kappa_k > 0}} c_k(\mu + \kappa_k) e^{2\pi i S(\mu + \kappa_k)\tau}$$

in verständlicher Vektorbezeichnung die Entwicklung von  $q(\tau)$  zur Spitze  $A_k^{-1}\infty$ . Mit  $(c_k(\mu_1 + \kappa_k), c_k(\mu_2 + \kappa_k), \dots, c_k(\mu_b + \kappa_k))$  sei die konstante Matrix mit den Spaltenvektoren  $c_k(\mu_l + \kappa_k)$  ( $l = 1, 2, \dots, b$ ) bezeichnet, wobei  $\mu_l$  beliebig aus  $m_k$  derart ausgewählt ist, daß  $\mu_l + \kappa_k > 0$ . Ferner sei  $\chi_l(\tau) = g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu_l + \kappa_k)$  ( $l = 1, 2, \dots, b$ ). Dann ist

$$(q(\tau), r(\tau)) = e_k^{(r)}(c_k(\mu_1 + \kappa_k), c_k(\mu_2 + \kappa_k), \dots, c_k(\mu_b + \kappa_k)),$$

woraus hervorgeht, daß die Maximalzahl der linear unabhängigen unter den Vektoren  $c_k(\mu_l + \kappa_k)$  ( $l = 1, 2, \dots, b$ ) gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen unter den Poincaréschen Reihen  $g_{-r}(\tau; v; A_k, G; \mu_l + \kappa_k)$  ( $l = 1, 2, \dots, b$ ). Wählt man schließlich für  $q(\tau)$  und  $r(\tau)$  das gleiche System von Poincaréschen Reihen, so erhält man die oben formulierte spezielle Aussage.

Die von Petersson (l. c. <sup>5)</sup>) eingeführte Klasse der Formen  $\Omega, (\tau, z)$  kann ebenfalls auf  $n$  Veränderliche verallgemeinert, aber in ihrer Bedeutung für die gesamte Theorie noch nicht restlos verstanden werden. Das mag vor allem daran liegen, daß man in  $n$  Veränderlichen das richtige Analogon zum Riemann-Rochschen Satz für eine Veränderliche noch nicht gefunden hat.

(Eingegangen am 29. 3. 1940.)

# Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen im Schnittpunkt dreier Singularitäten.

Fortsetzung der Arbeit in Bd. 115.

Von

J. Horn in Darmstadt.

Zu der unter gleichem Titel in 115 (1938), S. 435–455 erschienenen Arbeit<sup>1)</sup>, und zwar zum Abschnitt I, werden hier Zusätze und Berichtigungen gegeben.

1. Das in Fig. 1 (C., S. 438) dargestellte Konvergenzgebiet, nämlich der nicht schraffierte Teil des Quadrats  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$ , möge ausführlicher hergeleitet werden.

Die zu einem reellen  $\varphi$  gehörigen reellen  $t \geq 0$  liegen unterhalb der kleinsten der Größen

$$\left| \frac{1}{\cos \varphi} \right|, \quad \left| \frac{1}{\sin \varphi} \right|, \quad \left| \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \right|.$$

Diese drei Größen bleiben ungeändert, wenn man  $\varphi$  durch  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  oder durch  $\pi + \varphi$  oder durch  $\frac{3\pi}{2} - \varphi$  ersetzt. Die Geraden  $x - y = 0$  und  $x + y = 0$  sind daher Symmetrieachsen des gesuchten Konvergenzgebietes. Wir brauchen also nur das Teilgebiet aufzusuchen, welches dem Sektor  $\frac{\pi}{4} \geq \varphi \geq -\frac{\pi}{4}$  angehört.

Für  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  ist  $\cos \varphi \geq \sin \varphi$ ,

$$\frac{1}{\cos \varphi} \leq \frac{1}{\sin \varphi} < \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi},$$

mithin

$$t < \frac{1}{\cos \varphi}, \quad t \cos \varphi < 1,$$

also

$$x < 1.$$

<sup>1)</sup> Diese Arbeit wird hier mit C. zitiert.

Im Sektor  $0 \geq \varphi \geq -\frac{\pi}{4}$  ist  $\cos \varphi \geq \sin(-\varphi)$ ,

$$\frac{1}{\cos \varphi} \leq -\frac{1}{\sin \varphi}.$$

Je nachdem in diesem Sektor

$$\operatorname{tg}(-\varphi) \leq \frac{1}{2}$$

ist, hat man

$$\left| \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \right| = -\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} \geq \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Im Falle  $\operatorname{tg}(-\varphi) \geq \frac{1}{2}$  ist

$$t < \frac{1}{\cos \varphi}, \quad t \cos \varphi < 1,$$

also

$$x < 1.$$

Im Falle  $\operatorname{tg}(-\varphi) \geq \frac{1}{2}$  ist

$$t < -\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi}$$

oder nach Multiplikation mit  $t \cos \varphi \sin \varphi < 0$

$$t^2 \cos \varphi \sin \varphi + t \cos \varphi + t \sin \varphi > 0,$$

also

$$xy + x + y > 0.$$

Durch Spiegelung an den Winkelhalbierenden erhält man das gesamte Konvergenzgebiet

$$|x| < 1, \quad |y| < 1,$$

$$xy + x + y > 0, \quad xy - x - y > 0.$$

Für das in Fig. 1 schraffierte Gebiet ist

$$xy + x + y < 0, \quad xy - x - y < 0.$$

2. Der Doppelwurzel  $\varrho = -\gamma^2$  der determinierenden Gleichung des Differentialgleichungssystems ( $D_1$ ) der Funktionen  $z, p, q, s$  von  $t$  (C., S. 437) entsprechen die Reihen

$$\bar{z} = t^{-\gamma} \bar{z}_0, \quad \bar{p} = t^{-\gamma} \bar{p}_0, \dots,$$

$$\bar{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_n t^n, \quad \bar{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n t^n, \dots,$$

deren Koeffizienten  $\bar{z}_n, \bar{p}_n, \dots$  nach C., S. 439 bestimmt werden;  $\bar{p}_0, \bar{q}_0$  sind zunächst unbestimmt;  $\bar{s}_n, \bar{p}_n, \bar{q}_n, \bar{z}_n$  sind ganze lineare homogene Funktionen von  $\bar{p}_0, \bar{q}_0$  und rationale Funktionen von  $a, b$ , die homogen vom  $n$ -ten

<sup>2)</sup> Ganzzahlige Werte von  $\gamma$  sind ausgeschlossen.

Grad sind; die Nenner dieser rationalen Funktionen sind Potenzen von  $a + b$ , und zwar hat  $\bar{s}_n$  den Nenner  $(a + b)^{n+1}$ ,  $\bar{p}_n$  und  $\bar{q}_n$  ( $n \geq 1$ ) den Nenner  $(a + b)^{n-1}$ . Es ist für  $n = 1, 2, \dots$

$$\bar{z}_n = \bar{p}_0 f_n(a, b) + \bar{q}_0 g_n(a, b);$$

die rationalen Funktionen  $f_n, g_n$ , die homogen vom  $n$ -ten Grad in  $a, b$  sind, haben für  $n \geq 2$  den Nenner  $(a + b)^{n-2}$ .

Der einfachen Wurzel  $\varrho = -\gamma - 1$  der determinierenden Gleichung entsprechen die (logarithmenfreien) Reihen

$$\bar{z} = t^{-\gamma-1} \bar{z}_0, \quad \bar{p} = t^{-\gamma-1} \bar{p}_0, \dots,$$

$$\bar{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_n t^n, \quad \bar{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n t^n, \dots,$$

deren Koeffizienten  $\bar{z}_n, \bar{p}_n, \dots$  nach C., S. 441 bestimmt werden;  $\bar{s}_0$  ist zunächst unbestimmt;  $\bar{z}_n, \bar{p}_n, \bar{q}_n, \bar{s}_n$  sind mit  $\bar{s}_0$  multiplizierte rationale Funktionen von  $a, b$ , die in  $a, b$  homogen vom Grad  $n$  sind;  $\bar{s}_n$  hat den Nenner  $(a + b)^n$ ,  $\bar{p}_n$  und  $\bar{q}_n$  für  $n \geq 2$  den Nenner  $(a + b)^{n-2}$  und

$$\bar{z}_n = \bar{s}_0 h_n(a, b)$$

für  $n \geq 3$  den Nenner  $(a + b)^{n-3}$ .

Die in der Lösung

$$z = \bar{z} + \bar{z}', \quad p = \bar{p} + \bar{p}', \dots$$

enthaltenen unbestimmten Größen  $\bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{s}_0$  ergeben sich als Funktionen von  $\varphi$  aus den Differentialgleichungen  $(D_\varphi)$  der Funktionen  $z, p, q, s$  von  $\varphi$  (C., S. 437).

In den Reihen

$$z = t^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_n t^n + t^{-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}'_n t^n, \dots$$

fassen wir die Glieder mit gleichen Potenzen von  $t$  zusammen. Indem wir nur das jeweilige Anfangsglied anschreiben, haben wir

$$z = t^{-\gamma+1} \frac{a \bar{p}_0 + b \bar{q}_0}{1-\gamma} + \dots,$$

$$p = t^{-\gamma} \bar{p}_0 + \dots$$

$$q = t^{-\gamma} \bar{q}_0 + \dots$$

$$s = t^{-\gamma-1} \bar{s}_0 + \dots$$

Wir setzen diese Reihen in die Differentialgleichungen  $(D_\varphi)$  ein und vergleichen in der zweiten und dritten Differentialgleichung die Koeffizienten

von  $t^{-\gamma}$ , in der vierten die Koeffizienten von  $t^{-\gamma-1}$ . Wir erhalten so für die Funktionen  $\bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{s}_0$  von  $\varphi$  die folgenden Differentialgleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \frac{d\bar{p}_0}{d\varphi} = \gamma b \bar{p}_0 + \bar{s}_0, \\ b \frac{d\bar{q}_0}{d\varphi} = -\gamma a \bar{q}_0 - \bar{s}_0, \\ (a+b) a b \frac{d\bar{s}_0}{d\varphi} = -\alpha' \beta' \bar{p}_0 + \alpha \beta \bar{q}_0 \\ \quad + [(\alpha + \beta - \gamma) a - (\alpha' + \beta' - \gamma) b - (\gamma + 1)(a - b) a b] \bar{s}_0. \end{array} \right.$$

Folgendes sei dazu bemerkt.

Die Differentialgleichungen ( $D_1$ ) haben ein Fundamentalsystem von vier Lösungen, welche den Wurzeln  $\varrho = 0, -\gamma, -\gamma, -\gamma - 1$  der determinierenden Gleichung entsprechen. Aus diesen Lösungen lassen sich vier linear unabhängige Verbindungen mit von  $\varphi$  abhängigen Koeffizienten bilden, welche auch den Differentialgleichungen ( $D_\varphi$ ) genügen. Wenn eine Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c'_n t'^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} c''_n t''^{n+\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} c'''_n t'''^{n+\gamma} + \dots = 0$$

gilt, gelten auch die Gleichungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c'_n t'^{n+\alpha} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c''_n t''^{n+\beta} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c'''_n t'''^{n+\gamma} = 0, \quad \dots,$$

vorausgesetzt, daß zwischen  $\varrho', \varrho'', \varrho''', \dots$  keine ganzzahlige Differenz besteht. Sind aber die Differenzen  $\varrho''' - \varrho'', \varrho'''' - \varrho''', \dots$  ganze Zahlen, während  $\varrho'' - \varrho'$  keine ganze Zahl ist, so kann man nur die Gültigkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t'^{n+\alpha} &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c''_n t''^{n+\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} c'''_n t'''^{n+\gamma} + \dots &= 0 \end{aligned}$$

behaupten.

Deshalb müssen die Gleichungen für  $p_0, q_0$  in C., S. 439–440, für  $s_0$  in C., S. 442 durch die obigen Differentialgleichungen für  $\bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{s}_0$  als Funktionen von  $\varphi$  ersetzt werden. Die in C., S. 440 und 442 als Lösungen des Differentialgleichungssystems von  $F_3$  angegebenen Ausdrücke müssen deshalb ersetzt werden durch eine Lösung, welche mit Benutzung der Differentialgleichungen für die Funktionen  $\bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{s}_0$  von  $\varphi$  gebildet ist.

Für

$$u = t^{-\gamma} \bar{p}_0, \quad v = t^{-\gamma} \bar{q}_0, \quad w = t^{-\gamma-1} \bar{s}_0$$

ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t} u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t} v, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\gamma+1}{t} w;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \gamma \frac{b}{a} u + \frac{1}{a} t w,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\gamma \frac{a}{b} v - \frac{1}{b} t w,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{-\alpha' \beta' u + \alpha \beta v}{(a+b) a b t} + \frac{(\alpha + \beta - \gamma) a - (\alpha' + \beta' - \gamma) b - (\gamma + 1) (a-b) a b}{(a+b) a b} w.$$

In

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi$$

ist

$$dt = a dx + b dy, \quad d\varphi = -\frac{b}{t} dx + \frac{a}{t} dy,$$

also

$$du = \left( a \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b}{t} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) dx + \left( b \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{t} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) dy$$

usw. Wir erhalten für die Funktionen  $u, v, w$  von  $x, y$  die Differentialgleichungen

$$du = -\frac{\gamma u + y w}{x} dx + w dy,$$

$$dv = w dx - \frac{\gamma v + x w}{y} dy,$$

$$dw = \frac{\alpha' \beta' u - \alpha \beta v - ((\alpha + \beta + 1) x - (\alpha' + \beta' - \gamma) y) w}{x(x+y)} dx \\ + \frac{-\alpha' \beta' u + \alpha \beta v + ((\alpha + \beta - \gamma) x - (\alpha' + \beta' + 1) y) w}{y(x+y)} dy.$$

Wir hatten (C., S. 439 und 441)

$$\bar{z}_n = \bar{p}_0 f_n(a, b) + \bar{q}_0 g_n(a, b),$$

$$\bar{z}_n = \bar{s}_0 h_n(a, b),$$

wo  $f_n, g_n, h_n$  homogene Funktionen  $n$ -ten Grades von  $a, b$  sind. Es ist demnach

$$\bar{z}_n t^n = \bar{p}_0 f_n(x, y) + \bar{q}_0 g_n(x, y),$$

$$\bar{z}_n t^n = \bar{s}_0 h_n(x, y).$$

Die Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihe  $F_3$  haben die Lösung

$$z = u \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y) = v \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, y) + w \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x, y).$$

Für  $p, q, s$  hat man entsprechende Ausdrücke.

3. Nachdem die Funktion  $F_3$  behandelt ist, ist eine direkte Behandlung der Appellschen Funktion  $F_2$  nicht mehr erforderlich, da sich die Funktionen  $F_2$  und  $F_3$  aufeinander zurückführen lassen<sup>2)</sup>.

Die Funktion

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(x, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(1, m)(1, n)(\gamma, m+n)} x^m y^n$$

genügt den Differentialgleichungen

$$x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \beta yq - \alpha \beta z = 0,$$

$$-xys + y(1-y)t - \beta' xp + [\gamma' - (\alpha + \beta' + 1)y]q - \alpha \beta' z = 0,$$

welche durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{1}{\eta}, \quad z = \xi^\sigma \eta^\sigma \zeta$$

übergehen in

$$\begin{aligned} \xi^2(\xi-1)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} - \xi \eta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} + [(2\sigma - \gamma + 2)\xi - 2\sigma - \alpha + \beta - 1]\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ + (\beta - \sigma)\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + [\sigma(\sigma - \gamma + 1)\xi - \sigma^2 - \sigma + (\alpha + \beta)\sigma + \beta\sigma - \alpha\beta]\zeta = 0 \end{aligned}$$

usw. Setzt man

$$\sigma = \beta, \quad \sigma = \beta',$$

so gelten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \xi(1-\xi)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} \\ + [\beta + \beta' - \alpha + 1 - (2\beta - \gamma + 2)\xi]\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \beta(\beta - \gamma + 1)\zeta = 0 \end{aligned}$$

usw., d. h. die Differentialgleichungen der Funktion

$$F_3(\beta, \beta', \beta - \gamma + 1, \beta' - \gamma' + 1, \beta + \beta' - \alpha + 1, \xi, \eta).$$

Demnach genügt die Funktion

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$$

denselben Differentialgleichungen wie die Funktion

$$x^{-\beta} y^{-\beta'} F_3\left(\beta, \beta', \beta - \gamma + 1, \beta' - \gamma' + 1, \beta + \beta' - \alpha + 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Das Differentialgleichungssystem der Funktion  $F_2$  hat die singulären Linien  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $x + y = 1$ ,  $x = \infty$ ,  $y = \infty$ . Durch den Punkt  $x = \infty$ ,  $y = \infty$ , durch den Punkt  $x = 0$ ,  $y = 1$  und durch den Punkt  $x = 1$ ,  $y = 0$  geht die weitere singuläre Linie  $x + y = 1$ . Das Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems von  $F_2$  bei der Annäherung an eine dieser drei singulären Stellen kann nach den Untersuchungen über  $F_3$  als bekannt gelten.

<sup>2)</sup> Appell-Kampé de Fériet, S. 43 u. 51.

Um die Lösungen des Differentialgleichungssystems von  $F_2$  in der Nähe von  $x = \infty$ ,  $y = \infty$  zu erhalten, setzen wir

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{1}{\eta}$$

und bestimmen die Lösungen des Differentialgleichungssystems von

$$F_3(\beta, \beta', \beta - \gamma + 1, \beta' - \gamma' + 1, \beta + \beta' - \alpha + 1, \xi, \eta)$$

in der Nähe von  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ . Wir erhalten Reihen, welche nach C., S. 438 in dem Quadrat

$$|\xi| < 1, \quad |\eta| < 1$$

mit Ausschluß des Gebietes

$$\xi\eta + \xi + \eta \leq 0, \quad \xi\eta - \xi - \eta \leq 0$$

konvergieren. In dem ausgeschlossenen Gebiet ist  $\xi\eta < 0$  (abgesehen von  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ), also

$$1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \geq 0, \quad 1 - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\eta} \geq 0.$$

Nach Wiedereinführung der Veränderlichen  $x, y$  haben wir das Gebiet

$$|x| > 1, \quad |y| > 1$$

mit Ausschluß des Gebietes

$$x + y + 1 \geq 0, \quad x + y - 1 \geq 0,$$

oder anders ausgedrückt, die  $xy$ -Ebene mit Ausschluß des Streifens zwischen den beiden parallelen Geraden  $x = -1$  und  $x = 1$ , des Streifens zwischen den beiden parallelen Geraden  $y = -1$  und  $y = 1$ , sowie des Streifens zwischen den beiden parallelen Geraden  $x + y = -1$  und  $x + y = 1$ .

In der Dissertation von L. Borngässer, S. 42–43, sind zwei in der Umgebung von  $x = 1$ ,  $y = 0$  gültige Reihen hergeleitet, welche den Differentialgleichungen von  $F_2$  genügen. Entsprechend wird die Umgebung von  $x = 0$ ,  $y = 1$  behandelt, und von  $F_2$  kann man wie oben gezeigt zu  $F_3$  übergehen. Wir gehen unmittelbar von den Differentialgleichungen von  $F_3$  (C., S. 436) aus, die durch die Substitution  $y = 1 + \eta$  die Form erhalten:

$$x(1-x)r + (1+\eta)s + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \alpha\beta z = 0,$$

$$xs - \eta(1+\eta)t + [\gamma - \alpha' - \beta' - 1 - (\alpha' + \beta' + 1)\eta]q - \alpha'\beta'z = 0.$$

Wir setzen die Reihe ein:

$$z = \sum C_{mn} x^{\sigma-m} \eta^{\sigma+n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Aus der zweiten Differentialgleichung ergibt sich durch Vergleichung der Koeffizienten von  $x^{\sigma-m} \eta^{\sigma+n}$  die Rekursionsformel

$$\frac{C_{m+1,n}}{C_{mn}} = - \frac{(\sigma+n+\alpha')(\sigma+n+\beta')}{(\sigma+n+1)(-\sigma+m+\sigma+n+\alpha'+\beta'-\gamma+1)}$$

und aus der ersten Differentialgleichung durch Vergleichung der Koeffizienten von  $x^{\varrho-m-1} \eta^{\sigma+n}$  die Rekursionsformel

$$(\varrho - m)(\varrho - m + \sigma + n + \gamma - 1) C_{m,n} + (\varrho - m)(\sigma + n + 1) C_{m,n+1} \\ = (\varrho - m + \alpha - 1)(\varrho - m + \beta - 1) C_{m+1,n}.$$

Setzt man den Wert von  $C_{m,n+1}$  aus der ersten Rekursionsformel ein, so erhält man

$$\frac{C_{m+1,n}}{C_{m,n}} = \frac{(-\varrho + m)(-\varrho + m + \alpha' - \gamma + 1)(-\varrho + m + \beta' - \gamma + 1)}{(-\varrho + m - \alpha + 1)(-\varrho + m - \beta + 1)(-\varrho + m + \sigma + n + \alpha' + \beta' - \gamma + 1)}.$$

Die Rekursionsformeln werden befriedigt durch

$$C_{m,n} = (-1)^n \frac{\left\{ \begin{matrix} (\sigma + \alpha', n)(\sigma + \beta', n) \\ (-\varrho, m)(-\varrho + \alpha' - \gamma + 1, m)(-\varrho + \beta' - \gamma + 1, m) \end{matrix} \right\}}{\left\{ \begin{matrix} (\sigma + 1, n)(\sigma - \varrho + \alpha' + \beta' - \gamma + 1, m + n) \\ (-\varrho - \alpha + 1, m)(-\varrho - \beta + 1, m) \end{matrix} \right\}}.$$

Wenn man in der ersten Differentialgleichung die Koeffizienten von  $x^{\varrho-m-1} \eta^{\sigma-1}$  und von  $x^{\varrho} \eta^{\sigma+n}$  vergleicht, erhält man die Bedingungen

$$\sigma(\varrho - m) C_{m,0} = 0,$$

$$(\varrho + \alpha)(\varrho + \beta) C_{0,n} = 0.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von  $x^{\varrho-m} \eta^{\sigma-1}$  in der zweiten Differentialgleichung erhält man die Bedingung

$$\sigma(-\varrho + m + \sigma + \alpha' + \beta' - \gamma) C_{m,0} = 0.$$

Die besonderen Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn  $\varrho = -\alpha$ ,  $\sigma = 0$  oder  $\varrho = -\beta$ ,  $\sigma = 0$  ist. Das Differentialgleichungssystem vom  $F_3$  wird demnach, wenn wie C., S. 442

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = 1 + \eta$$

gesetzt wird, befriedigt durch die hypergeometrische Reihe

$$z = \xi^{\alpha} \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha + \alpha' - \gamma + 1, m)(\alpha + \beta' - \gamma + 1, m)(\alpha', n)(\beta', n)}{(1, m)(\alpha - \beta + 1, m)(1, n)(\alpha + \alpha' + \beta' - \gamma + 1, m + n)} \xi^m (-\eta)^n$$

und durch die Reihe, welche aus dieser durch Vertauschung von  $\alpha$  und  $\beta$  hervorgeht. Die beiden Reihen sind für  $|\xi| < 1$ ,  $|\eta| < 1$  konvergent.

Der Ansatz

$$Z = {}^r 3, \quad P = {}^r \mathfrak{P}, \dots$$

C., S. 444f. braucht daher nicht durchgeführt zu werden.

Das Konvergenzgebiet der C., S. 446–448 aufgestellten Reihen ist das Quadrat  $|\xi| < 1$ ,  $|\eta| < 1$  unter Ausschluß des Gebietes

$$\xi\eta + \xi - \eta > 0, \quad \xi\eta - \xi + \eta > 0,$$

welches aus dem in Fig. 1 schraffierten Gebiet durch Spiegelung an einer Koordinatenachse hervorgeht.

(Eingegangen am 13. 1. 1940.)

# Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

Franz Rellich in Dresden.

Wenn eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist und die Koeffizienten der Differentialgleichung im Endlichen nirgends singular werden, dann sind auch alle Lösungen im Endlichen ohne Singularitäten; das hängt damit zusammen, daß alle Lösungen einer linearen Differentialgleichung sich aus endlich vielen Lösungen durch Linearkombination aufbauen.

Bei nichtlinearen Differentialgleichungen ist das anders. So ist die rechte Seite der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} = y^2$  (im Endlichen) nirgends singular, aber nur die Lösung  $y = 0$  ist eine ganze Funktion, alle anderen Lösungen sind von der Form  $y = \frac{1}{c - x^2}$  haben also im Endlichen eine Singularität. Für partielle Differentialgleichungen sei an die Gleichung der Minimalflächen  $(1 + z_x^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2)z_{yy} = 0$  erinnert. Nach S. Bernstein sind die einzigen ganzen Lösungen dieser Gleichung die Funktionen  $z = ax + by + c$ . Auch der Satz von Hilbert, wonach jede Fläche konstanter negativer Krümmung Singularitäten aufweist, kann hier aufgeführt werden.

Danach scheint es sinnvoll, nach Sätzen zu suchen, die für nichtlineare, singularitätenfreie Differentialgleichungen sicherstellen, daß ihre Lösungen „im allgemeinen“ Singularitäten aufweisen, und zu versuchen, die Gesamtheit der ganzen Lösungen anzugeben.

Im folgenden geschieht das für den einfachsten Fall, nämlich für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, in der wir die gesuchte Funktion als analytische Funktion der komplexen Veränderlichen  $x$  auffassen. Es wird bewiesen: In der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  sei  $f(x, y)$  eine für alle  $x, y$  konvergente Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten. Wenn es dann zwei

verschiedene Lösungen  $y = u(x)$  und  $y = v(x)$  gibt, die ganze Funktionen von  $x$  sind, dann ist jede ganze Lösung  $y = w(x)$  von der Form

$$w(x) = u(x) + (v(x) - u(x))c$$

mit geeigneter Konstanten  $c$ . Wenn  $f(x, y)$  in  $y$  nichtlinear ist, dann gibt es höchstens abzählbar viele Konstanten  $c_n$ , für die  $w(x) = u(x) + (v(x) - u(x))c_n$  Lösung ist und es können sich die Zahlen  $c_n$  nicht im Endlichen häufen.

Zum Beweis darf man annehmen, daß es drei verschiedene ganze Lösungen  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$  gibt. Dann ist  $v(x) - u(x)$  überall von Null verschieden (Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung). Desgleichen  $w(x) - v(x)$ . Also ist  $\frac{w(x) - u(x)}{v(x) - u(x)}$  eine ganze Funktion, die nirgends verschwindet. Sie läßt aber auch den Wert 1 aus, weil sonst  $w(x) = v(x)$  wäre. Nach Picard ist sie eine Konstante, also  $\frac{w(x) - u(x)}{v(x) - u(x)} = c$  oder  $w(x) = u(x) + (v(x) - u(x))c$ . Gibt es unendlich viele  $c_n$  für die  $u(x) + (v(x) - u(x))c_n$  Lösung ist, dann ist (bei festem  $x$ )

$$f(x, y) = u'(x) + \frac{v'(x) - u'(x)}{v(x) - u(x)}(y - u(x))$$

für die Zahlenfolge  $y = y_n = u(x) + (v(x) - u(x))c_n$ . Da  $v(x) - u(x) \neq 0$ , ist  $y_n$  eine Folge von Zahlen, die sich im Endlichen häuft, wenn die Folge  $c_n$  sich im Endlichen häuft. Also wäre in diesem Fall

$$f(x, y) = u'(x) + \frac{v'(x) - u'(x)}{v(x) - u(x)}(y - u(x))$$

für alle  $x, y$ , d. h. es wäre  $f(x, y)$  linear in  $y$ . Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Wegen  $v(x) - u(x) \neq 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u(x) + (v(x) - u(x))c_n\} = \infty$ , wenn es unendlich viele  $c_n$  gibt. Man kann also auch sagen: Eine Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , bei der  $f(x, y)$  in  $x, y$  ganz und in  $y$  nichtlinear ist, hat höchstens abzählbar viele ganze Lösungen  $y_1(x), y_2(x), \dots$ . Wenn sie unendlich viele ganze Lösungen besitzt, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \infty$  für jedes  $x$ .

Speziell ist bei der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} = f(y)$  mit ganzem, nichtlinearem  $f(y)$  jede ganze Lösung eine Konstante. Denn eine nicht konstante ganze Lösung  $y = u(x)$  würde zu den kontinuierlich vielen Lösungen  $u(x + c)$  führen.

Zu zwei ganzen Funktionen  $u(x), v(x)$ , für die überall  $v(x) - u(x) \neq 0$  ist, und zu vorgegebenen Konstanten  $c_1, c_2, \dots$ , die sich nicht im Endlichen häufen, gibt es immer eine Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  mit ganzem  $f(x, y)$ , deren ganze Lösungen genau aus den Funktionen  $u(x), v(x)$  und

$u(x) + (v(x) - u(x))c_n$  bestehen. Um das einzusehen, wähle man für  $g(z)$  eine ganze Funktion mit den Nullstellen  $0, 1; c_1, c_2, \dots$  und setze

$$f(x, y) = u'(x) + \frac{v'(x) - u'(x)}{v(x) - u(x)} (y - u(x)) + (v(x) - u(x)) \cdot g\left(\frac{y - u(x)}{v(x) - u(x)}\right).$$

Ist  $y = w(x)$  irgendeine ganze Lösung von  $y' = f(x, y)$ , so ist  $z = \frac{w(x) - u(x)}{v(x) - u(x)}$  eine ganze Funktion und Lösung der Differentialgleichung  $z' = g(z)$ . Also ist  $z = c = \text{const}$ ,  $g(c) = 0$  und  $w(x) = u(x) + (v(x) - u(x))c$ , wobei  $c$  einen der Werte  $0, 1; c_1, c_2, \dots$  haben muß, und umgekehrt ist jedes solche  $(x)$  Lösung von  $y' = f(x, y)$ . Das ist die Behauptung.

(Eingegangen am 26. 5. 1940.)

# Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom instabilen Typus. II.

Von

Eberhard Hopf in Leipzig.

## Einleitung.

$\mathfrak{F}$  sei eine zweidimensionale Riemannsche, d. h. mit positiv definitem Bogenelement  $ds$ ,

$$ds^2 = g_{ik}(u_1, u_2) du_i du_k,$$

versehene Mannigfaltigkeit, kurz Fläche genannt. Sie wird dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt, d. h. die  $g_{ik}$  und die Parametertransformationen sollen dieser Bedingung genügen.  $\mathfrak{F}$  sei *vollständig*.  $\Omega$  sei der Raum der gerichteten Linienelemente auf  $\mathfrak{F}$ . Unter der geodätischen Strömung in  $\Omega$  versteht man die in den Phasenraum  $\Omega$  verlegte Bewegung längs den Geodätischen von  $\mathfrak{F}$  mit der Geschwindigkeit  $ds/dt = 1$ . Das strömungs-invariante Volumelement in  $\Omega$  ist

$$dm = do d\theta,$$

wo  $d\theta$  das Winkel- und  $do$  das Flächenelement auf  $\mathfrak{F}$  bedeuten. Damit ist auch ein strömungsinvariantes Lebesguesches Maß  $m$  in  $\Omega$  definiert.

In seiner Abhandlung „Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung“<sup>1)</sup> hat der Verfasser den statistischen Gesamtverlauf der Geodätischen auf Flächen  $\mathfrak{F}$  mit folgender Eigenschaft untersucht: A). Die Krümmung  $K$  verläuft zwischen festen negativen Grenzen. B). Die Richtungsableitung  $dK/ds$  ist beschränkt.

Die Gesamtheit dieser Flächen  $\mathfrak{F}$  wurde in zwei fundamentale Klassen geteilt.  $\mathfrak{F}$  gehört zur *ersten Klasse*, wenn die Anfangsrichtungen derjenigen von einem festen Punkte von  $\mathfrak{F}$  ausgehenden geodätischen Halbstrahlen, welche auf  $\mathfrak{F}$  in unendlicher Entfernung enden, eine Menge vom Winkelmaß Null bilden. Die *zweite Klasse* ist die zur ersten komplementäre Klasse. Zur ersten Klasse gehören offenbar alle geschlossenen Flächen negativer Krümmung. Durch Anwendung des Poincaréschen Wiederkehrsatzes auf die geodätische Strömung wurde geschlossen, daß ihr allgemeiner alle  $\mathfrak{F}$  mit den Eigenschaften A und B und mit endlichem Flächeninhalte angehören.

<sup>1)</sup> Leipziger Berichte 91 (1939), S. 261–304. Im folgenden als Hopf I zitiert. In der Einleitung findet man auch eine von Nullmengen freie Formulierung von Satz 1.

Auf Grund eines neuen Gedankens, der Methode der asymptotischen Geodätischen, gelang u. a. der Beweis der beiden folgenden Hauptsätze.

Satz I. Ist  $\mathfrak{F}$  von der ersten Klasse, so ist die geodätische Strömung in  $\Omega$  ergodisch. Hat  $\mathfrak{F}$  endlichen Flächeninhalt, so bedeutet dies: Das Zeitmittel irgendeiner in  $\Omega$   $m$ -summierbaren Funktion ist längs jeder Stromlinie, abgesehen von gewissen Stromlinien, die in  $\Omega$  eine  $m$ -Nullmenge bilden, gleich dem Raummittel über  $\Omega$ . Oder: Die allgemeine Geodätische ist auf  $\mathfrak{F}$  nach Fläche und Richtung gleichverteilt. Im Falle unendlichen Flächeninhalts ist diese Aussage in naheliegender Weise zu modifizieren.

Satz II. Ist  $\mathfrak{F}$  von der zweiten Klasse, so ist die geodätische Strömung in  $\Omega$  dissipativ: Die Stromlinien enden im allgemeinen im Unendlichen von  $\Omega$ . Oder: Die allgemeine Geodätische endet auf  $\mathfrak{F}$  in unendlicher Entfernung.

Die Tragweite der Methode der asymptotischen Geodätischen reicht indessen über diese Anwendung auf Flächen negativer Krümmung weit hinaus. In Hopf I wurden bereits  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung untersucht. Aber auch auf viel allgemeinere Variationsprobleme mit einer unabhängigen Veränderlichen läßt sich die Methode anwenden. Dabei ist als Hilfsmittel die Finalersche Geometrie des Problems zu benutzen. Damit ist ein weites Feld von Differentialgleichungs-Problemen angedeutet, bei welchen es nunmehr möglich sein wird, den Gesamtverlauf der Lösungen im Sinne des ungenau messenden makroskopischen Beobachters zu bestimmen.

Die Probleme, auf welche die Methode anwendbar ist, haben eine gewisse Unstabilität der Lösungen miteinander gemein. Welche Rolle diese Unstabilität dabei spielt, wird in der vorliegenden Arbeit am Beispiel des geodätischen Problems für die folgenden Flächen  $\mathfrak{F}$  gezeigt. Man betrachte diejenige Lösung  $y(s)$  der längs irgendeines geodätischen Halbstrahls,  $s \geq 0$ , gebildeten Variationsgleichung

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K y = 0,$$

welche den Anfangsbedingungen  $y_0 = 0$ ,  $y'_0 = 1$  genügt. Wir verlangen dann von der Fläche:  $A'$ )  $K$  ist beschränkt. Die Geodätischen genügen gleichmäßig der Unstabilitätsbedingung  $y'/y \geq c > 0$  <sup>2)</sup>.  $B'$ )  $= B$ ).  $dK/ds$  ist beschränkt. Alle Flächen mit den Eigenschaften  $A$  und  $B$  erfüllen diese Bedingungen. Darüber hinaus (Flächen mit  $K \geq 0$ ) kann natürlich eine Bedingung, welche etwas über die ganze unendliche Geodätische voraussetzt,

<sup>2)</sup> Sie ist wesentlich enger als die von Morse und später von Hedlund zur Untersuchung des topologischen Verlaufs der Geodätischen eingeführten Unstabilitätsbedingungen. Vgl. M. Morse, Instability and transitivity. Journal de Mathém. 14 (1935), S. 49—71; G. A. Hedlund, Two-dimensional manifolds and transitivity. Annals

nur eine provisorische Bedeutung haben. Es ist wünschenswert und wohl auch möglich, sie durch Voraussetzungen finiter Natur zu ersetzen oder anzunähern. Über einen primitiven Schritt in dieser Richtung (§ 1) soll hier nicht hinausgegangen werden.

Im folgenden wird bewiesen: *Die Gesamtheit der obigen Flächen zerfällt in die beiden erwähnten Klassen. Die beiden Hauptsätze bleiben wörtlich bestehen.*

Einige Änderungen der Beweisdetails waren gegenüber Hopf I erforderlich. Aus diesem Grunde, und um anknüpfende Untersuchungen in den angedeuteten Richtungen zu erleichtern, ist der Beweisgang unter schärferer Hervorhebung der Hauptpunkte noch einmal vollständig dargestellt worden.

### § 1.

Eine direkte Bedingung dafür, daß  $\mathfrak{F}$  der Unstabilitätsbedingung genügt.

Auf  $\mathfrak{F}$  sollen endlich viele getrennte Bereiche  $B$  angebbar sein, welche alle Punkte mit  $K \geq 0$  enthalten. Es existiere eine endliche obere Schranke  $l$  für die Bogenlängen der in irgendeinem  $B$  enthaltenen geodätischen Segmente.  $L$  sei eine untere Schranke für die Längen der geodätischen Segmente außerhalb  $\Sigma B$  und mit beiden Endpunkten auf dem Rande von  $\Sigma B$ . Ferner sei  $K \leq m^2$  überhaupt und  $K \leq -\mu^2$  in  $\mathfrak{F} - \Sigma B$ ,  $\mu \neq 0$ . Bestehen dann die Ungleichungen

$$(1.1) \quad m l < \frac{\pi}{2}, \quad m \operatorname{tg} m l < \mu \operatorname{tg} \mu L,$$

so genügt  $\mathfrak{F}$  der Unstabilitätsbedingung  $A'$ .

Der Beweis beruht auf den Sturmschen Vergleichsätzen. Die logarithmische Ableitung  $u = y'/y$  ist eine Lösung der Riccatischen Gleichung

$$u' = -K - u^2,$$

$$u(+0) = +\infty.$$

of Math. 37 (1936), S. 534–542. Unsere Bedingung kann zweifellos gemildert werden. Z. B. ist die in ihr enthaltene Forderung  $y' > 0$  unwesentlich. Man kommt sicher auch mit folgender Bedingung aus. Es gibt zwei positive Konstante  $C$  und  $c$  derart, daß

$$\frac{y(s')}{y(s)} \geq C e^{c(s'-s)}, \quad s' > s > 0$$

gilt. Genauere Angaben darüber findet der Leser im Text. Im Zusatz bei der Korrektur wird der Beweis unter dieser Bedingung nachgeliefert. — Durch unsere Bedingung wird das Vorkommen von Geodätischen ausgeschlossen, längs welchen  $K \geq 0$  gilt. Liegen auf einer geschlossenen  $\mathfrak{F}$  mit  $K \leq 0$  die Punkte mit  $K = 0$  auf endlich vielen glatten Kurven, unter denen ganze Geodätische auftreten können, so gilt vermutlich noch Satz I. Der Beweis hat eine zusätzliche Schwierigkeit zu überwinden, indem die Hilfssätze 3. 3 und 3. 4 von § 3 etwas modifiziert werden müssen. Der Haupthilfssatz 3. 5 bleibt vermutlich richtig.

$s = s_0$  sei eine Stelle, wo die Geodätische  $\Sigma B$  verläßt,  $s = s_1$  die nächste Stelle, wo sie wieder in  $\Sigma B$  eintritt, und schließlich  $s = s_2$  die darauf folgende Stelle des Wiederverlassens. Dann gelten die Ungleichungen

$$(1.2) \quad -K \geq \mu^2, \quad s_0 \leq s \leq s_1; \quad -K \geq -m^2; \quad s_1 - s_0 \geq L, \quad s_2 - s_1 \leq l.$$

Es sei nun  $v(s)$  die bei  $s = s_1$  stetige Lösung der Hilfs Gleichung

$$(1.3) \quad v' = \mu^2 - v^2, \quad s_0 \leq s \leq s_1; \quad v' = -m^2 - v^2, \quad s_1 \leq s \leq s_2,$$

mit der Anfangsbedingung  $v(s_0) = 0$ . Dann gilt wegen (1, 2) und nach Sturm im ganzen Intervall  $(s, s_2)$  die Ungleichung  $u \geq v$ , sobald sie im Anfangspunkt desselben erfüllt ist. Rechnet man  $v$  aus, so ergibt sich folgendes. Infolge der ersten der Ungleichungen (1. 1) bleibt  $v$  im Intervall  $(s_1, s_2)$  stetig. Man findet

$$v(s_2) \geq \frac{\mu \operatorname{tg} \mu L - m \operatorname{tg} m l}{1 + \frac{\mu}{m} \operatorname{tg} \mu L \cdot \operatorname{tg} m l}.$$

Infolge der zweiten Ungleichung (1, 1) hat also  $v(s_2)$  auf der ganzen Fläche eine positive untere Schranke. Bildet man schließlich diejenige Lösung  $w(s)$  von (1, 3), für welche  $w(s_0)$  gleich dieser Schranke  $a$  ist, so gilt, wie leicht zu sehen,  $w(s) \geq a$ . Durch Betrachtung der aufeinanderfolgenden Austrittsstellen aus  $\Sigma B$ ,

$$s_0 \leq 0 < s_2 < s_4 < s_6 < \dots$$

ergibt sich dann wegen  $u(0) = +\infty > w(0)$  sukzessiv  $u(s) > a$  für alle  $s \geq 0$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir erwähnen noch eine finite Bedingung, die auch hinreicht, aber schwächer als die obige ist. Bereiche  $B$  und Zahlen  $L$  und  $l$  seien wie oben zugrunde gelegt. Hat jede geodätische Strecke der Länge  $L + l$ , deren erstes Stück der Länge  $L$  in  $\mathfrak{F} - \Sigma B$  liegt, die Eigenschaft, daß die im Anfangspunkt verschwindende Lösung von  $u' = -K - u^2$  auf der ganzen Strecke positiv ist, so ist die Unstabilitätsbedingung  $A'$  erfüllt. Hierbei ist  $\mathfrak{F}$  geschlossen vorausgesetzt. Allgemein ist die Behauptung richtig, wenn etwas mehr als bloße Positivität verlangt wird.

Damit die Bedingung  $L > 0$  überhaupt erfüllbar ist, muß jeder Bereich extremalkonvex sein. Dies ist der Fall, wenn  $B$  einfach zusammenhängend und von einer Linie positiver geodätischer Krümmung (bei Durchlaufung in einem bestimmten, in  $B$  festgesetzten Drehsinn) begrenzt ist. Haben alle  $B$  diese Eigenschaft, so ist die untere Grenze  $L$  die kleinste der folgenden Zahlen. Die erste ist die Kleinstentfernung verschiedener  $B$  voneinander. Jede der anderen ist die Minimallänge derjenigen Linien außerhalb  $\Sigma B$  und mit Endpunkten auf einem bestimmten  $B$ , welche bei festgehaltenen Endpunkten nicht auf  $\mathfrak{F} - \Sigma B$  einem Randbogen dieses  $B$  homotop sind. Dies ergibt sich aus folgender Tatsache:

$B$  sei ein von einer geschlossenen Kurve positiver geodätischer Krümmung (im obigen Sinne) begrenzter Bereich auf einer Fläche. Außerhalb  $B$  sei die Flächenkrümmung negativ. Dann kann ein geodätischer Bogen, welcher außerhalb  $B$  zwei Randpunkte von  $B$  verbindet, unter Festhaltung derselben nicht in einen Randbogen von  $B$  stetig deformiert werden.

Wäre dies falsch, so würde der Bogen zusammen mit jedem der beiden Randbögen von  $B$  auf der Fläche ein Gebiet beranden. Doppelpunkte auf dem ersten Bogen sind ausgeschlossen, sonst ergäbe die Anwendung der Formel von Gauß-Bonnet auf eine Schleife einen Widerspruch. Eines jener Gebiete liegt nun außerhalb  $B$ . Anwendung derselben Formel auf dieses Gebiet führt dann ebenfalls zum Widerspruch.

Der Sinn jeder Unstabilitätsbedingung der eingeführten Art ist, daß dem Vorkommen von  $K > 0$  auf  $\mathfrak{F}$  Beschränkungen auferlegt werden. Solche Beschränkungen sind aber notwendig, wenn die Hauptsätze auf  $\mathfrak{F}$  und auf allen durch hinreichend kleine und gleichmäßig glatte Deformation von  $\mathfrak{F}$  erhaltenen Flächen gelten sollen.

## § 2.

### Verlauf der Geodätischen auf der universellen Überlagerungsfläche.

$\mathfrak{F}$  ist vollständig und zweimal stetig differenzierbar. Daher gibt es zwischen irgend zwei Punkten unter allen denjenigen Verbindungswegen, welche einer vorgegebenen Verbindung homotop sind, stets einen kürzesten. Er ist geodätisch<sup>2)</sup>.

Wir bezeichnen mit  $\theta$  den Anfangswinkel der von einem festen Punkte  $p_0$  von  $\mathfrak{F}$  ausgehenden geodätischen Halbstrahlen,  $s \geq 0$ , und fassen  $r = s/(s+1)$  und  $\theta$  als Polarkoordinaten in der Kreisscheibe  $r < 1$  auf. Damit ergibt sich eine Ein-viele-Korrespondenz zwischen den (nach obigem allen) Punkten  $p$  von  $\mathfrak{F}$  und den Punkten von  $r < 1$ . Dabei variiert  $p(r, \theta)$  stetig. Infolge der Unstabilitätsbedingung  $A')$  ist stets  $y > 0$ ,  $s > 0$ , auf einem ganz beliebigen Halbstrahl, d. h. es gibt keine konjugierten Punkte auf  $\mathfrak{F}$ . Aus der letzteren Tatsache allein folgt nun die Unverzweigtheit jener Korrespondenz: Zu einem beliebigen Punkte in  $r < 1$  gibt es eine Umgebung, welche nicht zwei verschiedene Punkte mit demselben Spurpunkt auf  $\mathfrak{F}$  enthält (kongruente Punkte). Im entgegengesetzten Falle wäre nämlich, wie leicht zu sehen, der Grenzpunkt dieser Spurpunkte zu  $p_0$  konjugiert. Aus der Unverzweigtheit ergibt sich in geläufiger Weise folgendes. Einer stetigen Linie  $p(\lambda)$  in  $\mathfrak{F}$  entspricht, wenn man einen bestimmten Bildpunkt von  $p(\lambda_0)$

<sup>2)</sup> H. Hopf und W. Rinow, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. *Comm. Math. Helvet.* 3 (1931), S. 209. Statt der dort vorausgesetzten Analytizität genügt die obige Voraussetzung.

in  $r < 1$  vorgibt, genau eine stetige Linie durch denselben in  $r < 1$ . Zwei verschiedenen Wegen zwischen zwei Punkten auf  $\mathfrak{F}$  mögen in  $r < 1$  zwei Kurven mit gleichem Anfangspunkt entsprechen. Dann fallen ihre Endpunkte dann und nur dann zusammen, wenn die beiden Wege auf  $\mathfrak{F}$  einander homotop sind.

Die Kreisscheibe stellt hiernach eine Verwirklichung der universellen Überlagerungsfläche  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\mathfrak{F}$  dar. Wir denken uns durch die Korrespondenz die Metrik  $ds^2$  auf sie übertragen. In diesem Sinne sprechen wir von Längen, Winkeln, geodätischen Linien, infinitesimaler Parallelverschiebung usw. auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$ . Da konjugierte Punkte nicht existieren, und da  $\tilde{\mathfrak{F}}$  einfach zusammenhängend ist, bilden die von einem festen Punkte von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  ausgehenden Strahlen auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  außerhalb dieses Punktes ein Feld von Geodätischen. Zwei verschiedene Geodätische können sich auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  nur einmal schneiden. Zusammenfassend: *Zu irgend zwei Punkten von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  gibt es auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  eine und nur eine kürzeste Verbindung; sie ist geodätisch. Von zwei Punkten von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  gilt dasselbe, wenn man sich auf Wege einer Homotopieklasse beschränkt.* Da auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  ein geodätischer Bogen die kürzeste Verbindung seiner Endpunkte ist, folgt: *Auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  konvergiert jeder geodätische Strahl gegen die Grenze von  $\tilde{\mathfrak{F}}$ .*

Die Entfernung zweier Punkte auf  $\mathfrak{F}$  oder auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  wird im folgenden mit  $s(p_1, p_2)$  bezeichnet. Dabei wird in Zweifelsfällen stets angegeben, ob  $\mathfrak{F}$  oder  $\tilde{\mathfrak{F}}$  zugrunde gelegt ist. Offenbar ist  $s(p_1, p_2)$  auf  $\mathfrak{F}$  der Kleinstwert aller  $s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$  für irgend zwei Bildpunkte  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$ .

Wir bezeichnen mit  $\Omega$  ( $\tilde{\Omega}$ ) den Raum der gerichteten Linienelemente  $P$  auf  $\mathfrak{F}$  ( $\tilde{\mathfrak{F}}$ ). Die Korrespondenz zwischen  $\mathfrak{F}$  und  $\tilde{\mathfrak{F}}$  definiert eine analoge Korrespondenz zwischen  $\Omega$  und  $\tilde{\Omega}$ . Eine Metrik wird in  $\Omega$  und  $\tilde{\Omega}$  durch

$$(2.1) \quad d\sigma^2 = ds^2 + d\chi^2$$

eingeführt. Dabei bedeutet  $ds$  die Entfernung der Trägerpunkte und  $d\chi$  den Winkel, welchen die längs der geodätischen Verbindung  $ds$  unter festgehaltenem Winkel mit ihr verschobene erste Richtung im zweiten Punkte mit der zweiten Richtung bildet (Parallelverschiebung längs  $ds$ ). Damit ist ein regulärer Entfernungsbegriff  $\sigma(P_1, P_2)$  in  $\Omega$  und  $\tilde{\Omega}$  definiert. Auch von ihm gilt das über  $s$  Gesagte. Von irgend zwei Elementen  $P_1, P_2$  und ihren Trägerpunkten  $p_1, p_2$  gilt in  $\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\Omega}$  und auch in  $\mathfrak{F}, \Omega$

$$(2.2) \quad s(p_1, p_2) \leq \sigma(P_1, P_2) \leq s(p_1, p_2) + \pi.$$

Die zweite Ungleichung ergibt sich, indem man das erste Element längs der geodätischen Verbindung von  $p_1$  mit  $p_2$  parallel verschiebt und dann durch eine Drehung mit dem zweiten zur Deckung bringt. Dieser Weg von  $P_1$  nach  $P_2$  besteht aus zwei Stücken; auf dem ersten ist  $d\chi = 0$ , auf dem zweiten  $ds = 0$ . Schließlich sei noch folgendes über das Lebesguesche Volummaß  $m$ ,

das durch  $dm = d\phi d\theta$  in  $\Omega$  und  $\tilde{\Omega}$  definiert ist, bemerkt. Carathéodorysche  $m$ -Meßbarkeit einer Menge  $M$  in  $\Omega$  ist mit der  $m$ -Meßbarkeit der Menge  $\tilde{M}$  aller Bildpunkte aller Punkte von  $M$  in  $\tilde{\Omega}$  gleichbedeutend. Insbesondere können  $M$  und  $\tilde{M}$  immer nur gleichzeitig  $m$ -Nullmengen sein. Zum Beweis beachte man, daß die Gruppe der Decktransformationen von  $\tilde{\Omega}$  in sich, durch welche aus  $\tilde{\Omega}$  wieder  $\Omega$  entsteht, eigentlich diskontinuierlich ist. In  $\tilde{\Omega}$  läßt sich ein  $m$ -meßbarer Fundamentalbereich  $B$  angeben, der mit seinen abzählbar vielen Kopien  $\tilde{B}$  einfach überdeckt. Es gilt allgemein  $m(M) = m(BM')$ . Die Behauptung folgt, wenn man die Invarianz von  $m$  gegenüber der Gruppe beachtet.

## § 3.

### Asymptotische Geodätische. Formulierung der Hilfssätze. Klasseneinteilung.

Zwei geodätische Halbstrahlen  $\tilde{\gamma}$  heißen zueinander *asymptotisch*, wenn mit einer passenden Zahl  $a$  auf  $\tilde{\gamma}$

$$(3.1) \quad s(p_{t+a}, p'_t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

gilt; dabei bedeuten  $p_t$  bzw.  $p'_t$  den laufenden Punkt auf dem einen bzw. anderen Halbstrahl und  $t$  die Bogenlänge. Analoges definieren wir auf  $\tilde{\gamma}$  (mit dem Distanzbegriff auf  $\tilde{\gamma}$ ). Zwei Halbstrahlen in  $\tilde{\gamma}$  sind sicher in  $\tilde{\gamma}$  asymptotisch, wenn zwei geeignete Bildstrahlen in  $\tilde{\gamma}$  asymptotisch sind. Die Umkehrung hiervon wird im folgenden nicht gebraucht. Sind auf  $\tilde{\gamma}$  zwei Halbstrahlen zu einem dritten asymptotisch, so sind sie es offenbar zueinander.

Wir führen nun eine Reihe von Sätzen, die für den Beweis der Hauptsätze von großer Wichtigkeit sind, ohne Beweis an. Ihre Beweise werden der Übersichtlichkeit halber im letzten Teil der Arbeit dargestellt werden.

Zunächst: Die in der Strahlrichtung orientierten Linienelemente auf zwei asymptotischen Halbstrahlen haben die Eigenschaft

$$(3.2) \quad \sigma(p_{t+a}, p'_t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Dies gilt in  $\tilde{\Omega}$  und erst recht in  $\Omega$  bei entsprechend aufgefaßtem  $\sigma$ .

Auf  $\tilde{\gamma}$  gelten zwei fundamentale Sätze.

**Satz 3.1.** *Auf  $\tilde{\gamma}$  geht von einem beliebig gegebenen Punkt ein und nur ein Halbstrahl aus, der zu einem beliebig gegebenen Halbstrahl asymptotisch ist.*

Ein Halbstrahl auf  $\tilde{\gamma}$  heißt *positiv asymptotisch* zu einer gerichteten Geodätischen auf  $\tilde{\gamma}$ , wenn er es zu einem positiven Teilstrahl derselben ist. Zwei Strahlen (gerichtete Geodätische) auf  $\tilde{\gamma}$  sind zueinander *positiv* (*negativ*) *asymptotisch*, wenn positive (negative) Hälften derselben es sind.

Satz 3. 2. Zu zwei Halbstrahlen auf  $\mathfrak{F}$ , die nicht zueinander asymptotisch sind, gibt es einen und nur einen Strahl auf  $\mathfrak{F}$ , zu welchem der erste positiv und der zweite negativ asymptotisch ist.

Zufolge der Sätze 3. 1 und 3. 2 lassen sich auf  $\mathfrak{F}$  die gerichteten Geodätischen = Strahlen durch zwei Winkelkoordinaten  $\varphi_1, \varphi_2$  charakterisieren. Man lege auf  $\mathfrak{F}$  einen festen Punkt  $p_0$  und eine feste Richtung in demselben zugrunde.  $H_0$  sei der von  $p_0$  aus in dieser Richtung laufende Halbstrahl. Zu einem beliebigen Strahl  $S$  gehören dann zwei Winkel  $\varphi_1, \varphi_2$ ;  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ) ist der in  $p_0$  gebildete Winkel von  $H_0$  bis zu demjenigen, von  $p_0$  ausgehenden Halbstrahl, welcher zu  $S$  negativ (positiv) asymptotisch ist. Die Winkel charakterisieren die „unendlich fernen Punkte“ von  $S$ . Es ist stets  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Sonst wären zwei Hälften von  $S$  zueinander asymptotisch, was nach Satz 3. 1 (Eindeutigkeit) unmöglich ist. Umgekehrt bestimmen nach Satz 3. 2 zwei voneinander verschiedene Winkel  $\varphi_1, \varphi_2$  genau einen Strahl auf  $\mathfrak{F}$ . Aus dem Vorangehenden folgt: Zwei Strahlen in  $\mathfrak{F}$  sind dann und nur dann zueinander positiv asymptotisch, wenn sie dieselbe  $\varphi_2$ -Koordinate, negativ asymptotisch, wenn sie dieselbe  $\varphi_1$ -Koordinate besitzen.

Diejenigen Strahlen in  $\mathfrak{F}$ , welche den Halbstrahl  $H_0$  schneiden (sie schneiden ihn dann nur einmal), sind auch durch die Entfernung  $s$  des Schnittpunktes von  $p_0$  und den Schnittwinkel  $\alpha$  charakterisiert (Fig. 1). Die Parametertransformation

$$(\varphi_1, \varphi_2) \longleftrightarrow (s, \alpha)$$

ist eineindeutig und hat die folgende Eigenschaft.

Hilfssatz 3. 3. Die ersten partiellen Ableitungen von  $\varphi_1, \varphi_2$  nach  $s, \alpha$  sind stetig in  $s, \alpha$ . Die Funktionaldeterminante der Transformation ist für  $\alpha \neq 0, \pi$  von Null verschieden.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf den

Hilfssatz 3. 4. Ordnet man mittels asymptotischer Halbstrahlen die Richtungen in einem Punkte von  $\mathfrak{F}$  den Richtungen in einem anderen Punkte von  $\mathfrak{F}$  zu und sind  $\beta, \gamma$  ihre Winkel mit festen Richtungen in diesen Punkten, so ist  $d\gamma/d\beta$  vorhanden und stetig. Zusatz: Läßt man den zweiten Punkt auf einem festen Strahl durch den ersten variieren, so hängt die Ableitung auch stetig von  $\beta$  und der Bogenlänge  $s$  auf dem Strahl ab.  $\gamma$  wird dabei vom Strahl an gerechnet.

Man betrachte nun eine gegenüber der geodätischen Strömung in  $\Omega$  invariante Punktmenge in  $\Omega$ , m. a. W. eine Menge von Stromlinien in  $\Omega$ . Jeder dieser Stromlinien entsprechen viele Stromlinien in  $\tilde{\Omega}$ . Jede der letzteren ist wiederum durch ein Winkelpaar  $\varphi_1, \varphi_2$  charakterisiert.

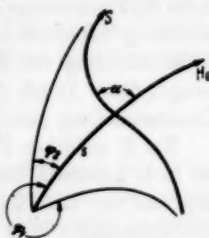


Fig. 1.

**Haupthilfssatz 3.5.** Eine strömungsinvariante Punktmenge in  $\Omega$  hat dann und nur dann das  $m$ -Maß Null, wenn die gesamte entsprechende Punktmenge auf dem  $(\varphi_1, \varphi_2)$ -Torus das Maß  $\iint d\varphi_1 d\varphi_2$  Null besitzt.

Die zwei Klassen von Flächen  $\mathfrak{F}$ . Wir sagen von einem Halbstrahl auf  $\mathfrak{F}$ , er ende auf  $\mathfrak{F}$  im Unendlichen oder in unendlicher Entfernung, wenn seine Punkte  $p$  der Grenzbeziehung  $s(p_0, p_t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ , genügen. Hat von zwei auf  $\mathfrak{F}$  zueinander asymptotischen Halbstrahlen einer diese Eigenschaft, so hat sie auch der andere, wie man sofort einsieht. Die Anfangsrichtungen derjenigen, von einem festen Punkte  $p_0$  von  $\mathfrak{F}$  ausgehenden Halbstrahlen, welche auf  $\mathfrak{F}$  im Unendlichen enden, bilden nun, wie leicht zu zeigen, eine im Sinne des gewöhnlichen Winkelmaßes meßbare Winkelmenge. Ist sie eine Nullmenge, so ist die in einem anderen Punkte  $p_1$  von  $\mathfrak{F}$  analog definierte Richtungsmenge ebenfalls eine Nullmenge. Dies folgt durch Richtungs- zuordnung vermittels asymptotischer Halbstrahlen aus dem Hilfssatz 3.4; da die Ableitung von Null verschieden sein muß, gehen Nullmengen in Nullmengen über. Durch diese Tatsache ist die in der Einleitung beschriebene Klasseneinteilung gerechtfertigt.

Hat  $\mathfrak{F}$  endlichen Flächeninhalt, so gehört  $\mathfrak{F}$  zur ersten Klasse. Wegen der in  $\Omega$  geltenden Ungleichung (2.2) endet nämlich ein Halbstrahl in  $\mathfrak{F}$  dann und nur dann im Unendlichen, wenn dasselbe bei der entsprechenden Stromlinienhälfte in  $\Omega$  der Fall ist. Nach dem Poincaréschen Wiederkehrrsatz bilden aber die Stromlinien, welche diese Eigenschaft haben, eine  $m$ -Nullmenge  $M$  von Punkten  $P$  in  $\Omega$ . Bezeichnet man mit  $\mu(p)$  das Winkelmaß der vom Punkte  $p$  von  $\mathfrak{F}$  ausgehenden und im Unendlichen endenden Halbstrahlen; so gilt nach Fubini

$$m(M) = \int_{\mathfrak{F}} \mu(p) d\sigma.$$

Daraus folgt die Behauptung, da entweder stets  $\mu = 0$  oder stets  $\mu > 0$  ist.

#### § 4.

##### Beweis der Hauptsätze.

**Beweis von Satz I.** Wir beschränken uns auf Flächen endlicher Oberfläche  $O(\mathfrak{F})$ . Dann ist auch  $m(\Omega) = 2\pi O(\mathfrak{F})$  endlich. Von der geodätischen Strömung  $\mathfrak{T}_t(P) = P_t$  gilt daher der Birkhoffsche Ergodensatz:

Ist die Funktion  $f(P)$  in  $\Omega$   $m$ -summierbar, so existieren, wenn man von einer  $m$ -Nullmenge in  $\Omega$  absieht, in jedem  $P$  die längs der Stromlinie konstanten Limites

$$f_2^*(P) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(P_t) dt, \quad f_1^*(P) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 f(P_t) dt.$$

Jedes der beiden Zeitmittel  $f^*(P)$  ist summierbar und genügt für jede beschränkte,  $m$ -meßbare und strömungsinvariante Funktion  $\varphi(P)$  der Gleichung

$$\int_{\Omega} f^* \varphi \, dm = \int_{\Omega} f \varphi \, dm.$$

Fast überall in  $\Omega$  ist

$$f_1^* = f_2^*.$$

Die Strömung heißt ergodisch, wenn  $f^*(P)$  für beliebiges  $f(P)$  fast überall konstant ist.  $f^*$  ist dann gleich dem  $m$ -Mittel von  $f$ . Für die Ergodizität ist die Konstanz von  $f^*$  für solche  $f$  hinreichend, welche im Sinne der Distanz

$$\int_{\Omega} |f - g| \, dm$$

im Raume aller obigen  $f$  dicht liegen.

Wir können voraussetzen, daß  $f(P)$  im Sinne der Distanz  $\sigma$  in  $\Omega$  gleichmäßig stetig ist. Liegen nun  $P$  und  $P'$  auf zwei zueinander positiv asymptotischen Stromlinien, so gilt bei passendem  $a$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(P_{t+a}) - f(P'_t)] = 0.$$

Also müssen die Zukunftsmittel  $f_2^*(P)$  und  $f_2^*(P')$  einander gleich sein, wenn eins von ihnen existiert. Analoges gilt von den Vergangenheitsmitteln, wenn die Linien negativ asymptotisch sind. Wegen  $f_1^* = f_2^*$  können sich die beiden Mengen

$$(4.1) \quad f_1^*(P) \geq z$$

und

$$(4.2) \quad f_2^*(P) \geq z$$

nur um  $m$ -Nullmengen unterscheiden. Die behauptete Konstanz folgt nun, wenn bei beliebigem  $z$  gezeigt wird, daß entweder die Menge (4.2) oder ihre Komplementärmenge eine  $m$ -Nullmenge sein muß. Dieser Nachweis gelingt aufs einfachste, wenn man die den Stromlinienmengen (4.1) und (4.2) entsprechenden Punktmengen auf dem Torus  $\Phi_1 \times \Phi_2$  betrachtet; mit  $\Phi_i$  sind die beiden  $\varphi_i$ -Kreislinsen bezeichnet. Nach Obigem hat die Menge (4.1) die Eigenschaft, mit einem Punkte  $(\varphi_1, \varphi_2)$  auch alle Punkte  $(\varphi_1, \varphi'_2)$  zu enthalten, also eine Produktmenge  $A_1 \times \Phi_2$  zu sein. Ebenso ist (4.2) von der Form  $\Phi_1 \times A_2$ . Nach dem Haupthilfssatz 3.5 können sich diese beiden Mengen von ihrem Durchschnitt  $A_1 \times A_2$  nur um Mengen vom Maß  $\iint d\varphi_1 d\varphi_2$  Null unterscheiden. In diesem Sinne sind also  $\bar{A}_1 \times A_2$  und  $A_1 \times \bar{A}_2$  Nullmengen,  $\bar{A}_i = \Phi_i - A_i$ . Ist nun (4.2) keine  $m$ -Nullmenge, so ist  $A_2$  keine Nullmenge auf  $\Phi_2$ . Daraus folgt, daß  $\bar{A}_1$  auf  $\Phi_1$  eine Nullmenge ist, und schließlich, daß  $\bar{A}_2$  auf  $\Phi_2$  das Maß Null hat. Nach dem Haupthilfssatz ist also die Komplementärmenge von (4.2) eine  $m$ -Nullmenge. Damit ist Satz I bewiesen.

Für gleichmäßig stetiges  $f(P)$  ergibt sich aus obigem eine etwas schärfere Fassung des Satzes. Ist  $p$  ein beliebiger Punkt auf der Fläche, so ist im Sinne des Winkelmaßes für fast alle  $P$  in  $p$  das Zeitmittel  $f^*$  von  $f$  gleich dem  $m$ -Mittel von  $f$ .

Die Formulierung des Satzes im Falle, daß  $\mathfrak{F}$  zur ersten Klasse gehört, aber unendliches  $O(\mathfrak{F})$  hat, findet der Leser in Hopf I.

**Beweis von Satz II.** Aus der Zugehörigkeit von  $\mathfrak{F}$  zur zweiten Klasse folgt, daß die für  $t \rightarrow +\infty$  im Unendlichen von  $\Omega$  endenden Stromlinien in  $\Omega$  eine Menge positiven  $m$ -Maßes bilden. Nach einem allgemeinen Satze über solche Stromlinien kann sich diese Menge von der Menge derjenigen Stromlinien, welche für  $t \rightarrow -\infty$  im Unendlichen enden, nur um  $m$ -Nullmengen unterscheiden. Läßt man nun die beiden Mengen an die Stelle der Mengen (4. 1) und (4. 2) im vorangehenden Beweis treten, so ist der Beweis wörtlich derselbe wie oben.

### § 5.

#### Beweis von Satz 3. 1.

Statt  $A'$  wird die schwächere Voraussetzung zugrunde gelegt, daß  $K$  beschränkt ist und daß die Lösung  $y(s)$ ,  $s \geq 0$ , von

$$(5.1) \quad -\frac{d^2 y}{ds^2} + K y = 0,$$

welche  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  erfüllt, für beliebige Halbstrahlen den Ungleichungen

$$(5.2) \quad \frac{y(s_2)}{y(s_1)} > C e^{c(s_2 - s_1)}, \quad s_2 > s_1 > 0,$$

mit festen  $C > 0$ ,  $c > 0$  genügt. Sie reicht für die Gültigkeit aller Sätze von § 3 aus; nur dem Beweis von Satz 3. 2 wurde  $A'$  zugrunde gelegt. Wahrscheinlich ist aber auch er unter der schwächeren Bedingung richtig.

Wir ziehen zunächst einige einfache Folgerungen. Durch Integration von (5. 1) über  $(0, s)$  folgt leicht

$$(5.3) \quad \left| \frac{y' - 1}{y} \right| < c_1$$

auf  $\mathfrak{F}$ . Zwei verschiedene Lösungen von (5. 1) schneiden sich höchstens einmal. Es gibt eine und nur eine Lösung  $z(s)$  von (5. 1), die den Randbedingungen  $z(0) = 1$ ,  $z(+\infty) = 0$  genügt. Man betrachte nämlich die eindeutig bestimmte Lösung  $z(s; A)$  mit  $z(0) = 1$ ,  $z(A) = 0$ . Wendet man (5. 2) auf den Halbstrahl an, der bei  $s = A$  beginnt und die umgekehrte Richtung hat, so folgt

$$(5.4) \quad 0 < z(s) \leq \frac{1}{C} e^{-cs}, \quad s \geq 0,$$

mit  $z = z(s; A)$ ,  $s < A$ . Diese Größe nimmt nun bei festem  $s$  mit  $A \rightarrow \infty$  monoton zu. Die Grenzfunktion existiert und erfüllt (5.4). Offenbar ist  $z(s)$  eindeutig bestimmt.  $z$  kann durch  $y$  ausgedrückt werden. Aus  $zy' - z'y = \text{const} = 1$  folgt

$$(5.5) \quad z(s; A) = y(s) \int_s^A \frac{dt}{y^2(t)}, \quad z(s) = z(s; \infty).$$

Weiter folgt  $z'(A; A) y(A) = -1$  und daher

$$(5.6) \quad z'(0; A) = -\frac{1}{y(A)} + \int_0^A z(s; A) K ds.$$

Nun hängt  $y$  stetig von  $s$  und dem Anfangselement des Halbstrahls ab. Also ist es auch bei  $z(s; A)$  der Fall. Aus leicht ersichtlichen Gleichmäßigkeitseigenschaften der Konvergenz für  $A \rightarrow \infty$  folgt Ähnliches für  $z(s)$  und

$$(5.7) \quad z'(0) = \int_0^\infty z(s) K ds.$$

Die von einem Punkte von  $\tilde{\gamma}$  ausgehenden Halbstrahlen bilden nun in  $\tilde{\gamma}$  ein Feld. In geodätischen Polarkoordinaten  $r$  = Entfernung vom Pol und  $\vartheta$  = Winkel mit fester Richtung im Pol lautet das Bogenelement

$$(5.8) \quad ds^2 = dr^2 + y^2(r, \vartheta) d\vartheta^2,$$

wo für  $\vartheta = \text{const}$  das  $y(r, \vartheta)$  die oben betrachtete Lösung von (5.1) mit  $r$  statt  $s$  ist. Die Kreise schneiden die Radien senkrecht.

$S$  sei ein Strahl, der die Radien schneidet. Der Schnittwinkel  $\alpha$  = Winkel zwischen der positiven Richtung von  $S$  und der negativen Richtung des Radius genügt dann längs  $S$  der Gleichung

$$(5.9) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y_r}{y} \sin \alpha.^4)$$

<sup>4)</sup> Für das Bogenelement  $ds^2 = du^2 + E dv^2$  ist nach Gauß längs einer Geodätischen  $G$

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}.$$

Vgl. etwa Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 155. Ist  $ds$  das Bogenelement längs  $G$ , so wird wegen  $\sqrt{E} dv = \sin \alpha ds$

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} \sin \alpha.$$

Diese Gleichung gilt für den Winkel  $\alpha$  zwischen  $ds$  und der Richtung wachsender  $u$  auf  $v = \text{const}$ . Daher das umgekehrte Vorzeichen in (5.9).

Beweis von Satz 3. 1. Wir erinnern an die am Anfang von § 3 gegebene Definition des Symbols  $p_i$ .  $H$  sei nun der gegebene Halbstrahl in  $\tilde{S}$  mit dem Anfangspunkt  $p$ ,  $p'$  der außerdem vorgegebene Punkt.  $H(T)$  sei der Strahl, welcher  $p'$  mit dem Punkte  $p_T$  auf  $H$  verbindet. Wir betrachten  $p'$  als Anfangspunkt.  $q(T)$  sei auf  $H(T)$  vor  $p_T$  derjenige Punkt, der von  $p_T$  ebenso weit entfernt ist wie  $p$ ,

$$s(q(T), p_T) = s(p, p_T) = T.$$

Dann ist,  $q = q(T)$ ,

$$(5.10) \quad \begin{aligned} s(p', q) &= |s(p', p_T) - s(q, p_T)| \\ &= |s(p', p_T) - s(p, p_T)| \leq s(p, p'). \end{aligned}$$

Für  $T \rightarrow \infty$  haben die Punkte  $q$  daher mindestens einen Häufungspunkt  $q'$ . Man darf  $q' \neq p'$  annehmen, denn sonst könnte man statt  $p$  den Punkt  $p_s$ ,  $s > 0$  fest, auf  $H$  als Anfangspunkt von  $H$  betrachten, und die neuen Punkte  $q$  wären dann die Punkte  $q$ , auf  $H(T)$ . Für eine passende Folge von Werten  $T \rightarrow \infty$  gilt nun  $q(T) \rightarrow q'$ , und  $H(T)$  konvergiert gegen den Halbstrahl  $H'$  von  $p'$  durch  $q'$ <sup>5)</sup>. Gleichzeitig konvergiert  $q(T)$ , auf  $H(T)$  gegen  $q'$ , auf  $H'$ . Wir zeigen, daß  $H'$  zu  $H$  asymptotisch ist.

Wir können annehmen, daß  $p'$  nicht auf  $H$  oder seiner Verlängerung liegt, da sonst alles trivial wäre. Der Bogen  $pp'$  schneidet dann  $H$  in  $p$  (und nur in  $p$ ). Wir betrachten nun alle Strahlen von den Punkten dieses Bogens zum Hilfspunkt  $p_T$  auf  $H$ . Sie erfüllen bei  $p_T$  einen Winkelraum einfach. Wir betrachten ferner alle in diesem Raum enthaltenen geodätischen Kreisbögen um  $p_T$  und bezeichnen mit  $l(t)$  die Länge desjenigen von ihnen, welcher im Punkte  $p$ , auf  $H$  beginnt. Er endet in  $q(T)$ , auf  $H(T)$ . Betrachtet man  $p_T$  als Pol, so ist

$$l(t) = \int y(r, \vartheta) d\vartheta, \quad r = T - t,$$

wo über jenen Winkelraum integriert wird. Wegen (5.2) ist nun

$$(5.11) \quad l(t) < \frac{1}{C} e^{-C(t-t')} l(t'), \quad 0 < t' < t.$$

Hieraus kann man leicht schließen, daß  $H'$  zu  $H$  asymptotisch ist, wenn gezeigt werden kann, daß  $l(t')$  etwa für  $t' = s(p, p')$  bei dem Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt. Verschiebt man  $p'$  längs  $pp'$  und wendet man (5.10) an, so sieht man, daß der besagte Bogen ganz im geodätischen Dreieck  $pp'p_T$  liegt. Die Behauptung ist dann eine Folge des Lemmas:

Die Länge eines um eine Ecke eines geodätischen Dreiecks gezogenen und innerhalb desselben liegenden geodätischen Kreisbogens ist kleiner als  $C^{-1}$  mal der gegenüberliegenden Seite ( $C$  ist das  $C$  von (5.2)).

<sup>5)</sup> Man sieht übrigens sofort, daß  $\angle pp'p_T$  mit wachsendem  $T$  zunimmt und kleiner als  $\pi$  bleibt.

Der Beweis ergibt sich leicht mit Hilfe von (5. 2), wenn man den Bogen vermittels der von der Ecke ausgehenden Strahlen auf die Seite abbildet.

Anschließend beweisen wir (3. 2). Eine obere Schranke von  $\sigma(P_{t+a}, P'_t)$  bei festem  $t$  erhält man in derselben Weise wie bei der Ableitung von (2. 2) durch Parallelverschiebung der ersten Richtung längs der geodätischen Strecke  $p_{t+a} p'_t$  und eine nachfolgende Drehung. Der Winkel  $\Delta\alpha$  dieser Drehung ist nicht größer als das Streckenintegral für den Winkel  $\alpha$  mit der Asymptotenschar

$$\int \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| ds.$$

Hier kann man vor dem obigen Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  (5. 9) und (5. 3) anwenden. Nach erfolgtem  $T \rightarrow \infty$  folgt dann

$$\sigma(P_{t+a}, P'_t) \leq (1 + c_1) s(p_{t+a}, p'_t),$$

und damit (3. 2).

Es bleibt noch die Eindeutigkeit von  $H'$  zu beweisen. Sie folgt aus der schärferen Aussage: Haben zwei verschiedene Halbstrahlen  $H', H''$  denselben Anfangspunkt  $p' = p''$  und beziehen sich die Symbole  $p'_t$  bzw.  $p''_t$  auf  $H'$  bzw.  $H''$ , so wächst  $s(p'_t, p''_t)$  für  $t \rightarrow \infty$  über alle Grenzen<sup>6)</sup>. Wäre dies nicht der Fall, so würde auf Grund des obigen Lemmas folgen, daß es geodätische Kreisbögen von  $H'$  nach  $H''$  um  $p'$  gäbe, die bei beliebig großem Radius beschränkte Länge hätten. Dies würde der Voraussetzung (5. 2) widersprechen. Damit ist Satz 3. 1 vollständig bewiesen.

## § 6.

### Beweis von Satz 3, 2.

(5. 9) gilt längs eines Strahles  $S$  in einem Felde von Halbstrahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt.  $\alpha$  war der Schnittwinkel mit der negativen Richtung des Halbstrahls. Ist  $A$  die jeweilige Distanz des Pols vom Schnittpunkt und setzt man  $t = A - r$ , so folgt

$$\left. \frac{y_r}{y} \right|_{r=A} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{y(r, \theta)}{y(A, \theta)} \Big|_{r=A} = -z'_t(t; A) \Big|_{t=0}.$$

Verlegt man nun den Pol längs einem Feldstrahl rückwärts ins Unendliche, so wird aus (5. 9) formal

$$(6. 1) \quad \frac{d\alpha}{ds} = -z'_0 \sin \alpha$$

<sup>6)</sup> Bei der Anwendung auf die Eindeutigkeit berücksichtige man: Für zwei asymptotische Halbstrahlen mit gleichem Anfangspunkt ist notwendig  $\alpha = 0$ .

für den Schnittwinkel mit der positiven Richtung in einem Felde positiv asymptotischer Strahlen;  $z'_0 = z'(0)$  wurde am Anfang von § 5 definiert und bezieht sich hier auf (5.1) längs dem im Schnittpunkt beginnenden (positiven) Feldhalbstrahl. Die strenge Rechtfertigung des Grenzüberganges gelingt leicht bei der integrierten Form von (5.9), wenn man die erwähnte Gleichmäßigkeit bezüglich des Anfangselementes in  $z'(0; A) \rightarrow z'(0)$  berücksichtigt<sup>7)</sup>.

Aus (5.3) folgt

$$(6.2) \quad |z'_0| \leq c_1$$

auf  $\tilde{F}$ . Ist die schärfere Voraussetzung  $A'$  erfüllt, so ist darüber hinaus

$$(6.3) \quad A': -z'_0 \geq c > 0$$

auf  $\tilde{F}$ .

Beweis von Satz 3.2. Man kann die beiden gegebenen Halbstrahlen durch solche,  $H_1$  und  $H_2$ , mit gemeinsamem Anfangspunkt  $p$  ersetzen. Nach Voraussetzung ist dann  $H_1 \neq H_2$ . Man betrachte einen Strahl  $S$  durch  $p$  derart, daß  $H_1$  und  $H_2$  auf verschiedenen Seiten von  $S$  liegen. Ferner betrachte man die beiden Asymptotenfelder, welchen  $H_1$  bzw.  $H_2$  angehören, und die Änderung der beiden Schnittwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  längs  $S$ ,  $\alpha_i = \alpha_i(s)$ . Wegen (6.1) und (6.3) wächst  $\alpha_1$  mit wachsendem  $s$  von  $\alpha_1(-\infty) = 0$  bis  $\alpha_1(+\infty) = \pi$ . Genau einmal tritt daher  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  ein. Dann ergänzen sich aber die beiden Feldhalbstrahlen zu einem Strahl mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir wollen die Eindeutigkeit noch unter der schwächeren Bedingung beweisen. Sind zwei Strahlen  $S_1$  und  $S_2$  zueinander sowohl positiv wie negativ asymptotisch, so ist notwendig  $S_1 = S_2$ . Dies folgt aus dem folgenden Satz.

$b > 0$  sei beliebig vorgegeben. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es dann ein  $L > 0$  mit folgender Eigenschaft. Sind  $B_1, B_2$  zwei geodätische Bögen der Länge  $> L$ , deren Anfangspunkte ebenso wie ihre Endpunkte um weniger als  $b$  voneinander entfernt sind, so hat  $B_2$  Punkte in der  $\varepsilon$ -Umgebung des Mittelpunktes von  $B_1$ .

Wie leicht zu sehen, kann man sich beim Beweise mit dem Fall eines gemeinsamen Anfangspunktes  $p$  begnügen. Die Endpunkte seien  $p_1$  und  $p_2$ . Der geodätische Kreis vom Radius  $l - b$ ,  $l$  = Länge von  $B_1$ , um  $p$  wird durch  $B_1$  und  $B_2$  in zwei Bögen zerlegt, von denen einer ganz im Dreieck  $pp_1p_2$  liegt. Seine Länge ist nach dem Lemma von § 5 kleiner als  $C^{-1}b$ . Die Länge des Bogens durch den Mittelpunkt von  $B_1$  ist daher wegen (5.11) kleiner als

$$C^{-2}b \exp \left\{ -c \left( l - b - \frac{1}{2}l \right) \right\} < C^{-2}b \exp \left\{ -c \left( \frac{1}{2}L - b \right) \right\}.$$

Daraus folgt der Satz.

<sup>7)</sup> Man berücksichtige ferner, daß bei dem Grenzübergang jedes  $\alpha$  bei festem  $s$  sich monoton ändert und kleiner als  $\pi$  bleibt.

## § 7.

## Beweis der Hilfssätze von § 3.

Wir betrachten noch einmal die in § 5 definierten Lösungen  $z(s; A)$  =  $z(s, \alpha; A)$  und  $z(s) = z(s, \alpha)$  von (5.1) längs eines Halbstrahls mit festem Anfangspunkt, aber beliebigem Anfangswinkel  $\alpha$  mit einer festen Richtung. Es war bereits bewiesen worden, daß  $z'_0 = z'(0)$  eine auf  $\mathfrak{F}$  stetige Funktion des Linienelementes ist. Es ist nun entscheidend für den Beweis der Hilfssätze, daß

$$\frac{dz'_0}{d\alpha}$$

existiert. Wir behaupten, daß diese Ableitung ebenfalls stetig vom Linienelement abhängt.

Bisher wurde nur von der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von  $\mathfrak{F}$  und allein von Vor. A') Gebrauch gemacht. Wir benötigen zum Beweis der Behauptung auch die dritten Ableitungen und Vor. B'). Daß

$$u = u(s, \alpha; A) = z'_\alpha(s, \alpha; A)$$

vorhanden ist und stetig von  $s, \alpha$  abhängt, folgt aus klassischen Sätzen.  $u$  genügt der formal differenzierten Variationsgleichung

$$(7.1) \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + K u = -K'_\alpha z(s, \alpha; A)$$

und verschwindet für  $s = 0, A$ . Nach (5.8) kann unter Verwendung der Richtungsableitung normal zum Strahl  $K'_\alpha = y(s, \alpha) dK/d\bar{s}$  geschrieben werden. Aus (5.1), mit  $z$  statt  $y$ , und (7.1) folgt

$$(u'z - uz')' = -\frac{dK}{d\bar{s}} z^2 y,$$

und durch Integration wegen der Randbedingungen für  $u$  und  $z = z(s, \alpha; A)$

$$(7.2) \quad u'_s(0, \alpha; A) = \frac{\partial}{\partial \alpha} z'_s(0, \alpha; A) = \int_0^A \frac{dK}{d\bar{s}} z^2 y ds.$$

Zum Beweise unserer Behauptung genügt der Nachweis, daß der Integrand

$$(7.3) \quad \frac{dK}{d\bar{s}}(s, \alpha) z^2(s, \alpha; A) y(s, \alpha),$$

der für beliebiges festes  $A$  stetig von  $s, \alpha$  abhängt,  $0 \leq s \leq A$ , in allen diesen Intervallen absolut unter einer festen integrierbaren Funktion von  $s$  allein liegt<sup>9)</sup>. Die Behauptung folgt dann durch Grenzübergang  $A \rightarrow \infty$ . Nun

<sup>9)</sup> An der betreffenden Stelle in Hopf I war beim Beweise ein Versehen unterlaufen. Seine Berichtigung ist leicht, und ich nehme an, daß der Leser sie selbst ausführen konnte. — Bei dieser Gelegenheit sei noch bemerkt, daß der Passus in der dritten Zeile auf S. 293 falsch ist, aber ohne weiteres weggelassen werden kann.

ist nach (5.5) die Wurzel  $zy^{\frac{1}{2}}$  aus dem Produkt des zweiten und dritten Faktors gleich

$$y^{\frac{3}{2}}(s) \int_s^A \frac{dt}{y^2(t)} = y^{-\frac{1}{2}}(s) \int_s^A \left( \frac{y(s)}{y(t)} \right)^2 dt.$$

Wegen (5.2) ist für  $0 < s < A$  das Integral rechts kleiner als

$$C^{-2} \int_s^{\infty} e^{-2c(t-s)} dt = \frac{1}{2cC^2}.$$

Für  $s > 1$  hat also (7.3) die Majorante

$$\frac{C^*}{y(s)} = \frac{C^*}{y(1)} \cdot \frac{y(1)}{y(s)} < C^{**} e^{-cs}.$$

Für  $s \leq 1$  ist die gleichmäßige Beschränktheit von (7.3) direkt zu erkennen. Aus alledem folgt

$$\frac{dz'_0}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{dK}{ds} z^2 y ds,$$

$z = z(s, \alpha)$ , und man sieht leicht, daß diese Größe eine stetige Funktion des Linienelementes ist.

**Beweis von Hilfssatz 3.4.** Man verbinde beide Punkte durch eine geodätische Strecke  $S$ ,  $0 \leq s \leq s^*$ .  $\beta, \gamma$  seien von  $S$  an gezählt. Der Schnittwinkel  $\alpha(s)$  in dem jeweiligen Asymptotenfelde, welchem die beiden Halbstrahlen angehören, erfüllt längs  $S$  die Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha}{ds} = -z'_0 \sin \alpha, \quad z'_0 = f(s, \alpha).$$

Dabei ist  $\alpha(0) = \beta$ ,  $\alpha(s^*) = \gamma$ . Nach obigem wissen wir, daß  $f$  und  $\partial f / \partial \alpha$  stetige Funktionen von  $s, \alpha$  sind. Nach einem wohlbekannten Satz ist also die Ableitung von  $\alpha(s; \beta)$  nach dem Anfangswert  $\beta$  vorhanden und in  $s, \beta$  stetig. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen. Aus Symmetriegründen ist natürlich  $d\gamma/d\beta \neq 0$ .

**Beweis von Hilfssatz 3.3.** Aus der vorangehenden Betrachtung folgt in Verbindung mit den Sätzen über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten, daß  $\varphi_1(s, \alpha)$ ,  $\varphi_2(s, \alpha)$  stetige Funktionen sind. Ebenso  $\alpha(s, \varphi_1)$  und  $\alpha(s, \varphi_2)$ .

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right|_s = \frac{1}{\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} \right|_s}$$

(bei festem  $s$ ) hängt nach dem vorangehend bewiesenen Satze stetig von  $s, \varphi_1$ , also auch stetig von  $s, \alpha$  ab. Analoges gilt von  $\varphi_2$ . Nach dem Theorem über implizite Funktionen, angewandt auf  $\alpha(\varphi_1, s) = \text{const}$ , ist

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \right|_{\alpha} = - \frac{\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{\varphi_1}}{\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} \right|_s}.$$

Die Anwendung ist berechtigt, denn vom Nenner gilt Hilfssatz 3.4, d. h. Stetigkeit in  $s, \varphi_1$  und Nichtverschwinden, und der Zähler ist nach (6.1) gleich  $-z'_0 \sin \alpha$ , was ebenfalls stetig von  $s, \varphi_1$  abhängt. Die linke Seite hängt damit stetig von  $s, \alpha$  ab. Gleiches gilt von  $\varphi_2$ . Der erste Teil des Hilfssatzes ist also bewiesen. Die Funktionaldeterminante ist nun nach obigem gleich

$$\frac{\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{\varphi_2} - \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{\varphi_1}}{\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} \right|_s \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_2} \right|_s}.$$

Der Zähler ist nach (6.1) gleich  $\sin \alpha [(z'_0)_1 + (z'_0)_2]$ ; die Vorzeichenänderung rührt daher, daß bei dem Subtrahend im Zähler  $\pi - \alpha$  der Winkel ist, von dem (6.1) gilt. Das Verschwinden der eckigen Klammer ist aber unmöglich. Sonst hätte man nämlich eine Lösung  $z(s)$  der Gleichung (5.1) längs eines ganzen Strahles, welche den Bedingungen  $z(\pm \infty) = 0, z(0) = 1$  genügen würde. Die Unmöglichkeit hiervon folgt leicht aus (5.2), wenn man den Nullpunkt auf dem Strahl nach  $-\infty$  verlegt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

**Beweis des Haupthilfssatzes 3.5.** Die Menge von Stromlinien hat dann und nur dann das Maß  $m = 0$  in  $\Omega$ , wenn es bei der Menge aller entsprechenden Stromlinien in  $\tilde{\Omega}$  der Fall ist. Oder: Wenn es bei derjenigen Teilmenge dieser Menge zutrifft, bei welcher die Strahlen einen festen Halbstrahl  $H_0$  in  $\tilde{\Omega}$  schneiden; denn man kann abzählbar viele  $H_0$  so angeben, daß jeder Strahl in  $\tilde{\Omega}$  mindestens einen von ihnen schneidet. Für festes  $H_0$  sind die Schnittstrahlen durch  $s, \alpha$  gekennzeichnet. Die Linienelemente auf ihnen lassen sich durch die Koordinaten  $\tau, s, \alpha$  charakterisieren, wo  $\tau$  die Maßzahl der Strecke vom Schnittpunkt zum Trägerpunkt bedeutet. Man überlegt sich leicht, daß  $dm = \sin \alpha \, d\alpha \, ds \, d\tau$  ist. Daraus ergibt sich: Für eine Menge der erwähnten Art ist dann und nur dann  $m = 0$ , wenn die Menge der Schnittelemente das Maß  $\iint ds \, d\alpha = 0$  besitzt. Hieraus und aus Hilfssatz 3.3 folgt der Haupthilfssatz.

#### Zusatz bei der Korrektur.

*Beweis der Hauptsätze auf Grund der schwächeren Unstabilitätsbedingung (5.2).* Es braucht nur noch die Existenzbehauptung des Satzes 3.2 aus dieser Bedingung hergeleitet zu werden. Man gehe wieder von zwei verschie-

denen Halbstrahlen  $H'$ ,  $H''$  auf  $\mathfrak{F}$  mit gemeinsamem Anfangspunkt  $p_0$  aus und betrachte die geodätische Verbindungsstrecke eines Punktes  $p'$  auf  $H'$  mit einem Punkte  $p''$  auf  $H''$ . Zum Beweise der Behauptung genügt der Nachweis, daß für  $p' \rightarrow \infty$  und  $p'' \rightarrow \infty$  d. h. Minimalentfernung  $h$  zwischen  $p_0$  und  $p'p''$  beschränkt bleibt.

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $p_0p'p''$  ist wegen (5.8) mit  $p_0$  als Pol

$$(1) \quad F = \iint y(r, \theta) dr d\theta.$$

Es sei  $h > 1$ . Dann folgt mit Rücksicht auf (5.2)

$$\int y dr > \int_1^h y dr > Cy(1, \theta) \int_1^h e^{(r-1)} dr,$$

also

$$(2) \quad F > C^* \theta_0 (e^{(h-1)} - 1),$$

unter  $\theta_0$  den Winkel bei  $p_0$  verstanden. (2) gilt natürlich auch für  $h < 1$ . Andererseits zerlege man das Dreieck durch die kürzeste Strecke von  $p_0$  zur Strecke  $p'p''$  in zwei Teildreiecke  $D'$ ,  $D''$ . Auf sie wende man (1) mit  $p'$  bzw.  $p''$  als Pol an. Nach (5.2) ist nun in jedem Falle

$$\int y dr < C^{**} \bar{y},$$

wo  $\bar{y}$  der Wert im Endpunkt der Integrationsstrecke — der letztere liegt auf der gemeinsamen Seite der Teildreiecke — ist. Wegen  $\bar{y} d\theta \leq ds =$  Bogenelement auf jener Seite gilt von den Dreiecksinhalten

$$F' < C^{**} h, \quad F'' < C^{**} h.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (2) die Behauptung. Zugleich folgt, daß die Fläche des Dreiecks beschränkt bleibt.

*Topologische Natur der Flächen  $\mathfrak{F}$ .* Die geschlossenen Flächen der betrachteten Art stellen gestaltlich keine anderen Typen als die speziellen Flächen negativer Krümmung dar. Die *curvatura integra* einer Fläche  $\mathfrak{F}$  ist nämlich negativ. Zum Beweise dieser Tatsache beachte man, daß die in § 5 und 6 betrachtete Größe  $z_0$ , die im Elementraum  $\Omega$  eine stetige Funktion  $w(P)$  darstellt ( $w \neq 0$ ), längs einer Stromlinie die Riccatische Gleichung  $\frac{dw}{dt} = -K - w^2$  befriedigt. Wegen

$$\int_{\Omega} w(\mathcal{L}_1 P) dm = \int_{\Omega} w(P) dm$$

ergibt sich

$$2\pi \int_{\mathfrak{F}} K do = \int_{\Omega} K dm = - \int_{\Omega} w^2 dm.$$

(Eingegangen am 19. 4. 1940.)

# Modulartartige lückenlose Ausfüllung des $R_n$ mit kongruenten Würfeln. II.

Von

Oskar Perron in München.

## Inhalt.

	Seite
§ 11. Ein allgemeiner Satz über dreigliedrige Zyklen . . . . .	609
§ 12. Hilfssätze über dreigliedrige Zyklen im $R_9$ . . . . .	611
§ 13. Das Verschwinden der dreigliedrigen Zyklen im $R_9$ . Station I	618
§ 14. Zwei allgemeine Sätze über viergliedrige Zyklen . . . . .	621
§ 15. Hilfssätze über viergliedrige Zyklen im $R_9$ . Station II . . . .	622
§ 16. Weitere Hilfssätze über viergliedrige Zyklen im $R_9$ . Station III.	630
§ 17. Nochmals Hilfssätze über viergliedrige Zyklen im $R_9$ . Station IV	642
§ 18. Das Verschwinden der viergliedrigen Zyklen im $R_9$ . Station V	653
§ 19. Das Verschwinden der fünfgliedrigen Zyklen im $R_9$ . Station VI	654
§ 20. Station VII und Endresultat . . . . .	657

## § 11.

### Ein allgemeiner Satz über dreigliedrige Zyklen.

Während in. Teil I (Math. Ann. 117, S. 415) nach Gewinnung einiger Sätze, die sich auf ein beliebiges  $n$  beziehen, der Beweis der Minkowskischen Vermutung im  $R_n$  für  $n \leq 5$  trivial war und auch für  $n = 6$  nur wenig Mühe kostete, war für  $n = 7$  und erst recht für  $n = 8$  noch eine ziemliche Kraftanstrengung erforderlich. In diesem zweiten Teil wird nun der Beweis für  $n = 9$  erbracht. Dabei steigen erwartungsgemäß die Schwierigkeiten. Methodisch kommt zwar nicht viel Neues dazu, aber die Zahl der Fälle und Unterfälle bei den einzelnen Beweisabschnitten ist beträchtlich. Um die Übersicht zu erleichtern, wurden viele Zwischenresultate als Hilfssätze formuliert, von denen die meisten nur den Rang von Hilfs-Hilfssätzen haben, während die markanteren als *Stationen* bezeichnet sind. Die Kette der sieben Stationen bildet den Ariadnefaden durch das Labyrinth des Beweises. Man kann den Beweis an vielen Stellen mannigfach variieren und ich zweifle nicht, daß eine kürzere<sup>1)</sup> Beweisaneinanderordnung möglich ist als die hier gegebene; aber ohne zahlreiche Fallunterscheidungen wird man kaum auskommen.

<sup>1)</sup> Natürlich sind hier keine Kürzungen gemeint, die nur dadurch erreicht werden, daß man dem Leser die Ausfüllung von Lücken überläßt. Ich war darauf bedacht, den ganzen Beweis lückenlos darzustellen und jeden Einzelschluß genau zu begründen.

Wir beginnen mit einem auf allgemeines  $n$  bezüglichen Satz. Wenn der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden ist, so muß nach Satz 14 jeder der drei Grundwürfel  $W_1, W_2, W_3$  außer dem Einser noch wenigstens fünf von 0 verschiedene Koordinaten haben. Man kann aber noch manche Figuren, bei denen diese Bedingung erfüllt ist, ausschließen. In dieser Richtung liegt

**Satz 17.** *In einer Grundfigur des  $R_n$ , wo  $n \geq 9$ , können, wenn der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden ist, die drei Grundwürfel  $W_1, W_2, W_3$  nicht das folgende Aussehen haben:*

$$W_1: 1, \alpha_1^2, 0, \alpha_1^4, \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, 0, 0, \alpha_1^{10}, \dots, \alpha_1^n$$

$$W_2: 0, 1, \alpha_2^3, \alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6, 0, \alpha_2^8, 0, 0, \dots, 0$$

$$W_3: \alpha_3^1, 0, 1, \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6, 0, 0, \alpha_3^9, 0, \dots, 0.$$

**Beweis.** Wenn die Grundwürfel dieses Aussehen haben, dürfen wir wie in § 4 annehmen, daß

$$(11.1) \quad -\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = 1,$$

$$(11.2) \quad \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 = 1,$$

$$(11.3) \quad \alpha_1^6 + \alpha_2^6 - \alpha_3^6 = 1$$

ist. Nun gehört unsere Grundfigur zu einer gewissen modulartigen lückenlosen Ausfüllung des  $R_n$ , und genau wie beim Beweis von Satz 14 ergibt sich, daß in dieser Ausfüllung auch die folgenden zwei Würfel enthalten sind (die dortige Zahl  $\varrho$  ist jetzt gleich  $\alpha_3^6$ ):

$$W': 1, 1, 1, \alpha_1^4 + \beta^4, \alpha_2^5 + \beta^5, \alpha_3^6 + \beta^6, \beta^7, \dots, \beta^n$$

$$W'': 0, 1, 1 + \alpha_2^3, \alpha_1^4 + \gamma^4, \alpha_2^5 + \gamma^5, \alpha_3^6 + \gamma^6, \gamma^7, \dots, \gamma^n,$$

wobei  $0 \leq \beta^r < 1, 0 \leq \gamma^r < 1$  ist. Nun folgt unter Berücksichtigung von (11.1), (11.2), (11.3)

$$\text{aus } W_2 + W_3 - W': \beta^4 = 0, \quad \text{aus } W_2 + W_3 - W'': \gamma^4 = 0,$$

$$\text{aus } W_3 + W_1 - W': \beta^5 = 0, \quad \text{aus } W_3 + W_1 - W'': \gamma^5 = 0,$$

$$\text{aus } W_1 + W_2 - W': \beta^6 = 0,$$

und sodann mit Berücksichtigung dieser Resultate

$$\text{aus } W_2 - W_3 - W': \alpha_3^6 + \beta^6 = 1$$

$$\text{und aus } W_3 + W' - W'': \alpha_3^6 + \beta^6 - \gamma^6 = 1.$$

Hiernach ist  $\gamma^6 = 0$ , und dann folgt weiter

$$\text{aus } W_3 - W_1 + W'': 2\alpha_3^6 - \alpha_1^6 + \gamma^6 = 1$$

$$\text{und aus } W_3 - W' + W'': \alpha_3^6 + \gamma^6 = 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber  $\alpha_3^6 = \alpha_1^6$ , was im Widerspruch mit (11.3) steht.

## § 12.

Hilfssätze über dreigliedrige Zyklen im  $R_9$ .

In einer Grundfigur des  $R_9$  sind nach Satz 2 alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0. Wir wenden uns jetzt den dreigliedrigen Zyklen zu. Wenn der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden ist, so haben die ersten drei Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$\begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3 \\ W_3: \alpha_3^1, 0, 1 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} \alpha_1^4, & \alpha_1^5, & \alpha_1^6, & \alpha_1^7, & \alpha_1^8, & \alpha_1^9 \\ \alpha_2^4, & \alpha_2^5, & \alpha_2^6, & \alpha_2^7, & \alpha_2^8, & \alpha_2^9 \\ \alpha_3^4, & \alpha_3^5, & \alpha_3^6, & \alpha_3^7, & \alpha_3^8, & \alpha_3^9 \end{array} \right.$$

wobei in jeder Zeile des rechts abgeteilten Rechtecks nach Satz 14 höchstens zwei Nullen stehen. Wegen  $\alpha_i^r \alpha_i^s = 0$  (Satz 2) sind dann bei den übrigen sechs Grundwürfeln

$$\begin{array}{l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 \\ \dots \dots \dots \\ W_9: \alpha_9^1, \alpha_9^2, \alpha_9^3 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1, & \alpha_4^5, & \alpha_4^6, & \alpha_4^7, & \alpha_4^8, & \alpha_4^9 \\ \alpha_5^4, & 1, & \alpha_5^6, & \alpha_5^7, & \alpha_5^8, & \alpha_5^9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_9^4, & \alpha_9^5, & \alpha_9^6, & \alpha_9^7, & \alpha_9^8, & 1 \end{array} \right.$$

in jeder Spalte des links abgeteilten Rechtecks höchstens zwei  $\alpha_i^r$  von 0 verschieden. Wir beweisen jetzt weitere Einschränkungen.

**Hilfssatz 4.** Wenn in einer Grundfigur des  $R_9$  der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden ist, so ist es unmöglich, daß bei zweien der sechs Grundwürfel  $W_4, \dots, W_9$  ein und dieselbe der ersten drei Koordinaten und bei zwei anderen dieser Grundwürfel ein und dieselbe andere der ersten drei Koordinaten von 0 verschieden ist.

**Beweis.** Angenommen, es wäre doch so, so können wir die Koordinaten und Grundwürfel so numerieren, daß es sich um die zweite Koordinate von  $W_6$  und  $W_7$  und um die dritte Koordinate von  $W_8$  und  $W_9$  handelt. Dann ist also

$$\alpha_6^2 \neq 0, \alpha_7^2 \neq 0, \alpha_8^3 \neq 0, \alpha_9^3 \neq 0$$

und folglich (nach Satz 2)

$$\alpha_2^6 = 0, \alpha_2^7 = 0, \alpha_3^8 = 0, \alpha_3^9 = 0.$$

Nach Satz 14 ist alsdann

$$\alpha_2^r \neq 0 \quad \text{für} \quad r = 4, 5, 8, 9$$

$$\alpha_3^r \neq 0 \quad \text{für} \quad r = 4, 5, 6, 7.$$

Die ersten drei Grundwürfel haben daher das Aussehen

$$\begin{array}{l|l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0 & , , , , , \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3 & \alpha_2^4, \alpha_2^5, 0, 0, \alpha_2^6, \alpha_2^9 \\ W_3: \alpha_3^1, 0, 1 & \alpha_3^4, \alpha_3^5, \alpha_3^6, \alpha_3^7, 0, 0 \end{array}$$

und die letzten sechs haben das Aussehen

$$\begin{array}{l|l} W_4: , 0, 0 & 1, , , , \\ W_5: , 0, 0 & , 1, , , \\ W_6: , \alpha_6^2, 0 & , , 1, , \\ W_7: , \alpha_7^2, 0 & , , , 1, , \\ W_8: , 0, \alpha_8^3 & , , , , 1, \\ W_9: , 0, \alpha_9^3 & , , , , , 1, \end{array}$$

wobei jedesmal die eingesetzten  $\alpha_i^n$  von 0 verschieden sind, während die Plätze für diejenigen  $\alpha_i^n$ , von denen noch nicht feststeht, ob sie  $= 0$  oder  $\neq 0$  sind, leer gelassen wurden.

Nun zeigen wir zunächst, daß das in der letzten Figur eingerahmte Quadrat keinen von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus enthalten kann. Wenn es nämlich doch so wäre, so müßte nach Satz 14

$$\alpha_4^1 \neq 0, \alpha_4^7 \neq 0, \alpha_4^8 \neq 0, \alpha_4^9 \neq 0$$

$$\alpha_5^1 \neq 0, \alpha_5^7 \neq 0, \alpha_5^8 \neq 0, \alpha_5^9 \neq 0$$

sein. Wegen der beiden vorderen Ungleichungen wäre dann nach der Feststellung, die unmittelbar vor Hilfssatz 4 getroffen wurde,  $\alpha_i^1 = 0$  für  $i = 6, 7, 8, 9$ ; also insbesondere  $\alpha_6^1 = 0$  und folglich wieder nach Satz 14

$$\alpha_6^7 \neq 0, \alpha_6^8 \neq 0, \alpha_6^9 \neq 0.$$

Aus diesen verschiedenen Ungleichungen würde nun u. a. folgen:

$$\alpha_7^4 = 0, \alpha_7^5 = 0, \alpha_7^6 = 0.$$

Nach Satz 14 könnte dann  $W_7$  an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein, während andererseits doch  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_7^3 \neq 0$  wäre.

Also enthält das eingerahmte Quadrat wirklich keinen von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus und folglich muß es in wenigstens einer Zeile zwei Nullen enthalten. Ist es die erste Zeile, so kann  $W_4$  nach Satz 14 an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein: also ist  $\alpha_4^1 \alpha_1^2 \alpha_2^4 = 0$ ,  $\alpha_4^7 \alpha_7^2 \alpha_2^4 = 0$ ,  $\alpha_4^8 \alpha_8^2 \alpha_2^4 = 0$ ,  $\alpha_4^9 \alpha_9^2 \alpha_2^4 = 0$  und folglich  $\alpha_4^1 = 0$ ,  $\alpha_4^7 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_4^9 = 0$ . Daher ist  $\alpha_i^4 = 0$  für alle  $i \neq 4$ , was dem Satz 5 widerspricht, nachdem ja die Minkowskische Vermutung im  $R_9$  zutrifft und der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_1^1$  von 0 verschieden ist. Stehen die zwei Nullen in der zweiten Zeile des Quadrats,

so stößt man auf denselben Widerspruch, wenn man die Indizes 4 und 5, die ja in unserer Grundfigur ganz gleichberechtigt auftreten, ihre Rollen tauschen läßt. Demnach sind die zwei Nullen in der letzten Zeile des Quadrats, d. h. es ist

$$\alpha_6^4 = 0, \quad \alpha_6^5 = 0.$$

Da  $W_6$  an dem von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_6^2 \alpha_2^3 \alpha_3^6$  beteiligt ist, muß jetzt nach Satz 14 u. a.  $\alpha_7^2 \neq 0$  sein. Nun treten aber in unserer Grundfigur die Indizes 6 und 7 gleichberechtigt auf und können ihre Rollen tauschen; also muß auch  $\alpha_7^6 \neq 0$  sein. Hiernach ist der Zyklus  $\alpha_7^2 \alpha_7^6$  von 0 verschieden, während doch alle zweigliedrigen Zyklen gleich 0 sind. Damit ist der Hilfssatz 4 bewiesen.

**Hilfssatz 5.** Wenn in einer Grundfigur des  $R_9$  der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden ist, so kann jede der ersten drei Koordinaten höchstens bei einem der sechs Grundwürfel  $W_4, \dots, W_9$  von 0 verschieden sein.

**Beweis.** Wir nehmen an, daß im Gegenteil etwa die dritte Koordinate bei den zwei Würfeln  $W_8, W_9$  von 0 verschieden sei, also

$$\alpha_8^3 \neq 0, \quad \alpha_9^3 \neq 0,$$

und folglich

$$\alpha_3^8 = 0, \quad \alpha_3^9 = 0.$$

Nach Satz 14 ist dann

$$\alpha_3^4 \neq 0, \quad \alpha_3^5 \neq 0, \quad \alpha_3^6 \neq 0, \quad \alpha_3^7 \neq 0$$

und folglich

$$\alpha_4^3 = 0, \quad \alpha_5^3 = 0, \quad \alpha_6^3 = 0, \quad \alpha_7^3 = 0.$$

Ferner sind nach Satz 14 wenigstens vier der sechs Zahlen  $\alpha_2^4, \alpha_2^5, \dots, \alpha_2^9$  von 0 verschieden, also sind wenigstens zwei der vier Zahlen  $\alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6, \alpha_2^7$  von 0 verschieden. Da die Indizes 4, 5, 6, 7 bis jetzt gleichberechtigt aufgetreten sind, können wir durch eventuelle Umnummerierung erreichen, daß

$$\alpha_2^4 \neq 0, \quad \alpha_2^5 \neq 0$$

und folglich

$$\alpha_4^2 = 0, \quad \alpha_5^2 = 0$$

ist. Außerdem ist  $\alpha_4^5 \alpha_5^4 = 0$ , und da die Indizes 4, 5 bis jetzt gleichberechtigt auftreten, können wir so numerieren, daß

$$\alpha_4^5 = 0$$

ist. Als dann haben die ersten drei Grundwürfel das Aussehen

$$(12.1) \quad \begin{array}{l|cccccc} W_1: & 1, & \alpha_1^2, & 0 & & & \\ W_2: & 0, & 1, & \alpha_2^3 & \alpha_2^4, & \alpha_2^5, & \\ W_3: & \alpha_3^1, & 0, & 1 & \alpha_3^4, & \alpha_3^5, & \alpha_3^6, \alpha_3^7, 0, 0 \end{array}$$

und die letzten sechs haben das Aussehen

$$(12.2) \quad \begin{array}{l} W_4: \\ W_5: \\ W_6: \\ W_7: \\ W_8: \\ W_9: \end{array} \begin{array}{ccc} , & 0, & 0 \\ , & 0, & 0 \\ , & , & 0 \\ , & , & 0 \\ , & , & \alpha_3^3 \\ , & , & \alpha_3^3 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1, & 0, & , & , \\ , & 1, & , & , \\ , & , & 1, & , \\ , & , & , & 1, \\ , & , & , & 1, \\ , & , & , & 1, \end{array} \right.$$

wobei die eingesetzten  $\alpha_i^n$  wieder von 0 verschieden sind.

Wir nehmen jetzt zunächst an, daß eine der Zahlen  $\alpha_4^5, \alpha_4^9$  von 0 verschieden ist. Dann ist  $W_4$  an dem von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_4^5 \alpha_3^3 \alpha_3^4$  bzw.  $\alpha_4^9 \alpha_3^3 \alpha_3^4$  beteiligt, so daß nach Satz 14

$$\alpha_4^1 \neq 0, \alpha_4^6 \neq 0, \alpha_4^7 \neq 0, \alpha_4^8 \neq 0, \alpha_4^9 \neq 0$$

sein muß<sup>2)</sup>. Wegen der vordersten Ungleichung und Hilfssatz 4 ist dann

$$\alpha_5^1 = 0, \alpha_5^6 = 0, \alpha_5^7 = 0$$

und aus  $\alpha_4^6 \alpha_6^4 = 0, \alpha_4^7 \alpha_7^4 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_6^4 = 0, \alpha_7^4 = 0.$$

Da die Indizes 6, 7 bis jetzt gleichberechtigt auftreten und  $\alpha_5^7 \alpha_7^6 = 0$  ist, dürfen wir außerdem

$$\alpha_8^7 = 0$$

annehmen. Nunmehr kann  $W_6$  nach Satz 14 an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein, also ist  $\alpha_6^2 \alpha_2^4 \alpha_4^6 = 0, \alpha_6^3 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0, \alpha_6^9 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0$  und folglich

$$\alpha_6^2 = 0, \alpha_6^3 = 0, \alpha_6^9 = 0.$$

Damit  $W_6$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt

$$\alpha_8^5 \neq 0$$

sein und aus  $\alpha_6^5 \alpha_3^6 = 0, \alpha_4^6 \alpha_6^5 \alpha_3^4 = 0$  folgt dann

$$\alpha_3^6 = 0, \alpha_3^4 = 0.$$

Nunmehr kann auch  $W_8$  nach Satz 14 an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein, also ist  $\alpha_8^3 \alpha_3^5 \alpha_3^8 = 0, \alpha_8^2 \alpha_3^5 \alpha_3^9 = 0$  und folglich

$$\alpha_8^3 = 0, \alpha_8^2 = 0.$$

<sup>2)</sup> Es empfiehlt sich jetzt, die Figur (12.2) laufend zu ergänzen, sobald von einem  $\alpha_i^n$  festgestellt ist, ob es  $= 0$  oder  $\neq 0$  ist. Dann werden die einzelnen Schlüsse, insbesondere die häufige Anwendung von Satz 14, stets ohne weiteres einleuchten. Ähnliches gilt auch späterhin für die ganze Arbeit.

Damit  $W_5$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt

$$\alpha_5^7 \neq 0$$

sein. Aus  $\alpha_5^7 \alpha_7^5 = 0$ ,  $\alpha_5^5 \alpha_7^7 \alpha_7^5 = 0$  folgt dann aber weiter

$$\alpha_7^5 = 0, \quad \alpha_7^9 = 0.$$

Jetzt kann auch  $W_7$  nach Satz 14 an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein; also ist  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^3 \alpha_3^5 \alpha_5^7 = 0$ ,  $\alpha_7^5 \alpha_5^3 \alpha_3^7 = 0$  und folglich

$$\alpha_7^2 = 0, \quad \alpha_7^3 = 0, \quad \alpha_7^9 = 0.$$

Somit hat sich nun  $\alpha_7^r = 0$  für alle  $r \neq 7$  herausgestellt, so daß  $W_7$  gegen Satz 5 verstößt.

Die Annahme, daß in (12. 2) eine der Zahlen  $\alpha_4^8$ ,  $\alpha_4^9$  von 0 verschieden ist, hat sich somit als unmöglich herausgestellt. Folglich ist

$$\alpha_4^8 = 0, \quad \alpha_4^9 = 0.$$

Nach Satz 14 kann dann  $W_4$  an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein; daher ist  $\alpha_4^2 \alpha_2^4 \alpha_4^1 = 0$ , also

$$\alpha_4^1 = 0.$$

Damit  $W_4$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß nun eine der Zahlen  $\alpha_4^6$ ,  $\alpha_4^7$  von 0 verschieden sein, und da die Indizes 6, 7 bis jetzt gleichberechtigt auftreten, dürfen wir speziell

$$\alpha_4^6 \neq 0$$

annehmen. Nun ist  $\alpha_4^6 \alpha_6^4 = 0$ ,  $\alpha_2^4 \alpha_4^6 \alpha_6^2 = 0$  und folglich

$$\alpha_6^4 = 0, \quad \alpha_6^2 = 0.$$

Aus der Figur (12. 2) bekommt man daher eine Teilfigur von folgendem Aussehen:

$$(12. 3) \quad \begin{array}{l} W_4: \\ W_5: \\ W_6: \\ W_7: \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & \alpha_4^6, & , & 0, & 0 \\ , & 0, & 0 & , & 1, & , & , & , & \\ , & 0, & 0 & 0, & , & 1, & , & , & \\ , & , & 0 & , & , & , & 1, & , & \end{array}$$

Wir nehmen jetzt zunächst an, daß eine der Zahlen  $\alpha_6^8$ ,  $\alpha_6^9$  von 0 verschieden ist. Dann ist  $W_6$  an dem von 0 verschiedenen Zyklus  $\alpha_6^2 \alpha_3^3 \alpha_3^6$  bzw.  $\alpha_6^3 \alpha_3^5 \alpha_5^6$  beteiligt, so daß nach Satz 14

$$\alpha_6^1 \neq 0, \quad \alpha_6^5 \neq 0, \quad \alpha_6^7 \neq 0, \quad \alpha_6^8 \neq 0, \quad \alpha_6^9 \neq 0$$

sein muß. Wegen der vordersten Ungleichung und Hilfssatz 4 ist dann

$$\alpha_6^1 = 0, \quad \alpha_7^1 = 0$$

und aus  $\alpha_6^5 \alpha_5^6 = 0$ ,  $\alpha_4^6 \alpha_5^5 \alpha_3^4 = 0$ ,  $\alpha_6^7 \alpha_7^6 = 0$ ,  $\alpha_4^6 \alpha_5^7 \alpha_7^4 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_5^6 = 0, \alpha_3^4 = 0, \alpha_7^6 = 0, \alpha_7^4 = 0.$$

Nunmehr sind auch  $W_5$  und  $W_7$  nach Satz 14 an keinen von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklen beteiligt; also ist  $\alpha_5^8 \alpha_3^3 \alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_5^9 \alpha_3^3 \alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^5 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^6 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$  und folglich

$$\alpha_5^8 = 0, \alpha_5^9 = 0, \alpha_7^2 = 0, \alpha_7^5 = 0, \alpha_7^6 = 0.$$

Damit  $W_5$  und  $W_7$  nicht gegen Satz 5 verstoßen, muß jetzt  $\alpha_5^7 \neq 0$ ,  $\alpha_7^5 \neq 0$  sein, während doch  $\alpha_5^7 \alpha_7^5 = 0$  ist.

Die Annahme, daß in (12. 3) eine der Zahlen  $\alpha_5^8$ ,  $\alpha_5^9$  von 0 verschieden ist, hat sich somit als unmöglich herausgestellt. Folglich ist  $\alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_5^9 = 0$  und die Figur (12. 3) gewinnt das Aussehen

$$(12. 4) \quad \begin{array}{l|l} W_4: & 0, \quad 0, \quad 0 \\ W_5: & \quad, \quad 0, \quad 0 \\ W_6: & \quad, \quad 0, \quad 0 \\ W_7: & \quad, \quad, \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 1, \quad 0, \quad \alpha_4^6, \quad, \quad 0, \quad 0 \\, \quad, \quad 1, \quad, \quad, \quad, \quad, \\ 0, \quad, \quad 1, \quad, \quad 0, \quad 0 \\, \quad, \quad, \quad, \quad 1, \quad, \end{array}$$

Nach Satz 14 sind dabei  $W_4$  und  $W_6$  an keinen von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklen beteiligt.

Wenn wir nun annehmen, daß

$$\alpha_5^8 \neq 0$$

ist, so folgt aus  $\alpha_6^5 \alpha_5^6 = 0$ ,  $\alpha_4^6 \alpha_5^5 \alpha_3^4 = 0$ :

$$\alpha_5^6 = 0, \alpha_3^4 = 0.$$

Nach Satz 14 ist dann auch  $W_5$  an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt; daher ist  $\alpha_5^1 \alpha_1^2 \alpha_2^5 = 0$ ,  $\alpha_5^8 \alpha_2^3 \alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_5^9 \alpha_2^3 \alpha_3^5 = 0$  und folglich

$$\alpha_2^1 = 0, \alpha_2^8 = 0, \alpha_2^9 = 0.$$

Damit  $W_5$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann

$$\alpha_5^7 \neq 0$$

sein und aus  $\alpha_6^5 \alpha_5^6 = 0$ ,  $\alpha_6^5 \alpha_5^7 \alpha_7^6 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_5^6 = 0, \alpha_7^6 = 0.$$

Wenn jetzt  $\alpha_7^4 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_4^6 \alpha_5^7 \alpha_7^4 = 0$ ,  $\alpha_4^6 \alpha_5^8 \alpha_7^4 = 0$  folgen:  $\alpha_4^6 = 0$ ,  $\alpha_7^4 = 0$ , worauf der Würfel  $W_4 - W_5 + W_6 - W_7$  gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_7^4 = 0.$$

Nach Satz 14 kann jetzt auch  $W_7$  an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt sein. Daher ist  $\alpha_7^1 \alpha_1^2 \alpha_2^7 = 0$ ,  $\alpha_7^5 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^9 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$  und folglich

$$\alpha_7^2 = 0, \alpha_7^5 = 0, \alpha_7^6 = 0.$$

Damit  $W_7$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt

$$\alpha_7^1 \neq 0$$

sein und aus  $\alpha_7^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_7^1 \alpha_1^2 \alpha_2^7 = 0$ ,  $\alpha_5^7 \alpha_1^1 \alpha_1^5 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_1^7 = 0, \quad \alpha_2^7 = 0, \quad \alpha_1^5 = 0.$$

Nun verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_2 + W_5 + W_7$  gegen Satz 1.

Die Annahme  $\alpha_6^5 \neq 0$  hat sich somit als unmöglich erwiesen. Folglich ist  $\alpha_6^5 = 0$  und die Figur (12.4) gewinnt das Aussehen

$$(12.5) \quad \begin{array}{l} W_4: \\ W_5: \\ W_6: \\ W_7: \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & \alpha_4^6, & , & 0, & 0 \\ , & 0, & 0 & , & 1, & , & , & , & \\ , & 0, & 0 & 0, & 0, & 1, & , & 0, & 0 \\ , & , & 0 & , & , & , & 1, & , & \end{array}$$

Wenn nun  $\alpha_6^1 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_4^6 \alpha_1^1 \alpha_1^4 = 0$ ,  $\alpha_6^1 \alpha_1^6 = 0$ ,  $\alpha_6^1 \alpha_1^2 \alpha_2^6 = 0$  folgen:  $\alpha_1^4 = 0$ ,  $\alpha_1^6 = 0$ ,  $\alpha_2^6 = 0$ , und dann würde der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_4 - W_6)$  wenigstens bei einem der beiden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen. Also ist

$$\alpha_6^1 = 0.$$

Damit  $W_6$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann

$$\alpha_6^7 \neq 0$$

sein und aus  $\alpha_6^7 \alpha_7^6 = 0$ ,  $\alpha_6^6 \alpha_6^7 \alpha_7^4 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_7^6 = 0, \quad \alpha_7^4 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_7^5 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^5 \alpha_5^7 = 0$ ,  $\alpha_7^5 \alpha_7^5 \alpha_5^6 = 0$  folgen:  $\alpha_5^7 = 0$ ,  $\alpha_5^6 = 0$ , und nach Satz 14 wäre dann  $W_5$  an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt. Daher wäre  $\alpha_5^1 \alpha_1^2 \alpha_2^5 = 0$ ,  $\alpha_5^6 \alpha_6^3 \alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_5^9 \alpha_9^3 \alpha_3^5 = 0$ ; also  $\alpha_5^1 = 0$ ,  $\alpha_5^6 = 0$ ,  $\alpha_5^9 = 0$ , und damit  $W_5$  nicht gegen Satz 5 verstieße, wäre weiter  $\alpha_5^4 \neq 0$ . Dann würde aber der Würfel  $W_4 + W_5 + W_6 - W_7$  gegen Satz 1 verstoßen. Daher muß

$$\alpha_5^4 = 0$$

sein und nach Satz 14 ist jetzt auch  $W_7$  an keinem von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus beteiligt. Daher ist  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^6 \alpha_6^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^9 \alpha_9^3 \alpha_3^7 = 0$  und folglich

$$\alpha_7^2 = 0, \quad \alpha_7^6 = 0, \quad \alpha_7^9 = 0.$$

Damit  $W_7$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt

$$\alpha_7^1 \neq 0$$

sein. Aus  $\alpha_7^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_6^7 \alpha_1^1 \alpha_1^6 = 0$  folgt dann weiter

$$\alpha_1^7 = 0, \quad \alpha_1^6 = 0,$$

so daß wegen Satz 14, angewandt auf den Würfel  $W_1$ , gewiß  $\alpha_1^r \neq 0$  sein muß für  $r = 4, 5, 8, 9$ ; also insbesondere

$$\alpha_1^4 \neq 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 + W_4 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1. Damit ist der Hilfssatz 5 bewiesen.

### § 13.

#### Das Verschwinden der dreigliedrigen Zyklen im $R_9$ . Station I.

Station I. In einer Grundfigur des  $R_9$  sind alle dreigliedrigen Zyklen gleich 0.

Beweis. Wir nehmen an, daß der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  von 0 verschieden sei. Dann erhält die Figur der letzten sechs Grundwürfel

$$(13.1) \quad \begin{array}{l} W_4: \alpha_1^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 \\ \dots\dots\dots \\ W_9: \alpha_9^1, \alpha_9^2, \alpha_9^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, \alpha_4^6, \alpha_4^7, \alpha_4^8, \alpha_4^9 \\ \alpha_5^4, 1, \alpha_5^6, \alpha_5^7, \alpha_5^8, \alpha_5^9 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_9^4, \alpha_9^5, \alpha_9^6, \alpha_9^7, \alpha_9^8, 1 \end{array} \right.$$

in jeder Spalte des links abgeteilten Rechtecks nach Hilfssatz 5 wenigstens fünf Nullen. Dann kann aber das rechts stehende Quadrat keinen von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklus enthalten. Denn wenn etwa  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^4 \neq 0$  wäre, so hätte man nach Satz 3 nebst Zusatz die Teilfigur

$$\begin{array}{l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, 0 \\ 0, 1, \alpha_5^6 \\ \alpha_6^4, 0, 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha_4^7, \alpha_4^8, \alpha_4^9 \\ \alpha_5^7, \alpha_5^8, \alpha_5^9 \\ \alpha_6^7, \alpha_6^8, \alpha_6^9 \end{array}$$

und diese würde nur dann keinen Widerspruch gegen Satz 14 aufweisen, wenn in dem linken Quadrat jede Zeile und Spalte genau ein von 0 verschiedenes  $\alpha_i^j$  enthielte (und das Quadrat rechts lauter von 0 verschiedene  $\alpha_i^j$ ). Dann würde aber diese Teilfigur nach entsprechender Umnummerierung genau das nach Satz 17 unmögliche Aussehen bekommen.

Das in (13.1) abgeteilte Quadrat enthält aber auch keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus. Denn wenn etwa  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^7 \alpha_7^4 \neq 0$  wäre, so hätte man nach Satz 3 nebst Zusatz die Teilfigur

$$\begin{array}{l} W_4: \alpha_4^1, \alpha_4^2, \alpha_4^3 \\ W_5: \alpha_5^1, \alpha_5^2, \alpha_5^3 \\ W_6: \alpha_6^1, \alpha_6^2, \alpha_6^3 \\ W_7: \alpha_7^1, \alpha_7^2, \alpha_7^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, \alpha_4^5, 0, 0 \\ 0, 1, \alpha_5^6, 0 \\ 0, 0, 1, \alpha_6^7 \\ \alpha_7^4, 0, 0, 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha_4^8, \alpha_4^9 \\ \alpha_5^8, \alpha_5^9 \\ \alpha_6^8, \alpha_6^9 \\ \alpha_7^8, \alpha_7^9 \end{array}$$

und da in jeder der vordersten drei Spalten höchstens ein von 0 verschiedenes  $\alpha_i^1$  vorkommt, würde der Würfel  $W_4 \pm W_5 \pm W_6 \pm W_7$  bei passender Vorzeichenwahl gegen Satz 1 verstoßen (vgl. die ausführliche Begründung dieser Schlußweise in I, S. 434, obere Hälfte).

Das Quadrat enthält aber auch keinen von 0 verschiedenen *fünf-* oder *sechsgliedrigen* Zyklus, wie man auf analoge Art noch rascher erkennt. Somit sind in dem Quadrat bei passender Numerierung der letzten sechs Koordinaten und Grundwürfel unterhalb der Diagonale lauter Nullen (vgl. die Schlußweise in I, S. 420), und nach Satz 14 können dann die Würfel  $W_8, W_9$  an keinen von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklen beteiligt sein. Damit  $W_9$  nicht gegen Satz 5 verstößt, können die Zahlen  $\alpha_0^1, \alpha_0^2, \alpha_0^3$  nicht alle gleich 0 sein. Nötigenfalls durch zyklische Umnummerierung der Indizes 1, 2, 3, wodurch der uns interessierende Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1$  in sich übergeht, können wir erreichen, daß speziell

$$\alpha_0^1 \neq 0$$

ist. Nach Hilfssatz 5 ist dann

$$\alpha_4^1 = 0, \alpha_5^1 = 0, \alpha_6^1 = 0, \alpha_7^1 = 0, \alpha_8^1 = 0$$

und aus  $\alpha_0^1 \alpha_1^2 = 0, \alpha_0^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_1^2 = 0, \alpha_2^3 = 0.$$

Die ersten drei bzw. letzten sechs Grundwürfel haben hiernach das Aussehen

$$\begin{array}{l|llllll} W_1: & 1, & \alpha_1^2, & 0 & & & \\ W_2: & 0, & 1, & \alpha_2^3 & & & \\ W_3: & \alpha_3^1, & 0, & 1 & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad 0 \\ , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad 0 \\ , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \end{array}$$

$$\begin{array}{l|llllll} W_4: & 0, & , & & & & \\ W_5: & 0, & , & & & & \\ W_6: & 0, & , & & & & \\ W_7: & 0, & , & & & & \\ W_8: & 0, & , & & & & \\ W_9: & \alpha_0^1, & , & & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \\ 0, \quad 1, \quad , \quad , \quad , \quad , \\ 0, \quad 0, \quad 1, \quad , \quad , \quad , \\ 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad , \quad , \\ 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad , \\ 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \end{array}$$

wobei die eingesetzten  $\alpha_i^1$  von 0 verschieden sind. Nach Satz 14 können  $W_7, W_8, W_9$  an keinen von 0 verschiedenen dreigliedrigen Zyklen beteiligt sein. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

$$\text{Fall I: } \alpha_1^2 \neq 0, \quad \text{Fall II: } \alpha_1^2 = 0.$$

Im Fall I folgt aus  $\alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3 = 0, \alpha_0^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3 = 0$ :

$$\alpha_2^3 = 0, \quad \alpha_3^1 = 0.$$

Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann

$$\alpha_8^2 \neq 0$$

sein, folglich nach Hilfssatz 5 u. a.

$$\alpha_8^2 = 0, \alpha_7^2 = 0, \alpha_9^2 = 0.$$

Wegen  $\alpha_3^2 \alpha_2^8 = 0$  ist ferner

$$\alpha_2^8 = 0$$

und sodann nach Satz 14, angewandt auf  $W_2$ , u. a.

$$\alpha_2^6 \neq 0, \alpha_2^7 \neq 0.$$

Aus  $\alpha_8^2 \alpha_2^8 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^6 \alpha_8^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^7 \alpha_8^8 = 0$  folgt dann weiter

$$\alpha_3^8 = 0, \alpha_8^8 = 0, \alpha_7^8 = 0.$$

Wenn jetzt  $\alpha_7^9 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^9 \alpha_3^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_7 - W_9)$  wenigstens bei einem der beiden Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Also ist

$$\alpha_7^9 = 0.$$

Damit  $W_7$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt

$$\alpha_7^3 \neq 0$$

sein und aus  $\alpha_7^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^3 \alpha_3^1 \alpha_1^7 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_3^7 = 0, \alpha_1^7 = 0.$$

Aus Satz 14, angewandt auf  $W_3$  und  $W_1$ , ergibt sich jetzt u. a.

$$\alpha_3^6 \neq 0, \alpha_1^6 \neq 0$$

und sodann aus  $\alpha_3^6 \alpha_8^3 = 0$ ,  $\alpha_7^3 \alpha_3^6 \alpha_8^7 = 0$ ,  $\alpha_3^1 \alpha_1^6 \alpha_8^9 = 0$  auch noch

$$\alpha_8^3 = 0, \alpha_8^7 = 0, \alpha_8^9 = 0.$$

Damit hat sich  $\alpha_8^r = 0$  für alle  $r \neq 6$  herausgestellt, so daß  $W_6$  gegen Satz 5 verstößt. Damit ist der Fall I als widerspruchsvoll nachgewiesen.

Im Fall II folgt zunächst aus Satz 14, angewandt auf  $W_1$ , u. a.

$$\alpha_1^7 \neq 0$$

und sodann aus  $\alpha_3^1 \alpha_1^7 \alpha_7^3 = 0$ ,  $\alpha_3^1 \alpha_1^7 \alpha_7^9 = 0$ :

$$\alpha_7^3 = 0, \alpha_7^9 = 0.$$

Wenn  $\alpha_7^8 = 0$ , so kommt man durch Rollentauschung der Indizes 7, 8 auf den Fall I zurück; also werden wir

$$\alpha_7^8 \neq 0$$

annehmen. Wenn nun  $\alpha_2^2 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_2^2 \alpha_2^2 = 0$ ,  $\alpha_7^2 \alpha_2^2 \alpha_2^7 = 0$  folgen:  $\alpha_2^2 = 0$ ,  $\alpha_2^7 = 0$ , so daß  $W_2$  gegen Satz 14 verstieße; also ist

$$\alpha_2^2 = 0.$$

Wenn  $\alpha_3^3 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_7^3 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$  folgen:  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_3^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_3 - W_7 + W_8$  gegen Satz 1 verstieße; also ist auch

$$\alpha_3^3 = 0.$$

Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt

$$\alpha_3^9 \neq 0$$

sein. Dann verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_7 + W_8 \pm W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1. Der Fall II ist also ebenfalls widerspruchsvoll und damit ist Station I bewiesen.

#### § 14.

##### Zwei allgemeine Sätze über viergliedrige Zyklen.

**Satz 18.** Wenn in einer Grundfigur des  $R_n$  alle dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind und wenn bei zwei Grundwürfeln außer dem Einser noch höchstens je zwei Koordinaten von 0 verschieden sind, so ist jeder viergliedrige Zyklus, an dem diese zwei Grundwürfel beteiligt sind, gleich 0.

**Beweis.** Wir dürfen annehmen, daß es sich um den Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  handelt. Wenn er von 0 verschieden wäre, so hätten die ersten vier Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$(14.1) \quad \begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha_1^5, \dots, \alpha_1^n \\ \alpha_2^5, \dots, \alpha_2^n \\ \alpha_3^5, \dots, \alpha_3^n \\ \alpha_4^5, \dots, \alpha_4^n \end{array} \right.$$

und das rechts abgeteilte Rechteck würde nach Voraussetzung zwei Zeilen enthalten, in denen höchstens je ein  $\alpha_i^n$  von 0 verschieden ist. Wäre das etwa die  $x$ -te und die  $\lambda$ -te Zeile und wären  $\rho, \sigma$  die beiden anderen Zeilenindizes, so würde der Würfel  $W_\rho - W_\sigma \pm W_x \pm W_\lambda$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen.

**Satz 19.** Wenn in einer Grundfigur des  $R_n$  alle dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind und wenn bei vier Grundwürfeln in  $n - 6$  Koordinatenspalten, deren Nummern von denen der Grundwürfel verschieden sind, höchstens je ein von 0 verschiedenes  $\alpha_i^n$  vorhanden ist, so ist jeder viergliedrige Zyklus, an dem diese vier Grundwürfel sämtlich beteiligt sind, gleich 0.

Beweis. Wir dürfen wieder annehmen, daß es sich um den Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  handelt. Wenn er von 0 verschieden wäre, so hätten die ersten vier Grundwürfel wieder das Aussehen (14. 1), wobei aber diesmal rechts vom Strich nach Voraussetzung höchstens zwei Koordinatenspalten wären, die mehr als ein von 0 verschiedenes  $\alpha_i^n$  enthalten. Dann würde aber der Würfel  $W_1 \pm W_2 \pm W_3 \pm W_4$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen (vgl. die ausführliche Begründung dieses Schlusses in I, S. 434).

## § 15.

Hilfssätze über viergliedrige Zyklen im  $R_9$ . Station II.

Hilfssatz 6. In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel

$$\begin{array}{l|l} W_1: 1, & \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: 0, & 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: 0, & 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: \alpha_4^1, & 0, 0, 1 \\ W_5: , & , , \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, , , \\ , \alpha_2^6, \alpha_2^7, , \\ \alpha_3^5, , \alpha_3^7, , \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 1, 0, 0, , , \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^n$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

Beweis. Nach Satz 2 und Station I ist

$$\begin{array}{lll} \alpha_5^1 \alpha_1^5 = 0, & \alpha_5^2 \alpha_2^5 = 0, & \alpha_5^3 \alpha_3^5 = 0, \quad \alpha_5^4 \alpha_4^5 = 0, \\ \alpha_6^1 \alpha_1^6 = 0, & \alpha_6^2 \alpha_2^6 = 0, & \alpha_6^4 \alpha_4^6 = 0, \\ \alpha_7^1 \alpha_1^7 = 0, & \alpha_7^2 \alpha_2^7 = 0, & \alpha_7^3 \alpha_3^7 = 0, \end{array}$$

woraus folgt:

$$\begin{array}{lll} \alpha_5^1 = 0, & \alpha_5^2 = 0, & \alpha_5^3 = 0, \quad \alpha_5^4 = 0, \\ \alpha_6^1 = 0, & \alpha_6^2 = 0, & \alpha_6^4 = 0, \\ \alpha_7^1 = 0, & \alpha_7^2 = 0, & \alpha_7^3 = 0. \end{array}$$

Wenn nun  $\alpha_5^8, \alpha_5^9$  beide gleich 0 wären, so würde  $W_5$  gegen Satz 5 verstoßen; da die Indizes 8, 9 gleichberechtigt auftreten, dürfen wir also  $\alpha_5^8 \neq 0$  annehmen. Da nun  $\alpha_3^1 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0, \alpha_3^2 \alpha_2^5 \alpha_5^8 = 0, \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$  und nach Satz 18, angewandt auf die zwei Grundwürfel  $W_4, W_5$ , auch  $\alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0$  ist, so ist weiter  $\alpha_3^1 = 0, \alpha_3^2 = 0, \alpha_3^5 = 0, \alpha_3^4 = 0$ , so daß die Grundwürfel  $W_5, \dots, W_8$  das folgende Aussehen haben:

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, & 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, & 0, , 0 \\ W_7: 0, & 0, 0, \\ W_8: 0, & , 0, 0 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1, 0, 0, \alpha_5^8 \\ \hline , 1, , \\ , , 1, \\ 0, , , 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (\alpha_5^9) \\ (\alpha_6^9) \\ (\alpha_7^9) \\ (\alpha_8^9) \end{array} \quad (\alpha_1^9 = 0 \text{ oder } \neq 0).$$

Nun kann das eingerahmte Quadrat nach Satz 19 keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, muß also in wenigstens einer Zeile drei Nullen haben (vgl. die Schlußweise in I, S. 420), so daß die folgenden drei Fälle zu unterscheiden sind:

## Fall I

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^8, \\ W_6: 0, 0, , 0 & 0, 1, 0, 0, \\ W_7: 0, 0, 0, & , 1, , \\ W_8: 0, , 0, 0 & 0, , , 1, \end{array}$$

## Fall II

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^8, \\ W_6: 0, 0, , 0 & , 1, , , \\ W_7: 0, 0, 0, & 0, 0, 1, 0, \\ W_8: 0, , 0, 0 & 0, , , 1, \end{array}$$

## Fall III

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^8, \\ W_6: 0, 0, , 0 & , 1, , , \\ W_7: 0, 0, 0, & , , 1, , \\ W_8: 0, , 0, 0 & 0, 0, 0, 1, \end{array}$$

Im Fall I ist nach Satz 18  $\alpha_5^3 \alpha_5^4 \alpha_1^1 \alpha_1^6 = 0$ , also  $\alpha_5^3 = 0$ . Damit  $W_6$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann  $\alpha_6^9 \neq 0$  sein. Da nun  $\alpha_5^6 \alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_5^2 \alpha_2^6 \alpha_6^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_5^4 \alpha_1^1 \alpha_1^6 \alpha_6^9 = 0$  ist, so folgt  $\alpha_5^6 = 0$ ,  $\alpha_1^6 = 0$ ,  $\alpha_2^6 = 0$ ,  $\alpha_3^6 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^8, \\ W_6: 0, 0, 0, 0 & 0, 1, 0, 0, \alpha_6^9 \\ W_7: 0, 0, 0, & , , 1, , \\ W_8: 0, , 0, 0 & 0, , , 1, \\ W_9: 0, 0, , 0 & , 0, , , 1. \end{array}$$

Hier kann das rechts abgeteilte Quadrat keinen von 0 verschiedenen vier- oder fünfgliedrigen Zyklus enthalten (vier- wegen Satz 19, fünf-, weil bei Annahme des Gegenteils der Würfel  $W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9$  mit Rücksicht auf Satz 3 nebst Zusatz gegen Satz 1 verstößt). Also müssen in wenigstens einer Zeile des Quadrats vier Nullen stehen. Stehen sie bei  $W_7$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_1^4 \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_2^7 = 0$ , also  $\alpha_1^4 = 0$ , so daß  $W_7$  gegen Satz 5 verstößt. Stehen die Nullen bei  $W_8$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_2^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$ , also  $\alpha_2^2 = 0$ , so daß  $W_8$  gegen Satz 5 verstößt. Stehen die Nullen bei  $W_9$ , so muß, damit  $W_9$  nicht gegen Satz 5 verstößt,  $\alpha_3^3 \neq 0$  sein. Weil dann  $\alpha_5^3 \alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_5^4 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_5^3 \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^9 = 0$  ist, folgt dann aber  $\alpha_5^3 = 0$ ,  $\alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_1^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_3 + W_4 + W_6 + W_9$  gegen Satz 1 verstößt. Fall I ist daher unmöglich.

Im Fall II ist nach Satz 18  $\alpha_7^4 \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_2^7 = 0$ , also  $\alpha_7^4 = 0$ , und damit  $W_7$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann  $\alpha_7^9 \neq 0$  sein. Aus  $\alpha_3^2 \alpha_7^2 \alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_7^3 \alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_7^9 = 0$  folgt nun  $\alpha_3^2 = 0$ ,  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{l|l} W_5: & 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad \alpha_5^3, \\ W_6: & 0, \quad 0, \quad , \quad 0 \quad | \quad , \quad 1, \quad , \quad , \\ W_7: & 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \alpha_7^9 \\ W_8: & 0, \quad , \quad 0, \quad 0 \quad | \quad 0, \quad , \quad , \quad 1, \\ W_9: & , \quad 0, \quad 0, \quad , \quad | \quad , \quad , \quad 0, \quad , \quad 1, \end{array}$$

wo in dem abgetheilten Quadrat wieder kein von 0 verschiedener Zyklus enthalten sein kann, so daß in wenigstens einer Zeile des Quadrats vier Nullen stehen müssen. Stehen sie bei  $W_6$ , so liegt der erledigte Fall I vor. Stehen sie bei  $W_8$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_3^2 \alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^8 = 0$ , also  $\alpha_3^2 = 0$ , so daß  $W_8$  gegen Satz 5 verstößt. Stehen die Nullen bei  $W_9$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_7^2 \alpha_7^9 = 0$ , also  $\alpha_3^1 = 0$ , und damit  $W_9$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann  $\alpha_3^9 \neq 0$  sein. Da nun  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^4 \alpha_1^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_1^4 \alpha_1^7 = 0$  ist, so folgt  $\alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_2^2 = 0$ ,  $\alpha_1^7 = 0$ . Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_2 + W_4 + W_7 + W_9$  gegen Satz 1. Fall II ist also ebenfalls unmöglich.

Im Fall III ist nach Satz 18  $\alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_3^8 = 0$ , also  $\alpha_3^2 = 0$ , und damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann  $\alpha_3^9 \neq 0$  sein. Da nun  $\alpha_3^2 \alpha_3^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^1 \alpha_1^5 \alpha_3^8 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^8 \alpha_3^9 = 0$  ist, so folgt  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^1 = 0$ ,  $\alpha_3^3 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{l|l} W_5: & 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad \alpha_5^8, \\ W_6: & 0, \quad 0, \quad , \quad 0 \quad | \quad , \quad 1, \quad , \quad , \\ W_7: & 0, \quad 0, \quad 0, \quad , \quad | \quad , \quad , \quad 1, \quad , \\ W_8: & 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad \alpha_2^9 \\ W_9: & 0, \quad , \quad 0, \quad , \quad | \quad , \quad , \quad , \quad 0, \quad 1, \end{array}$$

wo in dem Quadrat wieder in wenigstens einer Zeile vier Nullen stehen müssen. Stehen sie bei  $W_6$  oder  $W_7$ , so liegt der erledigte Fall I bzw. II vor; also stehen sie bei  $W_9$ . Da nun  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^4 \alpha_1^5 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^2 \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^8 = 0$  ist, so folgt, falls  $\alpha_3^4 \neq 0$  sein sollte,  $\alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_1^8 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 + W_4 + W_5 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstößt. Daher ist<sup>2)</sup>  $\alpha_3^4 = 0$ , und damit  $W_9$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann  $\alpha_3^9 \neq 0$  sein. Da nun  $\alpha_3^2 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_2^2 \alpha_3^8 = 0$  und nach Satz 18

<sup>2)</sup> Der leitende Gedanke bei diesem Nachweis der Gleichung  $\alpha_3^4 = 0$  ist der: Man nimmt  $\alpha_3^4 \neq 0$  an und sucht sich einen Zyklus, in dem  $\alpha_3^4$  vorkommt und in dem alle anderen Faktoren gewiß von 0 verschieden sind; ein solcher Zyklus ist hier

auch  $\alpha_3^9 \alpha_5^2 \alpha_2^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_5^2 \alpha_3^9 \alpha_2^3 \alpha_2^5 = 0$  ist, so folgt  $\alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_2^5 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 - W_3 + W_5 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstößt. Daher ist auch Fall III unmöglich, womit der Hilfssatz 6 bewiesen ist.

**Hilfssatz 7.** *In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel ( $W_3$  und  $W_6$  sind ausgelassen)*

$$\begin{array}{l|l} W_1: 1, & \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: 0, & 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: 0, & 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: \alpha_4^1, & 0, 0, 1 \\ W_7: , & , , \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, , , \\ , \alpha_2^6, \alpha_2^7, , \\ \alpha_3^5, , \alpha_3^7, , \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 1, , , \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^j$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

**Beweis.** Wie beim Beweis von Hilfssatz 6 folgt zunächst

$$\begin{aligned} \alpha_5^1 &= 0, \quad \alpha_5^2 = 0, \quad \alpha_5^3 = 0, \quad \alpha_5^4 = 0, \\ \alpha_6^1 &= 0, \quad \alpha_6^2 = 0, \quad \alpha_6^3 = 0, \\ \alpha_7^1 &= 0, \quad \alpha_7^2 = 0, \quad \alpha_7^3 = 0. \end{aligned}$$

$\alpha_4^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_5^5$ . Nun baut man die an diesem Zyklus beteiligten Grundwürfel auf (Koordinaten in zweckmäßiger Reihenfolge):

$$\begin{array}{l|l} W_3: 1, \alpha_3^4, , , & , 0, 0, 0 \\ W_4: , 1, \alpha_4^1, , & 0, 0, 0, 0 \\ W_1: , , 1, \alpha_1^2, & \alpha_1^5, 0, \alpha_1^6, \\ W_5: , , , 1, \alpha_5^5 & 0, 0, 0, 0 \\ W_6: \alpha_6^5, , , , 1 & 0, 0, 0, 0. \end{array}$$

Die Nullen rechts vom Strich sind alle als solche bekannt. Nun verstößt der Würfel  $W_1 \pm W_4 \pm W_5 \pm W_6 - W_3$  bei beliebigen Vorzeichen gegen Satz 1, falls die leeren Plätze links vom Strich durch Nullen zu besetzen sind. Nun ist das von den meisten Plätzen bereits bekannt. Die  $\alpha_i^j$  der anderen Plätze kommen als Faktoren in Zyklen mit weniger als fünf Gliedern vor und man muß zunächst ihr Verschwinden durch eine vorausgehende analoge Betrachtung feststellen; das ist im Text geschehen. Diese Überlegung hat schon vorher in einfacheren Fällen als Wegweiser gedient und in den noch kommenden komplizierteren Fällen liegt sie ebenfalls stets dem Textbeweis zugrunde. Vielfach kommt man allerdings mit dem nächstgelegenen Zyklus nicht aus, weil dann rechts vom Strich nicht genügend viele Nullen bekannt sind. Dann muß man sich erst einen passenden Zyklus verschaffen, wodurch einige Beweise recht umständlich erscheinen. Dafür werden wir links vom Strich den Nachweis der einen oder anderen Null gelegentlich ersparen können. Im gegenwärtigen Fall würde z. B. der Würfel  $W_1 + W_4 \pm W_5 - W_6 - W_3$  auch schon dann gegen Satz 1 verstoßen, wenn nicht bekannt wäre, daß  $\alpha_4^1 = 0$  ist.

Wenn nun  $\alpha_7^8, \alpha_7^9$  beide gleich 0 wären, so wäre nach Satz 18  $\alpha_7^4 \alpha_1^2 \alpha_1^7 = 0$ , also auch  $\alpha_7^4 = 0$ , so daß  $W_7$  gegen Satz 5 verstieße. Daher dürfen wir etwa  $\alpha_7^8 \neq 0$  annehmen. Aus  $\alpha_3^2 \alpha_7^8 = 0, \alpha_3^3 \alpha_7^8 = 0, \alpha_7^2 \alpha_7^8 = 0$  folgt dann weiter  $\alpha_3^2 = 0, \alpha_3^3 = 0, \alpha_7^2 = 0$ , so daß die Grundwürfel  $W_5, \dots, W_8$  das folgende Aussehen haben:

$$\begin{array}{llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1, & , & , & \\ \hline \end{array} & (\alpha_5^9) \\ W_6: & 0, & 0, & , & 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline , & 1, & , & \\ \hline \end{array} & (\alpha_6^9) \\ W_7: & 0, & 0, & 0, & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0, & 0, & 1, & \alpha_7^8 \\ \hline \end{array} & (\alpha_7^9) \\ W_8: & , & 0, & 0, & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline , & , & 0, & 1 \\ \hline \end{array} & (\alpha_8^9) \end{array} \quad (\alpha_1^9 = 0 \text{ oder } \neq 0).$$

Nach Satz 19 kann das eingerahmte Quadrat keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, muß also in wenigstens einer Zeile drei Nullen haben. Diese können aber nicht bei  $W_8$  stehen, weil sonst eine nach Hilfssatz 6 unmögliche Grundfigur vorliegen würde. Somit bleiben nur die folgenden beiden Fälle:

## Fall I

$$\begin{array}{ll} W_5: & 0, 0, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, , 0 \\ W_7: & 0, 0, 0, \\ W_8: & , 0, 0, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1, & , & , & \\ \hline 0, & 1, & 0, & 0, \\ \hline 0, & 0, & 1, & \alpha_7^8 \\ \hline , & , & 0, & 1, \\ \hline \end{array}$$

## Fall II

$$\begin{array}{ll} W_5: & 0, 0, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, , 0 \\ W_7: & 0, 0, 0, \\ W_8: & , 0, 0, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1, & , & , & \\ \hline , & 1, & , & \\ \hline 0, & 0, & 1, & \alpha_7^8 \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1, \\ \hline \end{array}$$

Im Fall I ist nach Satz 18  $\alpha_3^2 \alpha_3^4 \alpha_1^9 = 0$ , also  $\alpha_3^2 = 0$ . Damit  $W_6$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann  $\alpha_6^9 \neq 0$  sein. Da nun  $\alpha_3^6 \alpha_6^9 = 0, \alpha_1^4 \alpha_1^9 \alpha_6^9 = 0, \alpha_3^5 \alpha_2^6 \alpha_6^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^6 \alpha_1^4 \alpha_1^9 \alpha_6^9 = 0$  ist, so folgt  $\alpha_6^9 = 0, \alpha_3^1 = 0, \alpha_3^2 = 0, \alpha_3^4 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{ll} W_5: & 0, 0, 0, 0 \\ W_6: & 0, 0, 0, 0 \\ W_7: & 0, 0, 0, \\ W_8: & , 0, 0, \\ W_9: & 0, 0, , 0 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1, & , & , & \\ \hline 0, & 1, & 0, & 0, \alpha_6^9 \\ \hline 0, & 0, & 1, & \alpha_7^8 \\ \hline , & , & 0, & 1, \\ \hline , & 0, & , & 1, \\ \hline \end{array}$$

wo das abgeteilte Quadrat wieder keinen von 0 verschiedenen Zyklus enthalten kann, also in wenigstens einer Zeile vier Nullen hat. Stehen die Nullen bei  $W_5$ , so verstößt  $W_5$  gegen Satz 5. Stehen sie bei  $W_6$ , so ist zunächst  $\alpha_3^2 = 0$ ; denn andernfalls würde aus  $\alpha_3^1 \alpha_1^8 = 0, \alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0, \alpha_7^8 \alpha_3^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^8 = 0, \alpha_2^8 = 0, \alpha_1^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Damit  $W_6$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt  $\alpha_2^4 \neq 0$  sein. Da nun  $\alpha_3^4 \alpha_1^5 \alpha_1^8 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0, \alpha_7^8 \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^7 = 0$  ist, so folgt weiter  $\alpha_1^1 = 0, \alpha_2^8 = 0, \alpha_1^7 = 0$ .

worauf der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_4 - W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt. Die vier Nullen können also nicht bei  $W_8$  stehen. Stehen sie aber bei  $W_9$ , so ist, damit  $W_9$  nicht gegen Satz 5 verstößt,  $\alpha_9^3 \neq 0$ . Da nun  $\alpha_9^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_9^3 \alpha_3^4 \alpha_1^9 = 0$  ist, so folgt  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_1^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_3 + W_4 + W_6 + W_9$  gegen Satz 1 verstößt. Der Fall I ist damit als unmöglich erkannt.

Im Fall II ist zunächst  $\alpha_9^1 = 0$ ; denn andernfalls würde aus  $\alpha_1^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_1^1 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_2^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_1^7 = 0$ , und dann würde der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen. Wäre nun  $\alpha_3^4 \neq 0$ , so wäre, weil  $\alpha_3^4 \alpha_1^4 \alpha_1^8 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_2^8 \alpha_3^4 \alpha_1^4 \alpha_1^7 = 0$  ist,  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_1^7 = 0$ , und aus  $W_1 - W_2 + W_4 \pm W_7$  würde dann bei passendem Vorzeichen weiter folgen:  $\alpha_7^4 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_4 + W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Also ist  $\alpha_3^4 = 0$ . Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt  $\alpha_9^3 \neq 0$ , also  $\alpha_3^9 = 0$  sein. Wäre dann  $\alpha_3^7 \neq 0$  für  $v = 2$  oder  $3$ , so würde aus  $\alpha_3^7 \alpha_7^9 = 0$  folgen:  $\alpha_7^9 = 0$ , und dann würde die Ungleichung  $\alpha_3^7 \alpha_7^8 \alpha_2^9 \neq 0$  dem Satz 18 widersprechen. Also ist  $\alpha_3^7 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, , 0 \\ W_7: 0, 0, 0, \\ W_8: 0, 0, 0, 0 \\ W_9: , 0, 0, \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, , , , \\ , 1, , , , \\ 0, 0, 1, \alpha_7^8, \\ 0, 0, 0, 1, \alpha_2^9 \\ , , , 0, 1, \end{array} \right.$$

wo das abgeteilte Quadrat wieder in einer Zeile vier Nullen haben muß. Stehen die Nullen bei  $W_5$ , so verstößt  $W_5$  gegen Satz 5. Stehen sie bei  $W_6$ , so liegt der erledigte Fall I vor. Also stehen die Nullen bei  $W_9$ . Dann ist  $\alpha_1^1 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_1^1 \alpha_1^8 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^9 \alpha_1^4 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_2^9 \alpha_1^7 = 0$ . Wenn daher  $\alpha_3^1 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_1^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 + W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_9^1 = 0,$$

und damit  $W_9$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann

$$\alpha_9^4 \neq 0$$

sein. Nun ist  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^8 = 0$ , also

$$\alpha_1^9 = 0, \alpha_2^9 = 0, \alpha_1^8 = 0.$$

Aus  $W_1 - W_2 + W_4 + W_8 + W_9$  folgt dann weiter

$$\alpha_2^8 = 0.$$

Wenn  $\alpha_7^4 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^4 \alpha_1^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 + W_4 + W_7$  gegen Satz 1 verstieße; also ist

$$\alpha_7^4 = 0.$$

Nach Satz 18 ist jetzt  $\alpha_7^9 \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^7 = 0$ . Wenn daher  $\alpha_1^7 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_7^9 = 0$  und der Würfel  $W_1 + W_4 + W_7 + W_8 + W_9$  würde gegen Satz 1 verstoßen. Also ist  $\alpha_1^7 = 0$ , womit aber der Würfel  $W_1 - W_2 + W_4 + W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstößt. Der Fall II ist also ebenfalls unmöglich, womit der Hilfsatz 7 bewiesen ist.

**Hilfsatz 8.** In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel ( $W_5$  ist ausgelassen)

$$\begin{array}{lcl} W_1: & 1, & \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: & 0, & 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: & 0, & 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: & \alpha_4^1, & 0, 0, 1 \\ W_6: & , & , , \end{array} \quad \left| \begin{array}{lcl} \alpha_1^5, & \alpha_1^6, & , \\ , & \alpha_2^6, & \alpha_2^7, \\ \alpha_3^5, & , & \alpha_3^7, \\ 0, & 0, & 0, 0, 0 \\ 0, & 1, & 0, , \end{array} \right.$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^j$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_1^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

**Beweis.** Wie beim Beweis von Hilfsatz 6 ist zunächst wieder

$$\alpha_3^1 = 0, \alpha_5^2 = 0, \alpha_5^3 = 0, \alpha_5^4 = 0,$$

$$\alpha_5^1 = 0, \alpha_6^2 = 0, \alpha_6^4 = 0,$$

$$\alpha_7^1 = 0, \alpha_7^2 = 0, \alpha_7^3 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_6^3 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_6^3 \alpha_3^5 \alpha_5^6 = 0$ ,  $\alpha_6^3 \alpha_7^7 \alpha_7^6 = 0$  folgen:  $\alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_7^6 = 0$ . Außerdem müßte natürlich  $\alpha_7^5 \alpha_7^6 = 0$ , also eine der Zahlen  $\alpha_7^5$ ,  $\alpha_7^6$  gleich 0 sein, so daß eine nach Hilfsatz 6 bzw. 7 unmögliche Grundfigur entstehen würde. Also ist  $\alpha_6^3 = 0$ . Damit  $W_6$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann etwa  $\alpha_6^5 \neq 0$  sein. Da nun  $\alpha_3^1 \alpha_1^6 \alpha_6^5 = 0$ ,  $\alpha_3^2 \alpha_2^6 \alpha_6^5 = 0$ ,  $\alpha_3^5 \alpha_6^6 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^6 \alpha_6^5 = 0$  ist, so folgt:  $\alpha_1^1 = 0$ ,  $\alpha_2^2 = 0$ ,  $\alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_6^5 = 0$ ,  $\alpha_6^4 = 0$ . Die Grundwürfel  $W_5, \dots, W_8$  haben daher das Aussehen

$$\begin{array}{lcl} W_5: & 0, 0, 0, 0 & \begin{array}{|c|} \hline 1, , , \\ \hline \end{array} & (\alpha_5^9) \\ W_6: & 0, 0, 0, 0 & \begin{array}{|c|} \hline 0, 1, 0, \alpha_6^8 \\ \hline \end{array} & (\alpha_6^9) \\ W_7: & 0, 0, 0, & \begin{array}{|c|} \hline , , 1, \\ \hline \end{array} & (\alpha_7^9) \\ W_8: & 0, 0, , 0 & \begin{array}{|c|} \hline , 0, , 1 \\ \hline \end{array} & (\alpha_8^9) \end{array} \quad (\alpha_1^9 = 0 \text{ oder } \neq 0).$$

Nach Satz 19 kann das eingerahmte Quadrat wieder keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, muß also in einer Zeile drei Nullen haben.

und zwar, damit nicht eine nach Hilfssatz 6 oder 7 unmögliche Grundfigur vorliegt, in der letzten Zeile. Nun ist  $\alpha_3^3 \alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^3 \alpha_3^3 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_1^3 = 0$ . Wenn also  $\alpha_3^3 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_1^3 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_3 + W_4 \pm (W_6 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Also ist  $\alpha_3^3 = 0$ . Damit  $W_8$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß jetzt  $\alpha_3^9 \neq 0$  sein. Da  $\alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^1 \alpha_1^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0$  ist, so folgt weiter  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_1^3 = 0$ ,  $\alpha_3^3 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{l|llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & , & , & , \\ W_6: & 0, & 0, & 0, & 0 & 0, & 1, & 0, & \alpha_3^3, \\ W_7: & 0, & 0, & 0, & & , & , & 1, & , \\ W_8: & 0, & 0, & 0, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1, \alpha_3^9 \\ W_9: & 0, & 0, & , & & , & , & , & 0, 1, \end{array}$$

wo nun das abgeteilte Quadrat wieder in einer Zeile vier Nullen enthalten muß. Bei  $W_5$  oder  $W_7$  können die Nullen nach Hilfssatz 6 bzw. 7 nicht stehen, also stehen sie bei  $W_9$ . Alsdann ist  $\alpha_3^4 \alpha_1^3 \alpha_1^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^3 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_1^3 = 0$ . Wenn daher  $\alpha_3^4 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_1^3 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_1^3 = 0$ , womit der Würfel  $W_1 + W_4 + W_6 + W_8 + W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Also ist

$$\alpha_3^4 = 0.$$

Damit  $W_9$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann

$$\alpha_3^3 \neq 0$$

sein. Da nun  $\alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_1^3 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0$ , so ist

$$\alpha_3^9 = 0, \alpha_3^3 = 0, \alpha_1^3 = 0, \alpha_3^3 = 0$$

und aus  $W_1 - W_3 + W_4 + W_8 + W_9$  folgt weiter

$$\alpha_1^3 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_3 + W_4 + W_6 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1, womit der Hilfssatz 8 bewiesen ist.

**Station II.** Wenn in einer Grundfigur des  $R_9$  ein Grundwürfel außer dem Einsen nur noch eine von 0 verschiedene Koordinate hat, so ist jeder viergliedrige Zyklus, an dem dieser Grundwürfel beteiligt ist, gleich 0.

**Beweis.** Wir nehmen etwa an, daß der Grundwürfel  $W_4$  die Voraussetzung erfüllt und daß der Zyklus  $\alpha_1^3 \alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_1^3$  doch von 0 verschieden ist.

Dann haben die ersten vier Grundwürfel das Aussehen

$$\begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0, , , , , \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0, , , , , \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4, , , , , \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0. \end{array}$$

Damit nun die Würfel

$$W_1 - W_2 + W_3 + W_4, \quad W_1 + W_2 - W_3 + W_4, \quad -W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

nicht gegen Satz 1 verstoßen, muß etwa

$$\begin{aligned} \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 &= 1, \quad \text{also } \alpha_1^5 \neq 0, \alpha_3^5 \neq 0, \\ \alpha_1^6 + \alpha_2^6 - \alpha_3^6 &= 1, \quad \text{also } \alpha_1^6 \neq 0, \alpha_2^6 \neq 0, \\ -\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \alpha_3^7 &= 1, \quad \text{also } \alpha_2^7 \neq 0, \alpha_3^7 \neq 0 \end{aligned}$$

sein, so daß man folgendes Bild erhält:

$$\begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1 \\ W_5: , , , \\ W_6: , , , \\ W_7: , , , \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, , , \\ , \alpha_2^6, \alpha_2^7, , \\ \alpha_3^5, , \alpha_3^7, , \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ \hline 1, , , , \\ , 1, , , \\ , , 1, , \end{array} \right.$$

Nun muß in dem eingerahmten Quadrat, weil alle dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, wenigstens eine Zeile zwei Nullen enthalten. Je nachdem das die erste oder zweite oder dritte Zeile ist, liegt aber eine Grundfigur vor, die nach Hilfssatz 6 oder 8 oder 7 unmöglich ist.

### § 16.

Weitere Hilfssätze über viergliedrige Zyklen im  $R_9$ . Station III.

Hilfssatz 9. In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel

$$\begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1 \\ W_5: , , , \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, , , \\ , \alpha_2^6, \alpha_2^7, , \\ \alpha_3^5, , \alpha_3^7, , \\ , , , , \\ 1, 0, 0, , , \end{array} \right.$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^r$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

**Beweis.** Wie beim Beweis von Hilfssatz 6 fordern die fünf Grundwürfel die folgende Ergänzung:

$$\begin{array}{ll}
 W_5: 0, 0, 0, 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1, & 0, & 0, & \alpha_5^3 \\ \hline \end{array} & (\alpha_5^3) \\
 W_6: 0, 0, , 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline , & 1, & , & \\ \hline \end{array} & (\alpha_6^3) \\
 W_7: 0, 0, 0, & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline , & , & 1, & \\ \hline \end{array} & (\alpha_7^3) \\
 W_8: 0, , 0, & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0, & , & , & 1 \\ \hline \end{array} & (\alpha_8^3)
 \end{array} \quad (\alpha^3 = 0 \text{ oder } \neq 0).$$

Dagegen können wir nicht wie damals schließen, daß auch  $\alpha_5^4 = 0$  ist. Aber auch so kann das eingerahmte Quadrat nach Satz 19 keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, muß also in einer Zeile drei Nullen haben. Das gibt die folgenden drei Fälle:

Fall I

$$\begin{array}{l|l}
 W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^3, \\
 W_6: 0, 0, , 0 & 0, 1, 0, 0, \\
 W_7: 0, 0, 0, & , , 1, , \\
 W_8: 0, , 0, & 0, , , 1,
 \end{array}$$

Fall II

$$\begin{array}{l|l}
 W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^3, \\
 W_6: 0, 0, , 0 & , 1, , , \\
 W_7: 0, 0, 0, & 0, 0, 1, 0, \\
 W_8: 0, , 0, & 0, , , 1,
 \end{array}$$

Fall III

$$\begin{array}{l|l}
 W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^3, \\
 W_6: 0, 0, , 0 & , 1, , , \\
 W_7: 0, 0, 0, & , , 1, , \\
 W_8: 0, , 0, & 0, 0, 0, 1,
 \end{array}$$

Im Fall I müßte, wenn  $\alpha_5^3 = 0$  wäre, wegen Satz 5  $\alpha_5^3 \neq 0$  sein, und dann würde der Zyklus  $\alpha_5^3 \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_5^3$  gegen Station II verstoßen. Daher ist  $\alpha_5^3 \neq 0$ . Aus  $\alpha_5^1 \alpha_5^6 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_5^2 \alpha_5^6 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_5^6 \alpha_5^9 = 0$  folgt dann  $\alpha_5^1 = 0$ ,  $\alpha_5^2 = 0$ ,  $\alpha_5^6 = 0$ , und man erhält das Bild

$$\begin{array}{l|l}
 W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, 0, 0, \alpha_5^3, \\
 W_6: 0, 0, , 0 & 0, 1, 0, 0, \alpha_6^3 \\
 W_7: 0, 0, 0, & , , 1, , \\
 W_8: 0, , 0, & 0, , , 1, \\
 W_9: 0, 0, , & , 0, , , 1.
 \end{array}$$

Wenn nun  $\alpha_5^3 = 0$ , so kann das abgeteilte Quadrat nach Satz 19 keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten. Wenn aber  $\alpha_5^3 \neq 0$ , so muß wegen  $\alpha_5^3 \alpha_5^6 \alpha_5^9 = 0$  gewiß  $\alpha_5^6 = 0$  sein, so daß  $W_5$  nach Station II an keinem von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt ist; daher ist  $\alpha_5^4 \alpha_1^1 \alpha_5^8 = 0$ ,

also  $\alpha_8^4 = 0$ , und jetzt können auch  $W_6, W_7, W_8, W_9$  nicht an ein und demselben von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt sein, weil sonst der Würfel  $W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstößt<sup>4)</sup>. In dem abgeteilten Quadrat müssen hiernach auf jeden Fall alle viergliedrigen Zyklen gleich 0 sein; sodann aber auch alle fünfgliedrigen, weil sonst der Würfel  $W_6 + W_6 + W_7 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt<sup>5)</sup>. Daher müssen in einer Zeile des Quadrats vier Nullen stehen. Stehen sie bei  $W_7$ , so ist wegen Satz 5  $\alpha_7^4 \neq 0$  und dann verstößt der Zyklus  $\alpha_7^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 \alpha_2^7$  gegen Station II. Stehen sie bei  $W_8$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_2^5 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_1^5 \alpha_2^8 = 0$ ; also  $\alpha_3^2 = 0, \alpha_3^4 = 0$ , so daß  $W_8$  gegen Satz 5 verstößt. Also stehen die vier Nullen bei  $W_9$ .

Nach Satz 18 ist dann  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_3^9 = 0$ , also

$$\alpha_3^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^2 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0, \alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^9 = 0, \alpha_3^3 \alpha_3^7 \alpha_3^9 = 0, \alpha_3^3 \alpha_3^3 \alpha_3^8 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_3^9 = 0, \alpha_3^8 = 0, \alpha_7^9 = 0, \alpha_3^8 = 0.$$

Nunmehr ist Station II auf  $W_8$  und  $W_9$  anwendbar; daher ist  $\alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_2^5 \alpha_3^8 = 0, \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^5 \alpha_3^8 = 0, \alpha_3^5 \alpha_3^9 \alpha_3^8 \alpha_3^8 = 0, \alpha_7^6 \alpha_3^9 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$ ; also

$$\alpha_3^8 = 0, \alpha_3^4 = 0, \alpha_3^9 = 0, \alpha_7^8 = 0.$$

Nun sind  $\alpha_7^5, \alpha_7^8$  nicht beide gleich 0, weil sonst der bereits erledigte Fall vorläge, daß in dem Quadrat vier Nullen bei  $W_7$  stehen. Wegen  $\alpha_7^5 \alpha_3^5 \alpha_3^7 = 0, \alpha_7^8 \alpha_3^7 = 0$  ist daher

$$\alpha_7^5 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^5 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_3 + W_5 - W_6 - W_8 - W_9$  gegen Satz 1. Der Fall I ist damit als unmöglich nachgewiesen.

Im Fall II müßte, wenn  $\alpha_7^9 = 0$  wäre, wegen Satz 5  $\alpha_7^4 \neq 0$  sein, und dann würde der Zyklus  $\alpha_7^4 \alpha_1^1 \alpha_1^2 \alpha_2^7$  gegen Station II verstoßen. Daher ist  $\alpha_7^9 \neq 0$ . Aus  $\alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_7^9 = 0, \alpha_3^2 \alpha_2^5 \alpha_7^9 = 0, \alpha_3^7 \alpha_7^9 = 0$  folgt dann  $\alpha_3^2 = 0, \alpha_3^5 = 0, \alpha_3^7 = 0$ , und man erhält das Bild

$$\begin{array}{l|llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & \alpha_3^8, \\ W_6: & 0, & 0, & , & 0 & , & 1, & , & , \\ W_7: & 0, & 0, & 0, & , & 0, & 0, & 1, & 0, \alpha_7^9 \\ W_8: & 0, & , & 0, & & 0, & , & , & 1, \\ W_9: & , & 0, & 0, & & , & , & 0, & , 1, \end{array}$$

<sup>4)</sup> Man sieht das sofort, wenn man unter Annahme des Gegenteils diese vier Grundwürfel gemäß Satz 3 nebst Zusatz aufbaut. Analog ist später noch mehrfach zu verfahren, auch mit mehr als vier Grundwürfeln.

<sup>5)</sup> Vgl. den Schlußsatz von Fußnote <sup>4)</sup>.

wo nun das abgeteilte Quadrat wieder keinen von 0 verschiedenen Zyklus enthalten kann (wegen Satz 19 und wegen  $W_5 + W_6 + W_7 - W_8 \pm W_9$ ). Daher müssen in einer Zeile des Quadrats vier Nullen stehen. Stehen sie bei  $W_6$ , so liegt der erledigte Fall I vor. Stehen sie bei  $W_8$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_2^3 \alpha_3^3 \alpha_5^3 = 0$ ,  $\alpha_2^4 \alpha_1^1 \alpha_3^3 = 0$ ; also  $\alpha_2^3 = 0$ ,  $\alpha_2^4 = 0$ , so daß  $W_8$  gegen Satz 5 verstößt. Also stehen die vier Nullen bei  $W_9$ .

Nach Satz 18 ist dann  $\alpha_2^1 \alpha_1^2 \alpha_7^9 = 0$ ; also

$$\alpha_2^1 = 0 \text{ und folglich } \alpha_2^4 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Nun ist  $\alpha_2^4 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_2^9 \alpha_7^4 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_2^4 \alpha_1^1 \alpha_1^9 = 0$  und nach Station II, angewandt auf  $W_9$ , auch  $\alpha_7^9 \alpha_4^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_2^4 \alpha_1^1 \alpha_1^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_2^4 \alpha_1^1 \alpha_1^6 \alpha_6^9 = 0$ ; also

$$\alpha_1^9 = 0, \alpha_1^7 = 0, \alpha_1^5 = 0, \alpha_1^6 = 0, \alpha_5^9 = 0, \alpha_6^9 = 0.$$

Nunmehr ist Station II auch auf  $W_8$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_2^2 \alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_2^3 \alpha_1^1 \alpha_1^5 \alpha_3^8 = 0$ ; also

$$\alpha_2^2 = 0, \alpha_3^4 = 0.$$

Ferner ist  $\alpha_2^9 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_2^9 \alpha_5^4 \alpha_4^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_2^5 \alpha_8^9 \alpha_5^4 \alpha_4^5 = 0$ . Wenn also  $\alpha_2^9 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_4^5 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 + W_5 \pm W_8 + W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_2^9 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_2^5$ ,  $\alpha_2^8$  beide gleich 0 sind, so ist, damit nicht der erledigte Fall I vorliegt,  $\alpha_2^7 \neq 0$ , so daß aus  $\alpha_2^7 \alpha_7^9 \alpha_5^4 \alpha_4^6 = 0$  folgt:  $\alpha_4^6 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 + W_6 + W_7 + W_9$  gegen Satz 1 verstößt. Also sind  $\alpha_2^5$ ,  $\alpha_2^8$  nicht beide gleich 0. Wegen  $\alpha_2^5 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_2^8 \alpha_3^5 \alpha_3^8 = 0$  ist daher

$$\alpha_2^8 = 0 \text{ und folglich } \alpha_2^7 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Da jetzt auch auf  $W_8$  die Station II anwendbar ist, ist  $\alpha_2^7 \alpha_7^9 \alpha_5^4 \alpha_4^8 = 0$ ; also

$$\alpha_4^8 = 0.$$

Aus  $W_4 + W_5 - W_7 + W_8 - W_9$  folgt dann noch

$$\alpha_4^5 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_4 + W_5 + W_7 - W_8 + W_9$  gegen Satz 1. Damit ist auch der Fall II als unmöglich erkannt.

Wir kommen zum Fall III. Wenn dabei  $\alpha_3^9 = 0$  ist, so ist nach Station II  $\alpha_2^3 \alpha_2^5 \alpha_3^8 = 0$ , also  $\alpha_2^3 = 0$ . Ist dagegen  $\alpha_3^9 \neq 0$  und baut man unter der Annahme  $\alpha_2^2 \neq 0$  die Grundwürfel  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_5$ ,  $W_8$  gemäß Satz 3 nebst Zusatz auf, so ergibt sich das Bild

$$\begin{array}{l} W_2: 1, \alpha_2^3, 0, 0 \\ W_3: 0, 1, \alpha_3^5, 0 \\ W_5: 0, 0, 1, \alpha_5^8 \\ W_8: \alpha_2^2, 0, 0, 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 0, 0, \alpha_2^6, \alpha_2^7, \\ 0, \alpha_3^4, \quad, \alpha_3^7, \\ 0, 0, 0, 0, \alpha_5^9 \\ 0, \quad, 0, 0, 0 \end{array} \right.$$

Hiernach verstößt der Würfel  $W_2 - W_3 \pm W_6 + W_8$  nur dann bei keinem der beiden Vorzeichen gegen Satz 1, wenn

$$\alpha_2^9 - \alpha_3^9 + \alpha_6^9 + \alpha_8^9 = 2, \quad \alpha_2^9 - \alpha_3^9 - \alpha_6^9 + \alpha_8^9 = 1,$$

also

$$\alpha_2^9 - \alpha_3^9 + \alpha_6^9 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_8^9 = \frac{1}{2}$$

ist; dann verstößt aber der Würfel  $W_2 - W_3 - 2W_6 + W_8$  gegen Satz 1. Somit ist die Annahme  $\alpha_8^2 \neq 0$  falsch und man hat in jedem Fall

$$\alpha_8^2 = 0.$$

Nach Satz 18 ist dann  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_5^3 = 0$ , also

$$\alpha_3^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^9 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_8$  ist nun Station II anwendbar. Somit ist  $\alpha_2^5 \alpha_1^5 \alpha_3^5 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_3^5 \alpha_2^5 \alpha_5^5 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_5^5 \alpha_8^9 = 0$ ; daraus folgt  $\alpha_1^5 = 0$ ,  $\alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_5^5 = 0$  und man erhält das Bild

$$\begin{array}{l|llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & \alpha_8^8, \\ W_6: & 0, & 0, & , & 0 & , & 1, & , & , \\ W_7: & 0, & 0, & 0, & . & , & , & 1, & , \\ W_8: & 0, & 0, & 0, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1, \alpha_8^9 \\ W_9: & 0, & , & 0, & & , & , & , & 0, 1, \end{array}$$

wo in dem abgeteilten Quadrat wieder in einer Zeile vier Nullen stehen müssen. Stehen sie bei  $W_6$  oder  $W_7$ , so liegt der erledigte Fall I bzw. II vor. Also stehen die vier Nullen bei  $W_9$ .

Nun ist  $\alpha_5^8 \alpha_3^9 \alpha_2^5 \alpha_2^5 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_5^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_5^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_2^9 \alpha_5^2 \alpha_2^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_2^5 \alpha_2^3 \alpha_3^9 = 0$ . Wenn also  $\alpha_2^9 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_2^5 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 - W_3 - W_5 - W_8 + W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_2^9 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^4 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Weiter ist  $\alpha_8^9 \alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_1^1 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_5^8 \alpha_8^9 \alpha_3^4 \alpha_4^5 = 0$ ,  $\alpha_8^9 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_4^9 = 0$ ; also  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_4^5 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_4^9 = 0$ . Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_4 + W_5 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1. Daher ist auch Fall III unmöglich, womit der Hilfssatz 9 bewiesen ist.

**Hilfssatz 10.** Bei einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel ( $W_5$  und  $W_6$  sind ausgelassen)

$$\begin{array}{l|llll} W_1: & 1, & \alpha_1^2, & 0, & 0 & \alpha_1^5, & \alpha_1^8, & , & , \\ W_2: & 0, & 1, & \alpha_2^3, & 0 & , & \alpha_2^6, & \alpha_2^7, & , \\ W_3: & 0, & 0, & 1, & \alpha_3^4 & \alpha_3^5, & , & \alpha_3^7, & , \\ W_4: & \alpha_4^1, & 0, & 0, & 1 & , & , & , & , \\ W_7: & , & , & , & & 0, & 0, & 1, & , \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^1$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

Beweis. Wörtlich wie beim Beweis von Hilfssatz 7 mit dem einzigen Unterschied, daß statt „Satz 18“ jetzt „Station II“ und statt „Hilfssatz 6“ bei der zweiten Heranziehung „Hilfssatz 9“ stehen muß, findet man, daß die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden sind:

## Fall I

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, \quad , \quad , \quad , \\ W_6: 0, 0, \quad , 0 & 0, 1, 0, 0, \\ W_7: 0, 0, 0, & 0, 0, 1, \alpha_7^8, \\ W_8: \quad , 0, 0, & \quad , \quad , 0, 1, \end{array}$$

## Fall II

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, 0, 0, 0 & 1, \quad , \quad , \quad , \\ W_6: 0, 0, \quad , 0 & \quad , 1, \quad , \quad , \\ W_7: 0, 0, 0, & 0, 0, 1, \alpha_7^8, \\ W_8: \quad , 0, 0, & 0, 0, 0, 1, \end{array}$$

Im Fall I müßte, wenn  $\alpha_6^9 = 0$  wäre, wegen Satz 5  $\alpha_6^3 \neq 0$  sein, und dann würde der Zyklus  $\alpha_6^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^2$  gegen Station II verstoßen. Daher ist  $\alpha_6^9 \neq 0$ . Aus  $\alpha_1^1 \alpha_1^6 \alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_2^2 \alpha_2^9 \alpha_9^0 = 0$ ,  $\alpha_9^6 \alpha_9^0 = 0$  folgt dann  $\alpha_1^6 = 0$ ,  $\alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_9^6 = 0$ , und man erhält das Bild

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 & 1, \quad , \quad , \quad , \\ W_6: 0, \quad 0, \quad , \quad 0 & 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad \alpha_6^9 \\ W_7: 0, \quad 0, \quad 0, & 0, \quad 0, \quad 1, \quad \alpha_7^8, \\ W_8: \quad , \quad 0, \quad 0, & \quad , \quad , \quad 0, \quad 1, \\ W_9: 0, \quad 0, \quad , & \quad , \quad 0, \quad , \quad , \quad 1. \end{array}$$

Nach Satz 19 kann das abgeteilte Quadrat gewiß keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, bei dem der Index 6 oder 9 fehlt. Es enthält aber auch keinen anderen; denn sonst verstößt,

wenn 5 fehlt, der Würfel  $W_6 \pm W_7 + W_8 - W_9$ ,

wenn 7 fehlt, der Würfel  $W_5 + W_6 + W_8 - W_9$ ,

wenn 8 fehlt, der Würfel  $\pm W_5 + W_6 + W_7 - W_9$

bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1<sup>a</sup>). Ein von 0 verschiedener *fünf*-gliedriger Zyklus kann aber auch nicht vorhanden sein, weil sonst der Würfel  $W_5 + W_6 + W_7 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt<sup>b</sup>). Hiernach enthält das Quadrat in einer Zeile vier Nullen, aber nicht bei  $W_5$ , weil  $W_5$  sonst gegen Satz 5 verstößt. Die Nullen stehen also bei  $W_6$  oder  $W_9$ .

Wir nehmen zuerst an, die Nullen stehen bei  $W_8$ . Wenn dann  $\alpha_3^1 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_2^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^8 = 0$ ,

<sup>a</sup>) Um das einzusehen, verfähre man nach dem Rezept von Fußnote <sup>a</sup>).

$\alpha_2^8 = 0, \alpha_1^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^1 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^4 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_8$  ist jetzt Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_7^8 \alpha_3^4 \alpha_1^7 = 0, \alpha_7^8 \alpha_2^4 \alpha_1^7 = 0, \alpha_3^4 \alpha_1^8 = 0, \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0, \alpha_3^4 \alpha_1^8 \alpha_5^8 = 0$ ; also

$$\alpha_1^7 = 0, \alpha_1^8 = 0, \alpha_1^9 = 0, \alpha_4^8 = 0, \alpha_5^8 = 0.$$

Nach Satz 19 ist dann  $\alpha_3^3 \alpha_4^4 \alpha_1^6 = 0$ ; also

$$\alpha_3^8 = 0.$$

Jetzt ist Station II auch auf  $W_8$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_1^4 \alpha_1^8 \alpha_3^9 \alpha_4^8 = 0$ , also

$$\alpha_3^9 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_3^3 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0, \alpha_3^3 \alpha_4^4 \alpha_1^9 = 0, \alpha_3^9 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0, \alpha_3^9 \alpha_3^3 \alpha_4^4 \alpha_1^6 = 0$  folgen:  $\alpha_3^9 = 0, \alpha_4^9 = 0, \alpha_3^6 = 0, \alpha_4^6 = 0$ . Aus  $W_1 - W_4 \pm (W_3 - W_9)$  würde alsdann bei passendem Vorzeichen noch folgen:  $\alpha_1^9 = 0$ , und jetzt würde der Würfel  $W_1 - W_4 + W_9 \pm (W_3 - W_9)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen. Daher ist

$$\alpha_3^9 = 0.$$

Wenn  $\alpha_3^8 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^8 \alpha_3^4 \alpha_1^9 = 0, \alpha_3^8 \alpha_3^4 \alpha_1^9 = 0, \alpha_3^8 \alpha_3^3 \alpha_4^4 \alpha_1^6 = 0$  folgen:  $\alpha_4^9 = 0, \alpha_1^9 = 0, \alpha_4^6 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 + W_8 + W_9 \pm W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist auch

$$\alpha_3^8 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_3^7 \alpha_4^4 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^7 \alpha_7^9 = 0, \alpha_3^7 \alpha_4^4 \alpha_1^9 = 0, \alpha_3^9 \alpha_3^7 \alpha_4^4 \alpha_1^6 = 0$  folgen:  $\alpha_7^9 = 0, \alpha_4^9 = 0, \alpha_4^6 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 \pm W_4 + W_8 + W_7 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist  $\alpha_3^7 \alpha_4^4 = 0$ . Wenn  $\alpha_3^7 \neq 0$  wäre, so wäre hiernach  $\alpha_4^4 = 0$  und aus  $\alpha_3^7 \alpha_7^9 = 0, \alpha_3^7 \alpha_3^8 \alpha_4^4 \alpha_1^9 = 0$  würde weiter folgen:  $\alpha_7^9 = 0, \alpha_1^9 = 0$ . Als dann würde aus  $W_4 + W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  noch folgen:  $\alpha_4^6 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 \pm W_4 + W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^7 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^5 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Wegen  $\alpha_3^5 \alpha_5^9 = 0, \alpha_3^5 \alpha_5^8 \alpha_5^6 = 0$  ist jetzt

$$\alpha_3^9 = 0, \alpha_5^6 = 0 \text{ und folglich } \alpha_7^7 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Jetzt ist Station II auch auf  $W_8$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_3^7 \alpha_3^8 \alpha_4^4 \alpha_1^5 = 0, \alpha_3^8 \alpha_3^7 \alpha_4^4 \alpha_1^5 = 0$ ; also

$$\alpha_4^5 = 0, \alpha_7^9 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_4 + W_5 + W_7 + W_8$  gegen Satz 1. Die Annahme, daß die vier Nullen bei  $W_8$  stehen, ist hiernach falsch.

Die Nullen stehen also bei  $W_9$ . Nach Satz 18 ist dann  $\alpha_9^4 \alpha_4^1 \alpha_1^9 \alpha_6^9 = 0$ , also

$$\alpha_9^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_9^3 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5)}$$

Auf  $W_9$  ist jetzt Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_9^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^7 \alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^7 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^5 \alpha_5^9 = 0$ ; also

$$\alpha_3^9 = 0, \quad \alpha_7^9 = 0, \quad \alpha_8^9 = 0, \quad \alpha_5^9 = 0, \quad \alpha_6^9 = 0.$$

Wegen der letzten Gleichung muß, damit nicht eine nach Hilfssatz 9 unmögliche Grundfigur vorliegt,

$$\alpha_5^7 \neq 0$$

sein. Aus  $\alpha_5^7 \alpha_7^8 \alpha_8^5 = 0$  folgt dann

$$\alpha_8^5 = 0,$$

und damit nicht der erledigte Fall vorliegt, daß vier Nullen bei  $W_8$  stehen, muß jetzt

$$\alpha_8^6 \neq 0$$

sein. Aus  $\alpha_8^6 \alpha_6^9 \alpha_9^3 \alpha_3^8 = 0$  folgt dann

$$\alpha_3^8 = 0,$$

worauf der Würfel  $W_3 - W_6 - W_7 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt. Damit ist der Fall I als unmöglich nachgewiesen.

Im Fall II würde, wenn  $\alpha_3^1 \neq 0$  wäre, aus  $\alpha_8^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_8^1 \alpha_1^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_1^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstöße. Daher ist

$$\alpha_2^1 = 0.$$

Wir nehmen jetzt zunächst an, daß

$$\alpha_9^9 = 0 \text{ und folglich } \alpha_9^4 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5)}$$

ist. Dann ist Station II auf  $W_8$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_8^4 \alpha_4^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_4^1 \alpha_1^6 \alpha_6^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^7 = 0$ ; also

$$\alpha_1^8 = 0, \quad \alpha_1^6 = 0, \quad \alpha_5^8 = 0, \quad \alpha_6^8 = 0, \quad \alpha_1^7 = 0, \quad \alpha_4^7 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_8^5 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_8^6 = 0$  und, damit nicht eine nach Hilfssatz 9 unmögliche Grundfigur vorläge, müßte  $\alpha_3^7 \neq 0$  sein. Sodann würde aus  $\alpha_3^7 \alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^5 = 0$  folgen:  $\alpha_4^5 = 0$  und hiernach aus  $W_1 - W_4 \pm (W_5 - W_7)$  bei passendem Vorzeichen auch  $\alpha_7^4 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 \pm$

$\pm (W_5 - W_7) + W_8$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_6^5 = 0$$

und damit nicht der erledigte Fall I vorliegt, muß

$$\alpha_6^7 \neq 0$$

sein. Aus  $\alpha_6^7 \alpha_7^2 \alpha_8^4 \alpha_4^6 = 0$  folgt dann

$$\alpha_4^6 = 0$$

und hierauf aus  $W_1 - W_4 \pm (W_6 - W_7)$  bei passendem Vorzeichen

$$\alpha_7^4 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_4 \pm (W_6 - W_7) + W_8$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1.

Die Annahme  $\alpha_8^9 = 0$  ist daher unzulässig. Also ist

$$\alpha_8^9 \neq 0$$

und aus  $\alpha_8^9 \alpha_9^8 = 0$ ,  $\alpha_8^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_8^8 = 0, \quad \alpha_7^8 = 0.$$

Wenn jetzt  $\alpha_8^9 \neq 0$  wäre für  $r = 2$  oder  $3$ , so würde aus  $\alpha_8^9 \alpha_9^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_8^7 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_8^9 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$  folgen:  $\alpha_8^8 = 0$ ,  $\alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_7^8 = 0$ , worauf der Würfel  $W_7 - W_8 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist  $\alpha_8^8 = 0$ ,  $\alpha_8^9 = 0$ , und man erhält das Bild

$$\begin{array}{l|llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & , & , & , \\ W_6: & 0, & 0, & , & 0 & , & 1, & , & , \\ W_7: & 0, & 0, & 0, & & 0, & 0, & 1, & \alpha_7^8, \\ W_8: & 0, & 0, & 0, & & 0, & 0, & 0, & 1, \alpha_8^9 \\ W_9: & , & 0, & 0, & & , & , & 0, & 0, & 1. \end{array}$$

In dem abgeteilten Quadrat müssen jetzt wieder in einer Zeile vier Nullen stehen. Stehen sie bei  $W_5$ , so verstößt  $W_5$  gegen Satz 5; stehen sie bei  $W_6$ , so liegt der erledigte Fall I vor. Also stehen die vier Nullen bei  $W_9$ . Nun ist  $\alpha_9^1 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_9^1 \alpha_1^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_9^2 \alpha_1^3 \alpha_1^9 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_9^3 \alpha_1^4 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_9^4 \alpha_1^5 \alpha_1^9 = 0$ . Wenn daher  $\alpha_1^9 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_1^2 = 0$ ,  $\alpha_1^3 = 0$ ,  $\alpha_1^4 = 0$ ,  $\alpha_1^5 = 0$ ,  $\alpha_1^7 = 0$  und dann würde aus  $W_1 - W_2 + W_7 - W_9$  weiter folgen:  $\alpha_7^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_2 + W_7 - W_8 \pm W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_1^9 = 0 \text{ und folglich } \alpha_4^9 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_9$  ist jetzt Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_9^4 \alpha_4^1 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_9^4 \alpha_1^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_9^4 \alpha_4^3 = 0$ ,  $\alpha_9^4 \alpha_2^4 \alpha_4^3 = 0$ ,  $\alpha_9^4 \alpha_3^4 \alpha_4^3 = 0$ ,  $\alpha_9^4 \alpha_3^5 \alpha_5^4 \alpha_4^3 = 0$ ; also

$$\alpha_1^9 = 0, \alpha_2^9 = 0, \alpha_3^9 = 0, \alpha_4^8 = 0, \alpha_5^8 = 0, \alpha_4^7 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_7^4 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^4 \alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^7 = 0$  und der Würfel  $W_1 \pm (W_2 - W_7) \pm W_4$  würde bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen<sup>7)</sup>. Daher ist

$$\alpha_7^4 = 0.$$

Wenn  $\alpha_7^9 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^9 \alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 \pm (W_2 - W_7) \pm W_4 + W_9$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße<sup>7)</sup>. Daher ist

$$\alpha_7^9 = 0.$$

Jetzt ist auch auf  $W_7$  die Station II anwendbar und es ist  $\alpha_7^8 \alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^7 = 0$ . Wenn also  $\alpha_8^4 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_1^7 = 0$  und dann würde der Würfel  $W_1 \pm (W_2 + W_7 - W_8) \pm W_4$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen<sup>7)</sup>. Daher ist

$$\alpha_8^4 = 0.$$

Aus  $W_1 - W_4 + W_7 + W_8 + W_9$  folgt dann noch

$$\alpha_1^7 = 0,$$

worauf der Würfel  $W_1 \pm (W_2 + W_7 - W_8) \pm W_4 + W_9$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt<sup>7)</sup>. Damit ist auch Fall II als unmöglich erkannt, also der Hilfssatz 10 bewiesen.

**Hilfssatz 11.** In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel ( $W_5$  ist ausgelassen)

$$\begin{array}{l|l} W_1: & 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: & 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: & 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: & \alpha_4^1, 0, 0, 1 \\ W_9: & , , , \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, , , \\ , \alpha_2^6, \alpha_2^7, , \\ \alpha_3^5, , \alpha_3^7, , \\ , , , , \\ 0, 1, 0, , , \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^u$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

<sup>7)</sup> Als ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinate kommen nur die fünfte und sechste in Betracht. Diese sind gleich

$$\alpha_1^5 \pm \alpha_2^6 \pm \alpha_3^7, \alpha_1^6 \pm \alpha_2^5 \pm \alpha_3^7.$$

und bei passenden Vorzeichen ist keine davon eine ganze von 0 verschiedene Zahl (vgl. die Begründung in I, S. 427 unten).

Beweis. Wörtlich wie beim Beweis von Hilfssatz 8 mit dem einzigen Unterschied, daß statt „Hilfssatz 6 bzw. 7“ jetzt „Hilfssatz 9 bzw. 10“ stehen muß, findet man das Bild

$$\begin{array}{lcl} W_5: 0, & 0, & 0, & 0 & \left| \begin{array}{ccc} 1, & , & , \\ 0, & 1, & 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\alpha_5^9) \\ (\alpha_6^9) \end{array} \\ W_6: 0, & 0, & 0, & 0 & \left| \begin{array}{ccc} , & , & 1, \\ , & 0, & , \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\alpha_7^9) \\ (\alpha_8^9) \end{array} \end{array} \quad (\alpha_1^9 = 0 \text{ oder } \neq 0).$$

Dagegen kann nicht wie damals geschlossen werden, daß auch  $\alpha_3^4 = 0$  ist. Aber auch so kann das eingerahmte Quadrat nach Satz 19 keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, muß also in einer Zeile drei Nullen haben, und zwar, damit nicht eine nach Hilfssatz 9 oder 10 unmögliche Grundfigur vorliegt, bei  $W_2$ . Wenn dann  $\alpha_3^4 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_2^4 \alpha_1^5 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_1^5 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_6^5 \alpha_3^4 \alpha_1^8 = 0$  folgen:  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_1^5 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 \pm (W_6 - W_5)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^4 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_3^9 = 0$  wäre und folglich wegen Satz 5  $\alpha_3^3 \neq 0$ , so wäre auf  $W_3$  die Station II anwendbar und man hätte  $\alpha_6^8 \alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_5^6 = 0$ ,  $\alpha_6^8 \alpha_3^3 \alpha_3^7 \alpha_7^6 = 0$ ; also  $\alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_7^6 = 0$ . Damit nicht eine nach Hilfssatz 9 oder 10 unmögliche Grundfigur vorläge, müßte dann  $\alpha_3^7 \neq 0$ ,  $\alpha_7^5 \neq 0$  sein, während doch  $\alpha_7^7 \alpha_7^5 = 0$  ist. Daher ist

$$\alpha_3^9 \neq 0.$$

Aus  $\alpha_3^9 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^8 \alpha_3^9 \alpha_3^6 = 0$  folgt dann

$$\alpha_3^8 = 0, \quad \alpha_3^6 = 0.$$

Wäre  $\alpha_3^9 \neq 0$  für  $\nu = 1$  oder 2, so würde aus  $\alpha_3^9 \alpha_3^6 \alpha_3^8 = 0$  folgen:  $\alpha_3^9 = 0$ , so daß Station II auf  $W_6$  anwendbar wäre; im Widerspruch damit wäre aber  $\alpha_3^9 \alpha_3^6 \alpha_3^8 \neq 0$ . Daher ist  $\alpha_3^1 = 0$ ,  $\alpha_3^2 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{lcl} W_5: 0, & 0, & 0, & 0 & \left| \begin{array}{ccc} 1, & , & , \\ 0, & 1, & 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\alpha_5^9) \\ (\alpha_6^9) \end{array} \\ W_6: 0, & 0, & 0, & 0 & \left| \begin{array}{ccc} , & , & 1, \\ , & 0, & , \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\alpha_7^9) \\ (\alpha_8^9) \end{array} \\ W_7: 0, & 0, & 0, & , & \left| \begin{array}{ccc} 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\alpha_1^9) \\ (\alpha_2^9) \end{array} \\ W_8: 0, & 0, & , & 0 & \left| \begin{array}{ccc} , & 0, & , \\ , & 0, & , \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\alpha_3^9) \\ (\alpha_4^9) \end{array} \\ W_9: 0, & 0, & , & , & \left| \begin{array}{ccc} , & 0, & , \\ , & 0, & , \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\alpha_5^9) \\ (\alpha_6^9) \end{array} \end{array}$$

Hier kann das abgeteilte Quadrat nach Satz 19 gewiß keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, bei dem der Index 7 oder 8 oder 9 fehlt. Es enthält aber auch keinen anderen; denn sonst verstößt,

wenn 5 fehlt, der Würfel  $W_6 + W_7 + W_8 - W_9$ ,

wenn 6 fehlt, der Würfel  $W_5 - W_7 - W_8 + W_9$

gegen Satz 1<sup>a</sup>). Ein von 0 verschiedener *fünfgliedriger* Zyklus kann aber auch nicht vorhanden sein, weil sonst der Würfel  $W_5 + W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstößt<sup>a</sup>). Hiernach enthält das Quadrat in einer Zeile vier Nullen, und zwar, damit nicht eine nach Hilfssatz 9 oder 10 unmögliche Grundfigur vorliegt, bei  $W_9$ .

Nun ist  $\alpha_4^4 \alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_1^0 \alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^4 \alpha_1^0 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^4 \alpha_1^0 \alpha_1^0 \alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^4 \alpha_1^0 \alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^0 \alpha_3^4 \alpha_1^0 = 0$ . Wenn daher  $\alpha_3^4 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_1^0 = 0$ ,  $\alpha_1^0 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 + W_6 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^3 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_9$  ist jetzt Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_3^0 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^5 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^7 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^0 \alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^3 \alpha_3^7 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_3^0 \alpha_3^5 \alpha_3^3 \alpha_3^0 = 0$ ; also

$$\alpha_3^0 = 0, \quad \alpha_3^5 = 0, \quad \alpha_3^7 = 0, \quad \alpha_3^3 = 0, \quad \alpha_3^8 = 0, \quad \alpha_3^6 = 0, \quad \alpha_3^6 = 0.$$

Ferner ist für  $r = 5$  und  $7$   $\alpha_3^3 \alpha_3^r \alpha_3^0 = 0$ . Wenn daher  $\alpha_3^0 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_3^0 = 0$ , worauf der Würfel  $W_3 - W_r + W_6 - W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Also ist

$$\alpha_3^6 = 0, \quad \alpha_3^6 = 0.$$

Damit nicht eine nach Hilfssatz 9 oder 10 unmögliche Grundfigur vorliegt, muß jetzt  $\alpha_3^7 \neq 0$ ,  $\alpha_3^5 \neq 0$  sein, während doch  $\alpha_3^7 \alpha_3^5 = 0$  ist. Damit ist der Hilfssatz 11 bewiesen.

**Station III.** In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die vier Grundwürfel

$$\begin{array}{l|l} W_1: & 1, \quad \alpha_1^2, \quad 0, \quad 0 \quad \left| \quad \alpha_1^5, \quad \alpha_1^8, \quad , \quad , \right. \\ W_2: & 0, \quad 1, \quad \alpha_2^3, \quad 0 \quad \left| \quad , \quad \alpha_2^6, \quad \alpha_2^7, \quad , \right. \\ W_3: & 0, \quad 0, \quad 1, \quad \alpha_3^4 \quad \left| \quad \alpha_3^5, \quad , \quad \alpha_3^7, \quad , \right. \\ W_4: & \alpha_4^1, \quad 0, \quad 0, \quad 1 \quad \left| \quad , \quad , \quad , \quad , \right. \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^r$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

**Beweis.** In dem Quadrat

$$\begin{array}{ccc} 1, & \alpha_5^6, & \alpha_5^7 \\ \alpha_6^5, & 1, & \alpha_6^7 \\ \alpha_7^5, & \alpha_7^6, & 1 \end{array}$$

müssen, da alle zwei- und dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, in einer Zeile zwei Nullen stehen. Je nachdem das die erste oder zweite oder dritte Zeile ist, liegt aber eine nach Hilfssatz 9 oder 11 oder 10 unmögliche Grundfigur vor.

<sup>a</sup>) Um das einzusehen, verfähre man nach dem Rezept von Fußnote <sup>1</sup>).

## § 17.

Nochmals Hilfssätze über viergliedrige Zyklen im  $R_9$ . Station IV.

Hilfssatz 12. In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel

$$\begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1 \\ W_5: , , , \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, \\ , \alpha_2^6, , \\ \alpha_3^5, , , \\ , , \alpha_4^7, \\ 1, 0, 0, \end{array} \right.$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^k$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

Beweis. Wie beim Beweis von Hilfssatz 6 ergibt sich zunächst

$$\alpha_5^1 = 0, \alpha_5^2 = 0, \alpha_5^3 = 0, \alpha_5^4 = 0, \alpha_6^1 = 0, \alpha_6^2 = 0, \alpha_6^4 = 0$$

und aus  $\alpha_7^1 \alpha_1^7 = 0, \alpha_7^3 \alpha_3^4 \alpha_4^7 = 0, \alpha_7^4 \alpha_4^7 = 0$  folgt außerdem  $\alpha_7^1 = 0, \alpha_7^3 = 0, \alpha_7^4 = 0$ . Damit  $W_5$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß etwa  $\alpha_5^8 \neq 0$  sein und dann folgt aus  $\alpha_3^1 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0, \alpha_8^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0, \alpha_8^5 \alpha_5^8 = 0$  weiter  $\alpha_8^1 = 0, \alpha_8^3 = 0, \alpha_8^5 = 0$ , so daß man folgendes Bild gewinnt:

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, , 0 \\ W_7: 0, , 0, 0 \\ W_8: 0, , 0, \end{array} \left[ \begin{array}{l} 1, 0, 0, \alpha_5^8 \\ , 1, \\ , , 1, \\ 0, , , 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} (\alpha_5^9) \\ (\alpha_6^9) \\ (\alpha_7^9) \\ (\alpha_8^9) \end{array} \quad (\alpha_2^9 = 0 \text{ oder } \neq 0).$$

Nach Satz 19 kann das eingerahmte Quadrat keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, muß also in einer Zeile drei Nullen haben. Daher hat man die folgenden drei Fälle:

## Fall I

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, , 0 \\ W_7: 0, , 0, 0 \\ W_8: 0, , 0, \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, 0, 0, \alpha_5^8, \\ 0, 1, 0, 0, \\ , , 1, \\ 0, , , 1, \end{array} \right.$$

## Fall II

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, , 0 \\ W_7: 0, , 0, 0 \\ W_8: 0, , 0, \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, 0, 0, \alpha_5^8, \\ , 1, , \\ 0, 0, 1, 0, \\ 0, , , 1, \end{array} \right.$$

## Fall III

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, , 0 \\ W_7: 0, , 0, 0 \\ W_8: 0, , 0, \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, 0, 0, \alpha_5^8, \\ , 1, , \\ , , 1, \\ 0, 0, 0, 1. \end{array} \right.$$

Im Fall I gelangt man durch wörtlich die gleichen Schlüsse wie beim Beweis von Hilfssatz 9, Fall I zu dem Bild

$$\begin{array}{l|llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & \alpha_5^8, \\ W_6: & 0, & 0, & , & 0 & 0, & 1, & 0, & 0, & \alpha_6^9 \\ W_7: & 0, & , & 0, & 0 & , & , & 1, & , \\ W_8: & 0, & , & 0, & & 0, & , & , & 1, \\ W_9: & 0, & 0, & , & & , & 0, & , & , & 1. \end{array}$$

Nach Satz 19 kann das abgeteilte Quadrat gewiß keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, bei dem der Index 8 oder 9 fehlt; aber auch keinen, bei dem 6 oder 7 fehlt, weil sonst der Würfel  $W_5 + W_7 - W_8 + W_9$  bzw.  $W_5 + W_6 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstößt<sup>9)</sup>. Schließlich enthält es aber auch keinen, bei dem 5 fehlt. Denn wenn  $\alpha_5^9 \neq 0$ , so folgt aus  $\alpha_9^3 \alpha_5^8 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_9^5 \alpha_5^9 = 0$ , daß  $\alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_5^5 = 0$  ist, und jetzt folgt die Behauptung aus Satz 19. Wenn aber  $\alpha_5^9 = 0$ , so ist auf  $W_5$  die Station II anwendbar; also ist  $\alpha_5^3 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_5^4 \alpha_1^4 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0$  und folglich  $\alpha_8^2 = 0$ ,  $\alpha_8^4 = 0$ , worauf die Behauptung wieder aus Satz 19 folgt. Das Quadrat enthält aber auch keinen von 0 verschiedenen fünfgliedrigen Zyklus, weil sonst der Würfel  $W_5 + W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstößt<sup>9)</sup>. Hiernach stehen in einer Zeile des Quadrats vier Nullen. Stehen sie bei  $W_7$ , so ist wegen Satz 5  $\alpha_7^2 \neq 0$  und dann verstößt der Zyklus  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^7$  gegen Station II. Stehen sie bei  $W_8$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_8^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_1^4 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0$ , also  $\alpha_8^2 = 0$ ,  $\alpha_8^4 = 0$ , so daß  $W_8$  gegen Satz 5 verstößt. Daher stehen die vier Nullen bei  $W_9$ .

Von hier aus ergibt sich wörtlich wie beim Beweis von Hilfssatz 9

$\alpha_9^4 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \neq 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 = 0$ ,  $\alpha_8^4 = 0$ ,  $\alpha_8^9 = 0$ , und auf  $W_9$  ist die Station II anwendbar. Dagegen folgt die Gleichung

$$\alpha_7^9 = 0$$

diesmal aus  $\alpha_9^3 \alpha_3^4 \alpha_4^7 \alpha_7^9 = 0$ . Und die weitere Gleichung

$$\alpha_7^6 = 0$$

ergibt sich so: Wäre  $\alpha_7^6 \neq 0$ , so würde aus  $\alpha_7^6 \alpha_6^9 \alpha_9^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^4 \alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_6^9 \alpha_9^3 \alpha_3^4 \alpha_4^6 = 0$  folgen:  $\alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_4^6 = 0$ , worauf der Würfel  $W_3 \pm W_4 - W_6 \pm W_7 - W_9$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße<sup>10)</sup>. Jetzt geht es wieder wörtlich wie beim Beweis von Hilfssatz 9, Fall I weiter, wodurch sich Fall I als unmöglich erweist.

Im Fall II müßte, wenn  $\alpha_7^9 = 0$  wäre, wegen Satz 5  $\alpha_7^2 \neq 0$  sein, worauf der Zyklus  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^7$  gegen Station II verstieße. Daher ist  $\alpha_7^9 \neq 0$ . Aus

<sup>9)</sup> Um das einzusehen, verfähre man nach dem Rezept von Fußnote 4).

<sup>10)</sup> Das ist analog wie in Fußnote 7) einzusehen.

$\alpha_3^1 \alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_3^7 \alpha_7^9 = 0$  folgt dann weiter  $\alpha_3^1 = 0$ ,  $\alpha_3^4 = 0$ ,  $\alpha_3^7 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{l|llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & 1 & 0, & 0, & \alpha_5^8 \\ W_6: & 0, & 0, & , & 0 & , & 1, & , & \\ W_7: & 0, & , & 0, & 0 & 0, & 0, & 1, & 0, \alpha_7^9 \\ W_8: & 0, & , & 0, & & 0, & , & , & 1, \\ W_9: & 0, & , & , & 0 & , & , & 0, & , 1. \end{array}$$

Nach Satz 19 kann das abgeteilte Quadrat gewiß keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten, wenn  $\alpha_3^9 = 0$  ist. Wenn dagegen  $\alpha_3^9 \neq 0$ , so folgt aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^9 = 0$ , daß  $\alpha_3^5 = 0$  und folglich  $W_5$  nach Station II an keinem von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus beteiligt ist; aber auch ohne Beteiligung von  $W_5$  kann jetzt kein solcher Zyklus in dem Quadrat enthalten sein, weil sonst der Würfel  $W_6 + W_7 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt<sup>11)</sup>. Das Quadrat enthält also in keinem Fall einen solchen Zyklus. Ebenso wenig kann es einen von 0 verschiedenen fünfgliedrigen Zyklus enthalten, weil sonst der Würfel  $W_5 + W_6 + W_7 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt<sup>11)</sup>. Daher müssen in dem Quadrat wieder in einer Zeile vier Nullen stehen. Stehen sie bei  $W_6$ , so liegt der erledigte Fall I vor. Stehen sie bei  $W_8$ , so ist nach Satz 18  $\alpha_8^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_4^1 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0$ , also  $\alpha_8^2 = 0$ ,  $\alpha_8^4 = 0$ , so daß  $W_8$  gegen Satz 5 verstößt. Daher stehen die vier Nullen bei  $W_9$ .

Nach Satz 18 ist dann  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_7^9 = 0$ ; also

$$\alpha_3^3 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^4 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_9$  ist jetzt die Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_3^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_3^2 \alpha_2^6 \alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_7^9 \alpha_3^2 \alpha_2^7 = 0$ ,  $\alpha_7^9 \alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^9 \alpha_3^2 \alpha_2^6 \alpha_6^7 = 0$ ; also

$$\alpha_2^9 = 0, \alpha_3^9 = 0, \alpha_5^9 = 0, \alpha_6^9 = 0, \alpha_2^7 = 0, \alpha_3^7 = 0, \alpha_6^7 = 0.$$

Jetzt ist die Station II auch auf  $W_5$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_5^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_5^4 \alpha_4^1 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0$ ; also

$$\alpha_5^2 = 0, \alpha_5^4 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_5^9 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_5^9 \alpha_5^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_5^9 \alpha_5^2 \alpha_2^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_5^9 \alpha_5^4 \alpha_4^1 \alpha_1^5 = 0$  folgen:  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_2^5 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 - W_3 + W_5 \pm W_6 + W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_5^9 = 0.$$

<sup>11)</sup> Um das einzusehen, verfähre man nach dem Rezept von Fußnote 4).

Wenn  $\alpha_3^6 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^8 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_3^5 \alpha_3^8 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_3^8 \alpha_3^6 = 0$  folgen:  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_3^5 = 0$ ,  $\alpha_3^8 = 0$ , so daß  $W_6$  gegen Satz 5 verstieße. Also ist

$$\alpha_3^6 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^7 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Aus  $\alpha_3^7 \alpha_7^9 \alpha_5^2 \alpha_2^8 = 0$  folgt jetzt

$$\alpha_2^8 = 0$$

und sodann aus  $W_2 - W_5 - W_7 + W_8 - W_9$  auch noch

$$\alpha_2^5 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_2 - W_3 - W_5 - W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1. Damit ist auch Fall II als unmöglich erkannt.

Im Fall III erhält man durch wörtlich die gleiche Überlegung wie beim Beweis von Hilfssatz 9, Fall III das Bild

$$\begin{array}{l|l} W_5: 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & \alpha_5^8, \\ W_6: 0, & 0, & , & 0 & , & 1, & , & , \\ W_7: 0, & , & 0, & 0 & , & , & 1, & , \\ W_8: 0, & 0, & 0, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1, \alpha_8^9 \\ W_9: 0, & , & 0, & & , & , & , & 0, 1, \end{array}$$

wo in dem abgeteilten Quadrat wieder in einer Zeile vier Nullen stehen müssen. Stehen sie bei  $W_6$  oder  $W_7$ , so liegt der erledigte Fall I bzw. II vor. Also stehen die vier Nullen bei  $W_9$ . Von da an läßt sich wörtlich wie bei Hilfssatz 9, Fall III weiterschließen, wodurch auch Fall III als unmöglich erkannt wird. Damit ist der Hilfssatz 12 bewiesen.

**Hilfssatz 13.** In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel ( $W_5$  und  $W_6$  sind ausgelassen)

$$\begin{array}{l|l} W_1: 1, & \alpha_1^2, & 0, & 0 & \alpha_1^5, & \alpha_1^6, & \alpha_1^7, & , \\ W_2: 0, & 1, & \alpha_2^3, & 0 & , & \alpha_2^6, & , & , \\ W_3: 0, & 0, & 1, & \alpha_3^4 & \alpha_3^5, & , & , & , \\ W_4: \alpha_4^1, & 0, & 0, & 1 & , & , & \alpha_4^7, & , \\ W_7: , & , & , & & 0, & 0, & 1, & , \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^n$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^5 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

**Beweis.** Wie beim Beweis von Hilfssatz 12 ergibt sich zunächst

$$\alpha_5^1 = 0, \alpha_5^2 = 0, \alpha_5^3 = 0, \alpha_5^4 = 0,$$

$$\alpha_6^1 = 0, \alpha_6^2 = 0, \alpha_6^3 = 0, \alpha_7^1 = 0, \alpha_7^2 = 0, \alpha_7^4 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_7^5, \alpha_7^9$  beide gleich 0 wären, so wäre wegen Satz 5  $\alpha_7^2 \neq 0$ , und dann würde der Zyklus  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_7^1$  gegen Station II verstoßen. Daher dürfen

wir etwa  $\alpha_7^2 \neq 0$  annehmen. Aus  $\alpha_3^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_3^7 \alpha_7^8 = 0$  folgt dann  $\alpha_3^1 = 0$ ,  $\alpha_3^4 = 0$ ,  $\alpha_3^7 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, \quad, 0 \\ W_7: 0, \quad, 0, 0 \\ W_8: 0, \quad, \quad, 0 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1, \quad, \quad \\ \hline \quad, 1, \quad \\ \hline 0, 0, 1, \alpha_7^8 \\ \hline \quad, \quad, 0, 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} (\alpha_3^9) \\ (\alpha_6^9) \\ (\alpha_7^9) \\ (\alpha_8^9) \end{array} \quad (\alpha_1^9 = 0 \text{ oder } \neq 0).$$

Wenn nun  $\alpha_3^3, \alpha_7^2$  beide von 0 verschieden sind, so folgt aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^6 = 0$  zunächst  $\alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_3^5 = 0$ ; dann ist aber nach Satz 19 auch  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_3^7 = 0$ , also  $\alpha_3^7 = 0$ , so daß eine nach Hilfssatz 12 unmögliche Grundfigur vorliegt. Daher ist wenigstens eine der Zahlen  $\alpha_3^3, \alpha_7^2$  gleich 0 und dann folgt aus Satz 19, daß das vorstehend eingerahmte Quadrat keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten kann, also in einer Zeile drei Nullen hat. Diese stehen aber nicht bei  $W_5$ , weil sonst eine nach Hilfssatz 12 unmögliche Grundfigur vorläge; daher hat man die folgenden beiden Fälle:

## Fall I

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, \quad, 0 \\ W_7: 0, \quad, 0, 0 \\ W_8: 0, \quad, \quad, 0 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1, \quad, \quad, \quad \\ \hline 0, 1, 0, 0, \\ \hline 0, 0, 1, \alpha_7^8, \\ \hline \quad, \quad, 0, 1, \\ \hline \end{array}$$

## Fall II

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, \quad, 0 \\ W_7: 0, \quad, 0, 0 \\ W_8: 0, \quad, \quad, 0 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1, \quad, \quad, \quad \\ \hline \quad, 1, \quad, \quad \\ \hline 0, 0, 1, \alpha_7^8, \\ \hline 0, 0, 0, 1, \quad \\ \hline \end{array}$$

Im Fall I gelangt man durch wörtlich die gleichen Schlüsse wie beim Beweis von Hilfssatz 10, Fall I zu dem Bild

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, \quad, 0 \\ W_7: 0, \quad, 0, 0 \\ W_8: 0, \quad, \quad, 0 \\ W_9: 0, 0, \quad, \quad \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1, \quad, \quad, \quad \\ \hline 0, 1, 0, 0, \alpha_6^9 \\ \hline 0, 0, 1, \alpha_7^8, \\ \hline \quad, \quad, 0, 1, \\ \hline \quad, 0, \quad, \quad, 1. \\ \hline \end{array}$$

Nun kann das abgeteilte Quadrat keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten. Denn wenn bei einem solchen der Index 7 oder 8 fehlt, liegt ein Verstoß gegen Satz 19 vor; wenn 6 oder 5 fehlt, so verstößt der Würfel  $W_5 + W_7 - W_8 + W_9$  bzw.  $W_7 - W_8 + W_9 \pm W_6$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1<sup>12)</sup>. Und ein viergliedriger Zyklus, bei dem 9 fehlt, ist wegen der Nullen bei  $W_6$  von vornherein gleich 0. Das Quadrat kann aber auch keinen von 0 verschiedenen fünfgliedrigen Zyklus enthalten, weil sonst der Würfel  $W_5 + W_6 + W_7 - W_8 \pm W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen

<sup>12)</sup> Um das einzusehen, verfähre man nach dem Rezept von Fußnote 4).

Satz 1 verstößt<sup>12)</sup>. Hiernach enthält das Quadrat in einer Zeile vier Nullen, aber wegen Satz 5 nicht bei  $W_5$ . Die Nullen stehen also bei  $W_8$  oder  $W_9$ .

Wir nehmen zuerst an, die Nullen stehen bei  $W_8$ . Wenn dann  $\alpha_8^3 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_2^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$  folgen:  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_5^8 = 0$ , worauf der Würfel  $W_3 - W_4 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_8^3 = 0 \text{ und folglich } \alpha_2^8 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_8$  ist jetzt die Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_8^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^6 \alpha_6^8 = 0$ ,  $\alpha_7^2 \alpha_3^2 \alpha_2^7 = 0$ ,  $\alpha_7^2 \alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0$ ; also

$$\alpha_2^8 = 0, \alpha_3^8 = 0, \alpha_5^8 = 0, \alpha_6^8 = 0, \alpha_7^2 = 0, \alpha_3^7 = 0.$$

Wenn jetzt  $\alpha_8^3 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$  folgen:  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ , worauf einer der Würfel  $W_1 - W_4 \pm (W_3 - W_8)$  oder  $W_1 - W_4 \pm (W_3 - 2W_6)$  gegen Satz 1 verstieße<sup>13)</sup>. Also ist

$$\alpha_8^3 = 0.$$

Jetzt ist die Station II auch auf  $W_6$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^6 \alpha_6^0 = 0$ ; also

$$\alpha_9^4 = 0.$$

Wenn  $\alpha_9^7 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^7 \alpha_7^8 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_2^6 \alpha_6^9 \alpha_7^7 = 0$ ,  $\alpha_9^7 \alpha_9^0 = 0$  folgen:  $\alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_7^2 = 0$ ,  $\alpha_9^0 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 + W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_9^7 = 0.$$

Wenn  $\alpha_9^3 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_6^9 \alpha_6^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_6^9 \alpha_6^3 \alpha_3^4 \alpha_4^9 = 0$  folgen:  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_4^6 = 0$  und sodann aus  $W_1 - W_4 \pm (W_3 - W_9)$  bei passendem Vorzeichen auch  $\alpha_1^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 \pm (W_3 - W_9) + W_6$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_9^3 = 0 \text{ und folglich } \alpha_5^9 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Wegen  $\alpha_9^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_6^9 \alpha_6^5 \alpha_5^9 = 0$  ist jetzt

$$\alpha_5^9 = 0, \alpha_6^9 = 0 \text{ und folglich } \alpha_2^7 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Aus  $\alpha_5^5 \alpha_5^7 \alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_5^7 \alpha_7^8 \alpha_8^2 \alpha_2^5 = 0$  folgt dann weiter

$$\alpha_7^9 = 0, \alpha_2^5 = 0.$$

<sup>12)</sup> Als ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinate käme nur die fünfte oder neunte in Frage. Nun ist  $\alpha_1^1 - \alpha_1^2 \pm (\alpha_1^3 - 0)$  bei passendem Vorzeichen keine ganze von 0 verschiedene Zahl. Bei diesem Vorzeichen müßten also die Zahlen

$$\alpha_1^1 - \alpha_1^2 \pm (\alpha_1^3 - \alpha_2^3) \text{ und } \alpha_1^1 - \alpha_1^2 \pm (\alpha_1^3 - 2\alpha_2^3)$$

beide ganz sein. Daraus würde folgen, daß  $\alpha_2^3$  ganz, also gleich 0 ist. Aber es ist ja  $\alpha_2^3 \neq 0$ .

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_2 - W_3 + W_5 - W_7 - W_8$  gegen Satz 1. Die Annahme, daß die vier Nullen bei  $W_8$  stehen, ist daher falsch.

Die Nullen stehen also bei  $W_9$ . Nach Satz 18 ist dann  $\alpha_3^4 \alpha_4^1 \alpha_1^6 \alpha_6^9 = 0$ ; also

$$\alpha_9^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_9^3 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_9$  ist jetzt die Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_9^3 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_7^4 \alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^4 \alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^2 \alpha_3^4 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^1 \alpha_3^5 = 0$ ; also

$$\alpha_3^9 = 0, \quad \alpha_4^9 = 0, \quad \alpha_5^9 = 0, \quad \alpha_7^9 = 0, \quad \alpha_8^9 = 0, \quad \alpha_1^6 = 0, \quad \alpha_6^9 = 0.$$

Damit nicht eine nach Hilfssatz 12 unmögliche Grundfigur vorliegt, muß jetzt

$$\alpha_9^7 \neq 0$$

sein. Nun ist  $\alpha_9^7 \alpha_7^5 \alpha_5^8 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_9^5 \alpha_5^7 \alpha_7^3 \alpha_3^8 = 0$ ; also

$$\alpha_8^5 = 0, \quad \alpha_3^8 = 0.$$

Wenn  $\alpha_8^9 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_8^9 \alpha_3^3 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_8^9 \alpha_3^2 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$  folgen:  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 = 0$ , worauf der Würfel  $W_3 - W_4 + W_7 - W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Also ist

$$\alpha_8^9 = 0.$$

Damit nicht der erledigte Fall vorliegt, daß vier Nullen bei  $W_8$  stehen, muß jetzt

$$\alpha_8^6 \neq 0$$

sein. Aus  $\alpha_8^6 \alpha_6^9 \alpha_3^3 \alpha_3^8 = 0$  folgt daher

$$\alpha_3^8 = 0$$

und sodann aus  $W_3 - W_5 - W_6 + W_8 - W_9$  auch noch

$$\alpha_6^8 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_3 + W_5 - W_6 - W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1. Damit ist der Fall I als unmöglich nachgewiesen.

Im Fall II würde, wenn  $\alpha_3^8 \neq 0$  wäre, aus  $\alpha_3^8 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^8 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^3 \alpha_3^7 = 0$  folgen:  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 = 0$ , worauf der Würfel  $W_3 - W_4 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^8 = 0.$$

Wir nehmen jetzt zunächst an, daß

$$\alpha_9^9 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^2 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5)}$$

ist. Dann ist Station II auf  $W_8$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_8^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_3^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^2 \alpha_2^7 = 0$ ,  $\alpha_8^2 \alpha_2^2 \alpha_3^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^2 \alpha_2^5 \alpha_5^7 = 0$ ; also

$$\alpha_2^8 = 0, \quad \alpha_3^8 = 0, \quad \alpha_5^8 = 0, \quad \alpha_6^8 = 0, \quad \alpha_7^8 = 0, \quad \alpha_1^7 = 0, \quad \alpha_6^7 = 0.$$

Damit nicht der erledigte Fall I vorliegt, muß dann

$$\alpha_6^5 \neq 0 \text{ und folglich } \alpha_5^5 = 0$$

sein. Damit nicht eine nach Hilfssatz 12 unmögliche Grundfigur vorliegt, ist jetzt  $\alpha_5^7 \neq 0$ . Nun ist  $\alpha_5^7 \alpha_7^5 \alpha_2^5 = 0$ . Wenn also  $\alpha_7^2 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_2^5 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 - W_3 \pm (W_5 - W_7)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Also ist  $\alpha_7^2 = 0$  und aus  $W_2 - W_3 \pm (W_5 - W_7)$  folgt noch bei passendem Vorzeichen  $\alpha_2^5 = 0$ . Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_2 - W_3 \pm (W_5 - W_7) + W_8$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1. Die Annahme  $\alpha_8^9 = 0$  ist daher unzulässig. Also ist

$$\alpha_8^9 \neq 0$$

und aus  $\alpha_9^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_9^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_9^8 = 0, \quad \alpha_9^7 = 0.$$

Wenn jetzt  $\alpha_9^r \neq 0$  wäre für  $r = 1$  oder  $4$ , so würde aus  $\alpha_9^r \alpha_r^9 = 0$ ,  $\alpha_9^9 \alpha_9^r \alpha_r^8 = 0$ ,  $\alpha_9^r \alpha_r^7 \alpha_7^9 = 0$  folgen:  $\alpha_9^9 = 0$ ,  $\alpha_r^8 = 0$ ,  $\alpha_r^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_r - W_9 \pm (W_7 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist  $\alpha_9^1 = 0$ ,  $\alpha_9^4 = 0$ , und man erhält das Bild

$$\begin{array}{l|llll} W_5: & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & , & , & , \\ W_6: & 0, & 0, & , & 0 & , & 1, & , & , \\ W_7: & 0, & , & 0, & 0 & 0, & 0, & 1, & \alpha_7^8, \\ W_8: & 0, & , & 0, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1, \alpha_8^9 \\ W_9: & 0, & , & , & 0 & , & , & 0, & 0, 1. \end{array}$$

Nun kann das abgeteilte Quadrat wieder keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten. Denn wenn bei einem solchen der Index 6 oder 9 fehlt, liegt ein Verstoß gegen Satz 19 vor; wenn 7 oder 5 fehlt, verstößt der Würfel  $W_5 - W_6 - W_8 + W_9$  bzw.  $W_6 + W_7 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1<sup>14)</sup>. Wenn schließlich 8 fehlt, so kann ein solcher Zyklus wegen Satz 19 nur in Frage kommen, falls  $\alpha_8^3$  und  $\alpha_7^2$  beide von 0 verschieden sind; aus  $\alpha_8^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_8^3 \alpha_3^5 \alpha_5^8 = 0$  folgt dann aber  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_5^8 = 0$  und hierauf ist nach Satz 19 auch  $\alpha_7^2 \alpha_2^7 \alpha_5^8 \alpha_5^7 = 0$ , also  $\alpha_7^2 = 0$ , so daß sich eine nach Hilfssatz 12 unmögliche Grundfigur ergibt. Das Quadrat kann aber auch keinen von 0 verschiedenen fünfgliedrigen Zyklus enthalten, weil sonst der Würfel  $W_5 + W_6 + W_7 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt<sup>14)</sup>. Daher enthält das Quadrat wieder in einer Zeile vier Nullen. Stehen diese bei  $W_8$ , so verstößt  $W_8$  gegen Satz 5; stehen sie bei  $W_6$ , so liegt der erledigte Fall I vor. Also stehen die vier Nullen bei  $W_9$ .

<sup>14)</sup> Um das einzusehen, verfähre man nach dem Rezept von Fußnote 4).

Nun ist  $\alpha_0^3 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_0^3 \alpha_4^0 \alpha_4^0 = 0$ ,  $\alpha_0^9 \alpha_3^0 \alpha_3^0 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_0^9 \alpha_3^0 \alpha_4^0 \alpha_4^0 = 0$ ,  $\alpha_0^8 \alpha_3^0 \alpha_3^0 \alpha_7^0 = 0$ . Wenn daher  $\alpha_0^3 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_4^0 = 0$ ,  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_7^0 = 0$  und dann würde aus  $W_3 - W_4 + W_7 - W_9$  weiter folgen:  $\alpha_7^0 = 0$ . Jetzt würde aber der Würfel  $W_3 - W_4 + W_7 - W_8 \pm W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen. Also ist

$$\alpha_0^3 = 0 \text{ und folglich } \alpha_0^2 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_9$  ist jetzt die Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_0^2 \alpha_2^0 = 0$ ,  $\alpha_0^2 \alpha_2^3 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_0^2 \alpha_2^3 \alpha_4^0 = 0$ ,  $\alpha_0^9 \alpha_2^0 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_0^9 \alpha_2^0 \alpha_2^3 \alpha_3^0 = 0$ ,  $\alpha_7^0 \alpha_2^0 \alpha_2^3 \alpha_7^0 = 0$ ; also

$$\alpha_2^0 = 0, \alpha_3^0 = 0, \alpha_4^0 = 0, \alpha_2^8 = 0, \alpha_3^8 = 0, \alpha_7^0 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_7^2 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_7^0 = 0$  folgen:  $\alpha_7^0 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 \pm W_3 \pm (W_4 - W_7)$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße<sup>15)</sup>. Also ist

$$\alpha_7^2 = 0.$$

Wenn  $\alpha_7^0 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_7^0 \alpha_2^3 \alpha_2^3 \alpha_3^0 = 0$  folgen:  $\alpha_3^0 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 \pm W_3 \pm (W_4 - W_7) + W_9$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße<sup>15)</sup>. Also ist

$$\alpha_7^0 = 0$$

und die Station II ist auch auf  $W_7$  anwendbar. Daher ist  $\alpha_7^2 \alpha_2^3 \alpha_2^3 \alpha_3^0 = 0$ . Wenn also  $\alpha_2^3 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_3^0 = 0$ , worauf der Würfel  $W_2 \pm W_3 \pm (W_4 + W_7 - W_8)$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße<sup>15)</sup>. Daher ist

$$\alpha_2^3 = 0$$

und aus  $W_2 - W_3 + W_7 + W_8 + W_9$  folgt dann noch

$$\alpha_3^7 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_2 \pm W_3 \pm (W_4 + W_7 - W_8) + W_9$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1<sup>15)</sup>. Damit ist auch Fall II als unmöglich erkannt, also der Hilfssatz 13 bewiesen.

**Hilfssatz 14.** In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die fünf Grundwürfel ( $W_5$  ist ausgelassen)

$$\begin{array}{l|llll} W_1: & 1, & \alpha_1^2, & 0, & 0 & \alpha_1^5, & \alpha_1^6, & \alpha_1^7, & , \\ W_2: & 0, & 1, & \alpha_2^3, & 0 & , & \alpha_2^6, & , & , \\ W_3: & 0, & 0, & 1, & \alpha_3^3 & \alpha_3^5, & , & , & , \\ W_4: & \alpha_4^1, & 0, & 0, & 1 & , & , & \alpha_4^7, & , \\ W_6: & , & , & , & & 0, & 1, & 0, & , & , \end{array}$$

<sup>15)</sup> Das ist analog wie in Fußnote \*) einzusehen.

wo die eingesetzten  $\alpha_i^u$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

**Beweis.** Wie beim Beweis der letzten beiden Hilfssätze ist wieder

$$\alpha_s^1 = 0, \quad \alpha_s^2 = 0, \quad \alpha_s^3 = 0, \quad \alpha_s^4 = 0,$$

$$\alpha_6^1 = 0, \quad \alpha_6^2 = 0, \quad \alpha_6^4 = 0, \quad \alpha_7^1 = 0, \quad \alpha_7^3 = 0, \quad \alpha_7^4 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_8^8, \alpha_9^9$  beide gleich 0 wären, so wäre wegen Satz 5  $\alpha_3^3 \neq 0$ , und dann würde der Zyklus  $\alpha_3^3 \alpha_4^4 \alpha_1^1 \alpha_6^6$  gegen Station II verstoßen. Daher dürfen wir etwa  $\alpha_8^8 \neq 0$  annehmen. Aus  $\alpha_3^3 \alpha_1^1 \alpha_9^9 = 0, \alpha_2^2 \alpha_6^6 \alpha_8^8 = 0$  folgt dann  $\alpha_8^1 = 0, \alpha_2^2 = 0$ , und man gewinnt das Bild

$W_5: 0, 0, 0, 0$	$1, , ,$	$(\alpha_5^9)$	$(\alpha_1^9 = 0 \text{ oder } \neq 0).$
$W_6: 0, 0, , 0$	$0, 1, 0, \alpha_6^8$	$(\alpha_6^9)$	
$W_7: 0, , 0, 0$	$, , 1,$	$(\alpha_7^9)$	
$W_8: 0, 0, ,$	$, , , 1$	$(\alpha_8^9)$	

Wegen Satz 19 kann das eingerahmte Quadrat keinen von 0 verschiedenen viergliedrigen Zyklus enthalten. Daher stehen in einer Zeile drei Nullen, und zwar, damit nicht eine nach Hilfssatz 12 bzw. 13 unmögliche Grundfigur vorliegt, bei  $W_8$ . Wenn dann  $\alpha_6^4 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_4^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_4^4 \alpha_1^4 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_6^4 \alpha_4^4 \alpha_6^8 = 0$  folgen:  $\alpha_8^4 = 0$ ,  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 \pm \pm (W_8 - W_4)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^4 = 0,$$

Wenn wir jetzt annehmen, daß  $\alpha_8^0 = 0$  ist, dann muß wegen Satz 5  $\alpha_3^3 \neq 0$  sein und auf  $W_8$  ist die Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_3^3 \alpha_5^3 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_5^3 \alpha_6^3 = 0$ ,  $\alpha_6^3 \alpha_3^3 \alpha_5^3 = 0$ ,  $\alpha_6^3 \alpha_3^3 \alpha_5^3 \alpha_6^3 = 0$ ; also  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_5^3 = 0$ ,  $\alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_5^6 = 0$ . Damit nicht eine nach Hilfssatz 12 unmögliche Grundfigur vorliegt, muß dann  $\alpha_7^7 \neq 0$ , also  $\alpha_7^7 = 0$  sein und hierauf, damit nicht eine nach Hilfssatz 13 unmögliche Grundfigur vorliegt, auch  $\alpha_7^6 \neq 0$ . Aus  $\alpha_3^3 \alpha_5^3 \alpha_6^3 \alpha_7^3 = 0$ ,  $\alpha_6^6 \alpha_3^6 \alpha_5^6 \alpha_7^6 = 0$  folgt dann aber  $\alpha_7^3 = 0$ ,  $\alpha_3^7 = 0$ , worauf der Würfel  $W_3 - (W_6 + W_8) \pm (W_5 - W_7)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstößt. Die Annahme  $\alpha_8^0 = 0$  war also falsch und es ist

$$\alpha_8^9 \neq 0.$$

Aus  $\alpha_9^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_9^6 \alpha_8^8 \alpha_8^9 = 0$  folgt dann

$$\alpha_9^8 = 0, \quad \alpha_9^6 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_9' \neq 0$  wäre für  $\nu = 1$  oder 2, so würde aus  $\alpha_9' \alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_8^9 \alpha_9' \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_7' \alpha_7^9 \alpha_6^9 = 0$  folgen:  $\alpha_7^9 = 0$ ,  $\alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_6^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_7 - W_9 \pm$

$\pm (W_6 - W_8)$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist  $\alpha_3^1 = 0$ ,  $\alpha_3^2 = 0$ , und man erhält das Bild

$$\begin{array}{l} W_5: 0, 0, 0, 0 \\ W_6: 0, 0, , 0 \\ W_7: 0, , 0, 0 \\ W_8: 0, 0, , 0 \\ W_9: 0, 0, , \end{array} \left| \begin{array}{l} 1, , , , \\ 0, 1, 0, \alpha_3^6, \\ , , 1, , \\ 0, 0, 0, 1, \alpha_3^9 \\ , 0, , 0, 1, \end{array} \right.$$

wo in dem abgeteilten Quadrat wieder kein von 0 verschiedener vier- oder fünfgliedriger Zyklus enthalten ist (wegen Satz 19 bzw. wegen  $W_5 + W_6 + W_7 - W_8 \pm W_9$ ). Das Quadrat enthält also in einer Zeile vier Nullen, und zwar, damit nicht eine nach Hilfssatz 12 oder 13 unmögliche Grundfigur vorliegt, bei  $W_9$ .

Nun ist  $\alpha_3^4 \alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_3^4 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_3^2 \alpha_3^4 \alpha_4^8 = 0$  und nach Satz 18 auch  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_3^8 \alpha_3^9 \alpha_3^4 \alpha_4^6 = 0$ . Wenn also  $\alpha_3^4 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_1^5 = 0$ ,  $\alpha_4^6 = 0$  und aus  $W_1 - W_4 + W_6 - W_9$  würde dann weiter folgen:  $\alpha_3^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_1 - W_4 + W_6 \pm W_8 - W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^2 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Auf  $W_9$  ist jetzt die Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_3^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^4 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_3^8 \alpha_3^3 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_3^8 \alpha_3^9 \alpha_3^3 \alpha_3^8 = 0$ ; also

$$\alpha_3^9 = 0, \alpha_3^5 = 0, \alpha_3^7 = 0, \alpha_3^8 = 0, \alpha_3^6 = 0, \alpha_3^4 = 0.$$

Nun ist  $\alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^6 = 0$ ,  $\alpha_3^9 \alpha_3^3 \alpha_3^5 \alpha_3^6 = 0$ . Wenn also  $\alpha_3^6 \neq 0$  wäre, so wäre  $\alpha_3^3 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ , worauf der Würfel  $W_3 - W_5 + W_6 - W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstieße. Daher ist

$$\alpha_3^6 = 0 \text{ und folglich } \alpha_3^7 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Aus  $\alpha_3^4 \alpha_3^5 = 0$  folgt dann

$$\alpha_3^5 = 0$$

und, damit nicht eine nach Hilfssatz 13 unmögliche Grundfigur vorliegt, muß

$$\alpha_3^8 \neq 0$$

sein. Auf  $W_5$  ist Station II anwendbar. Daher ist  $\alpha_3^5 \alpha_3^7 \alpha_3^8 \alpha_3^3 = 0$ ; also

$$\alpha_3^3 = 0.$$

Aus  $W_2 + W_5 + W_6 - W_7 - W_9$  und aus  $W_3 + W_5 - W_7 - W_8 - W_9$  folgt dann noch

$$\alpha_3^9 = 0, \alpha_3^8 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_3 + W_5 + W_6 - W_7 - W_8 - W_9$  gegen Satz 1. Damit ist der Hilfssatz 14 bewiesen.

Station IV. In einer Grundfigur des  $R_9$  sind die vier Grundwürfel

$$\begin{array}{l|l} W_1: 1, & \alpha_1^2, 0, 0 \\ W_2: 0, & 1, \alpha_2^3, 0 \\ W_3: 0, & 0, 1, \alpha_3^4 \\ W_4: \alpha_4^1, & 0, 0, 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1^5, \alpha_1^6, \alpha_1^7, \\ , \alpha_2^5, , \\ \alpha_3^5, , , \\ , , \alpha_4^7, \end{array}$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^j$  und folglich auch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sind, unmöglich.

Beweis. In dem Quadrat

$$\begin{array}{ccc} 1, & \alpha_5^6, & \alpha_5^7 \\ \alpha_6^5, & 1, & \alpha_6^7 \\ \alpha_7^5, & \alpha_7^6, & 1 \end{array}$$

müssen, da alle zwei- und dreigliedrigen Zyklen gleich 0 sind, in einer Zeile zwei Nullen stehen. Je nachdem das die erste oder zweite oder dritte Zeile ist, liegt aber eine nach Hilfssatz 12 oder 14 oder 13 unmögliche Grundfigur vor.

### § 18.

Das Verschwinden der viergliedrigen Zyklen im  $R_9$ . Station V.

Station V. In einer Grundfigur des  $R_9$  sind alle viergliedrigen Zyklen gleich 0.

Beweis. Wenn wir annehmen, daß der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^1$  von 0 verschieden sei, so haben die ersten vier Grundwürfel nach Satz 3 das Aussehen

$$\begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0, \dots \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0, \dots \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4, \dots \\ W_4: \alpha_4^1, 0, 0, 1, \dots \end{array}$$

Damit keiner der drei Würfel

$$\begin{array}{l} W_1 - W_2 + W_3 - W_4, \\ W_1 + W_2 - W_3 - W_4, \\ W_1 - W_2 - W_3 + W_4 \end{array}$$

gegen Satz 1 verstößt, muß bei geeigneter Numerierung der Koordinaten

$$\begin{array}{l} \alpha_1^5 - \alpha_2^5 + \alpha_3^5 - \alpha_4^5 = \pm 1, \\ \alpha_1^6 + \alpha_2^6 - \alpha_3^6 - \alpha_4^6 = \pm 1, \\ \alpha_1^7 - \alpha_2^7 - \alpha_3^7 + \alpha_4^7 = \pm 1 \end{array}$$

sein und wir dürfen annehmen, daß in den ersten beiden Gleichungen das obere Vorzeichen gilt (vgl. hierzu I, § 9 am Ende). Dann ist

$$\alpha_1^5 \neq 0, \alpha_3^5 \neq 0, \alpha_1^6 \neq 0, \alpha_2^6 \neq 0.$$

Je nachdem in der dritten Gleichung das obere oder untere Vorzeichen gilt, ist außerdem

$$\alpha_1^7 \neq 0, \alpha_4^7 \neq 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_2^7 \neq 0, \alpha_3^7 \neq 0.$$

Eine solche Grundfigur ist aber nach Station IV bzw. III unmöglich.

### § 19.

#### Das Verschwinden der fünfgliedrigen Zyklen im $R_9$ . Station VI.

**Station VI.** In einer Grundfigur des  $R_9$  sind alle fünfgliedrigen Zyklen gleich 0.

**Beweis.** Wenn wir annehmen, daß der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1$  von 0 verschieden sei, so führen wörtlich die gleichen Ausführungen wie in I zu Beginn des § 10 mit dem Unterschied, daß eine Koordinatenspalte mehr zu schreiben und daß „höchstens vier“ statt „höchstens drei“ zu lesen ist, zu dem Bild

$$\begin{array}{l} W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0, 0 \\ W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0, 0 \\ W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4, 0 \\ W_4: 0, 0, 0, 1, \alpha_4^5 \\ W_5: \alpha_5^1, 0, 0, 0, 1 \\ W_6: 0, 0, 0, 0, 0 \\ W_7: 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha_1^6, \quad , \quad , \\ , \quad , \quad , \\ \alpha_3^6, \quad , \quad , \\ , \quad , \quad , \\ , \quad , \quad , \\ 1, \alpha_6^7, \quad , \\ 0, 1, \quad , \quad , \end{array} \right.$$

wo die eingesetzten  $\alpha_i^j$  von 0 verschieden sind. Dagegen kann nicht wie damals geschlossen werden, daß auch  $\alpha_7^4 = 0$  ist.

Wenn  $\alpha_7^8, \alpha_7^9$  beide gleich 0 wären, so müßte wegen Satz 5  $\alpha_7^4 \neq 0$  sein, so daß aus  $\alpha_7^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 = 0, \alpha_7^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^7 = 0, \alpha_7^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^7 \alpha_1^2 = 0, \alpha_7^4 \alpha_1^2 = 0, \alpha_7^4 \alpha_1^2 \alpha_5^7 = 0$  folgen würde:  $\alpha_1^6 = 0, \alpha_5^6 = 0, \alpha_1^7 = 0, \alpha_4^7 = 0, \alpha_5^7 = 0$ , worauf der Wz.  $W_1 \pm W_4 \pm W_5 \pm W_6 + W_7$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstieße<sup>16)</sup>. Daher dürfen wir etwa

$$\alpha_7^8 \neq 0$$

<sup>16)</sup> Als ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinate kämen nur die achte und neunte in Betracht. Diese sind

$$\alpha_1^8 \pm \alpha_4^8 \pm \alpha_5^8 \pm \alpha_6^8, \quad \alpha_1^9 \pm \alpha_4^9 \pm \alpha_5^9 \pm \alpha_6^9,$$

und bei passender Vorzeichenkombination ist keine davon eine ganze von 0 verschiedene Zahl (vgl. die Begründung in I, S. 434).

annehmen. Aus  $\alpha_8^1 \alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^6 \alpha_6^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_4^6 \alpha_6^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_4^7 \alpha_7^8 = 0$  folgt dann

$$\alpha_8^1 = 0, \quad \alpha_3^3 = 0, \quad \alpha_8^6 = 0, \quad \alpha_8^7 = 0.$$

Wenn nun  $\alpha_8^2$  oder  $\alpha_8^5$  von 0 verschieden wäre, so hätte man das Bild (Koordinatenspalten in leicht ersichtlicher zweckmäßiger Reihenfolge)

$$\begin{array}{l|l} W_7: 1, \alpha_7^8, 0, 0, 0 & 0, \quad , 0, \\ W_8: 0, 1, \alpha_8^2, 0, 0 & 0, \quad , \quad , \\ W_2: 0, 0, 1, \alpha_2^3, 0 & 0, 0, 0, \text{ bzw. } W_5: 0, 0, 1, \alpha_5^1, 0 \\ W_3: 0, 0, 0, 1, \alpha_3^6 & 0, \alpha_3^4, 0, \quad W_1: 0, 0, 0, 1, \alpha_1^6 \quad \alpha_1^2, 0, 0, \\ W_6: \alpha_6^7, 0, 0, 0, 1 & 0, 0, 0, \quad W_6: \alpha_6^7, 0, 0, 0, 1 \quad 0, 0, 0, \end{array}$$

wo die Nullen rechts vom Strich bereits als solche bekannt sind, während die links vom Strich aus Satz 3 nebst Zusatz folgen. Beim ersten Bild würde der Würfel  $\pm W_7 \pm W_8 \pm W_3 \pm W_2 \pm W_6$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen<sup>17)</sup>. Also ist  $\alpha_8^2 = 0$  und mit Rücksicht auf dieses Resultat würde beim zweiten Bild der Würfel  $W_7 - W_8 \pm W_5 \pm W_1 \pm W_6$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen. Daher ist

$$\alpha_8^2 = 0, \quad \alpha_8^5 = 0.$$

Wenn  $\alpha_8^4 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_8^4 \alpha_1^5 \alpha_5^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_8^4 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^1 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^7 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^6 = 0$  folgen:  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_4^8 = 0$ ,  $\alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_4^7 = 0$ ,  $\alpha_5^7 = 0$ ,  $\alpha_4^6 = 0$ . Außerdem wäre alsdann

$$\begin{array}{l} \alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^8 = 0^{13}), \text{ also } \alpha_8^8 = 0, \\ \alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^1 \alpha_1^7 = 0 \quad , \text{ also } \alpha_1^7 = 0, \\ \alpha_7^8 \alpha_7^8 \alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 = 0 \quad , \text{ also } \alpha_5^6 = 0, \\ \alpha_4^5 \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^4 = 0 \quad , \text{ also } \alpha_7^4 = 0. \end{array}$$

<sup>17)</sup> Von den drei Zahlen  $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 - \alpha_3^4$ ,  $\alpha_1^4 - \alpha_2^4 + \alpha_3^4$ ,  $-\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$  liegen wenigstens zwei zwischen  $-1$  und  $1$ . Sind es etwa die ersten beiden, so liegt von den Zahlen  $\alpha_1^8 + \alpha_2^8 - \alpha_3^8$ ,  $\alpha_1^8 - \alpha_2^8 + \alpha_3^8$  wieder wenigstens eine zwischen  $-1$  und  $1$ . Ist es etwa die erste, so liegt auch  $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 - \alpha_3^7 \pm \alpha_4^7 \pm \alpha_5^7$  bei passenden Vorzeichen zwischen  $-1$  und  $1$ . Man kann also die Vorzeichen so wählen, daß keine Koordinate eine ganze von 0 verschiedene Zahl ist.

<sup>18)</sup> Um das einzusehen, muß man unter Annahme des Gegenteils die an diesem Zyklus beteiligten Grundwürfel aufbauen:

$$\begin{array}{l|l} W_8: 1, \alpha_8^1, 0, 0, 0 & 0, 0, 0. \\ W_4: 0, 1, \alpha_4^1, 0, 0 & 0, 0, 0. \\ W_6: 0, 0, 1, \alpha_6^1, 0 & 0, 0, 0. \\ W_1: 0, 0, 0, 1, \alpha_1^6 & \alpha_1^7, 0, \quad , \\ W_6: \alpha_6^8, 0, 0, 0, 1 & 0, 0, \alpha_6^7. \end{array}$$

Dabei sind die Nullen rechts vom Strich bereits als solche bekannt, die links vom Strich ergeben sich aus Satz 3 nebst Zusatz. Jetzt verstößt der Würfel  $W_8 - W_4 \pm W_6 \pm$

Jetzt würde aber der Würfel  $W_1 - W_4 \pm W_5 \pm W_6 \pm W_7 \pm W_8$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen. Daher ist

$$\alpha_8^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_8^9 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Aus  $\alpha_9^6 \alpha_6^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_9^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_9^8 \alpha_8^9 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_9^6 = 0, \quad \alpha_9^7 = 0, \quad \alpha_9^8 = 0.$$

Ferner ist  $\alpha_9^1 \alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^6 \alpha_6^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$  (wie sich unter Annahme des Gegenteils wieder durch Aufbau der an diesen Zyklen beteiligten Grundwürfel ergibt); also

$$\alpha_9^1 = 0, \quad \alpha_9^3 = 0.$$

Wenn  $\alpha_9^2 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_9^2 \alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_9^2 \alpha_2^3 \alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_9^2 \alpha_2^3 \alpha_3^6 \alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^2 \alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_9^3 \alpha_3^2 \alpha_2^8 \alpha_8^3 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_9^2 \alpha_2^7 = 0$  folgen:  $\alpha_2^9 = 0$ ,  $\alpha_3^9 = 0$ ,  $\alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_2^8 = 0$ ,  $\alpha_3^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 = 0$ . Außerdem wäre alsdann

$$\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_9^2 \alpha_2^6 = 0, \text{ also } \alpha_2^6 = 0,$$

$$\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_9^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0, \text{ also } \alpha_3^7 = 0,$$

$$\alpha_2^9 \alpha_3^2 \alpha_2^3 \alpha_3^6 \alpha_6^8 = 0, \text{ also } \alpha_6^8 = 0,$$

$$\alpha_9^2 \alpha_2^3 \alpha_3^6 \alpha_6^7 \alpha_7^9 = 0, \text{ also } \alpha_7^9 = 0.$$

Jetzt würde aber der Würfel  $W_2 + W_3 + W_6 - W_7 + W_8 \pm W_9$  bei passendem Vorzeichen gegen Satz 1 verstoßen. Daher ist

$$\alpha_9^2 = 0.$$

Wenn  $\alpha_9^5 \neq 0$  wäre, so würde aus  $\alpha_9^5 \alpha_5^1 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_9^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_9^5 \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_9^5 \alpha_5^9 \alpha_5^1 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_9^5 \alpha_5^9 \alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_9^5 \alpha_5^7 = 0$  folgen:  $\alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_5^8 = 0$ ,  $\alpha_7^8 = 0$ . Außerdem wäre alsdann

$$\alpha_9^5 \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^7 \alpha_7^9 = 0, \text{ also } \alpha_7^9 = 0,$$

$$\alpha_9^5 \alpha_5^9 \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_6^8 = 0, \text{ also } \alpha_6^8 = 0,$$

$$\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_9^5 \alpha_5^1 \alpha_1^7 = 0, \text{ also } \alpha_1^7 = 0,$$

$$\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_9^5 \alpha_5^8 \alpha_5^6 = 0, \text{ also } \alpha_5^6 = 0.$$

Jetzt würde aber der Würfel  $W_1 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  gegen Satz 1 verstoßen. Daher ist

$$\alpha_9^5 = 0 \text{ und folglich } \alpha_9^4 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

$\pm (W_1 - W_4)$  bei passenden Vorzeichen gegen Satz 1. Analog ist im folgenden stets zu verfahren, wenn das Verschwinden eines fünfgliedrigen Zyklus behauptet wird. Natürlich kann man die Spalten links vom Strich weglassen; es kommt nur darauf an, daß rechts vom Strich, also in denjenigen Koordinatenspalten, deren Nummern von denen der Grundwürfel verschieden sind, genügend viele Nullen in zweckmäßiger Anordnung bekannt sind.

Aus  $\alpha_9^4 \alpha_1^5 \alpha_5^1 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_0^4 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_0^4 \alpha_1^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_2^9 \alpha_3^4 \alpha_1^8 = 0$ ,  $\alpha_2^9 \alpha_0^4 \alpha_1^5 \alpha_5^8 = 0$ ,  
 $\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_0^4 \alpha_1^7 = 0$  folgt jetzt

$$\alpha_1^9 = 0, \quad \alpha_1^8 = 0, \quad \alpha_5^9 = 0, \quad \alpha_1^8 = 0, \quad \alpha_5^8 = 0, \quad \alpha_4^7 = 0.$$

Außerdem ist alsdann

$$\alpha_0^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_0^4 \alpha_1^6 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_4^6 = 0,$$

$$\alpha_7^8 \alpha_8^9 \alpha_0^4 \alpha_1^5 \alpha_5^7 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_5^7 = 0,$$

$$\alpha_8^9 \alpha_0^4 \alpha_1^5 \alpha_5^1 \alpha_1^8 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_1^8 = 0,$$

$$\alpha_0^4 \alpha_1^5 \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_0^9 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_0^9 = 0,$$

$$\alpha_4^5 \alpha_5^1 \alpha_1^6 \alpha_0^7 \alpha_7^4 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_7^4 = 0.$$

Aus  $W_1 + W_4 - W_6 + W_7 + W_8 - W_9$  und aus  $W_1 + W_4 + W_5 - W_6 +$   
 $+ W_8 + W_9$  folgt dann noch

$$\alpha_1^7 = 0, \quad \alpha_0^8 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 + W_4 + W_5 - W_6 + W_7 + W_8 - W_9$   
 gegen Satz 1. Damit ist die Station VI bewiesen.

## § 20.

### Station VII und Endresultat.

**Station VII.** In einer Grundfigur des  $R_9$  sind alle sechsgliedrigen Zyklen  
 gleich 0.

**Beweis.** Wenn wir annehmen, daß der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1$  von 0  
 verschieden sei, so haben die ersten sechs Grundwürfel nach Satz 3 d  
 sehen

$$W_1: 1, \alpha_1^2, 0, 0, 0, 0, \dots$$

$$W_2: 0, 1, \alpha_2^3, 0, 0, 0, \dots$$

$$W_3: 0, 0, 1, \alpha_3^4, 0, 0, \dots$$

$$W_4: 0, 0, 0, 1, \alpha_4^5, 0, \dots$$

$$W_5: 0, 0, 0, 0, 1, \alpha_5^6, \dots$$

$$W_6: \alpha_6^1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots$$

Damit der Würfel  $W_1 - W_2 + W_3 - W_4 + W_5 - W_6$  nicht gegen Satz 1  
 verstößt, muß etwa

$$\alpha_1^7 - \alpha_2^7 + \alpha_3^7 - \alpha_4^7 + \alpha_5^7 - \alpha_6^7 = \pm 1 \text{ oder } \pm 2$$

sein. Daher sind wenigstens zwei der Zahlen  $\alpha_1^7, \alpha_2^7, \alpha_3^7$  oder der Zahlen  $\alpha_2^7, \alpha_1^7, \alpha_6^7$   
 von 0 verschieden. Nötigenfalls durch zyklische Umnummerierung der ersten

sechs Koordinaten und Grundwürfel, wodurch der Zyklus  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1$  in sich übergeht, können wir erreichen, daß

$$\alpha_1^7 \neq 0, \quad \alpha_3^2 \neq 0$$

ist. Aus  $\alpha_1^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_1^3 \alpha_3^7 = 0$ ,  $\alpha_1^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_1^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_1^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 = 0$  folgt dann

$$\alpha_1^7 = 0, \quad \alpha_2^7 = 0, \quad \alpha_3^7 = 0, \quad \alpha_4^7 = 0, \quad \alpha_5^7 = 0, \quad \alpha_6^7 = 0,$$

Damit  $W_7$  nicht gegen Satz 5 verstößt, muß dann etwa

$$\alpha_7^8 \neq 0$$

sein und aus  $\alpha_1^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_2^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_3^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$ ,  $\alpha_6^1 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$  folgt dann weiter

$$\alpha_1^8 = 0, \quad \alpha_2^8 = 0, \quad \alpha_3^8 = 0, \quad \alpha_4^8 = 0, \quad \alpha_5^8 = 0, \quad \alpha_6^8 = 0, \quad \alpha_7^8 = 0.$$

Außerdem ist aber auch  $\alpha_8^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 = 0$ , wie man sofort sieht, wenn man unter Annahme des Gegenteils die an diesem Zyklus beteiligten Grundwürfel unter Berücksichtigung von Satz 3 nebst Zusatz aufbaut. Daher ist

$$\alpha_8^4 = 0 \text{ und folglich } \alpha_8^9 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Aus  $\alpha_9^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_2^2 \alpha_2^3 \alpha_3^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_3^3 \alpha_3^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_3^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ ,  $\alpha_6^1 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$  folgt weiter

$$\alpha_9^1 = 0, \quad \alpha_2^9 = 0, \quad \alpha_3^9 = 0, \quad \alpha_4^9 = 0, \quad \alpha_5^9 = 0, \quad \alpha_6^9 = 0, \quad \alpha_7^9 = 0, \quad \alpha_8^9 = 0.$$

Nun ist aber auch  $\alpha_5^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_7^8 \alpha_8^9 = 0$ , wie sich wieder durch Aufbau der beteiligten Grundwürfel ergibt. Daher ist

$$\alpha_9^5 = 0 \text{ und folglich } \alpha_9^4 \neq 0 \text{ (wegen Satz 5).}$$

Aus  $\alpha_4^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_4^4 \alpha_4^9 = 0$ ,  $\alpha_4^4 \alpha_4^5 \alpha_5^9 = 0$ ,  $\alpha_4^4 \alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^9 = 0$ ,  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 = 0$ ,  $\alpha_4^5 \alpha_5^9 \alpha_5^6 \alpha_6^1 = 0$ ,  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_1^9 = 0$ ,  $\alpha_4^5 \alpha_5^6 \alpha_6^1 \alpha_1^7 \alpha_1^9 = 0$  folgt dann

$$\alpha_1^9 = 0, \quad \alpha_4^9 = 0, \quad \alpha_5^9 = 0, \quad \alpha_6^9 = 0, \quad \alpha_4^8 = 0, \quad \alpha_5^8 = 0,$$

$$\alpha_6^8 = 0, \quad \alpha_4^7 = 0, \quad \alpha_5^7 = 0.$$

Hierauf folgt aus  $W_1 + W_4 + W_5 - W_6 + W_8 + W_9$  auch noch

$$\alpha_1^8 = 0.$$

Jetzt verstößt aber der Würfel  $W_1 - W_4 - W_5 + W_6 - W_7 - W_8 + W_9$  gegen Satz I. Damit ist die Station VII bewiesen.

Mit Station VII sind wir am Ende der Schwierigkeiten. Denn jetzt folgt aus I, Satz 8, angewandt auf den Fall  $n = 9$ , daß in einer Grundfigur des  $R_9$  überhaupt alle Zyklen gleich 0 sind. Das besagt aber:

**Satz 20.** Im  $R_9$  ist die Minkowskische Vermutung richtig.

## Fixpunktklassen. I\*).

Von

Franz Wecken in Marburg a. d. Lahn.

### Einleitung.

In dem Bestreben, einen Überblick über die verschiedenen Klassen stetiger Abbildungen eines Polyeders in sich zu gewinnen, hat man eine Reihe von Homotopieinvarianten aufgesucht, d. h. Eigenschaften der Abbildungen, die bei stetiger Abänderung (Deformation) der Abbildung erhalten bleiben, also Eigenschaften der Abbildungsklasse darstellen. Solche sind z. B. der Abbildungsgrad und die Eigenschaft, wesentlich oder unwesentlich zu sein [vgl. AH., Kap. XII<sup>1)</sup>], ferner die Lefschetzsche Zahl  $\Lambda$  der Abbildung bzw. (zufolge dem allgemeinen Fixpunktsatz, AH., S. 542) für homogen  $n$ -dimensionale Polyeder die algebraische Fixpunktzahl  $(-1)^n \Lambda$ .

Die geometrische Fixpunktzahl, d. h. die Zahl der geometrisch verschiedenen Fixpunkte, ist bekanntlich nicht deformationsinvariant; dagegen ist die kleinste geometrische Fixpunktzahl der Abbildungen einer Klasse  $f$ , kurz die Fixpunkt-Mindestzahl  $m$  von  $f$ , nach Definition eine Eigenschaft der Abbildungsklasse, also, sofern sie sich durch Daten einer beliebigen Abbildung aus  $f$  ausdrücken läßt, eine Homotopieinvariante. Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung von  $m$  gab es jedoch bisher nicht; eine triviale Abschätzung für  $m$  liefert der Existenzsatz (AH., S. 531), den man so aussprechen kann: es ist  $m > 0$ , wenn  $\Lambda \neq 0$  ist. Dies ist ungefähr alles, was man auf Grund der Homologietheorie über  $m$  aussagen kann. Für Deformationen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten liefert diese Abschätzung die richtigen Werte: es ist hier  $m = 0$ , falls  $\Lambda = 0$ , und  $m = 1$ , falls  $\Lambda \neq 0$  ist (AH. XIV, § 4).

Im allgemeinen ist jedoch diese Abschätzung zu roh; eine bessere versuchte J. Nielsen zu erhalten, indem er unter Heranziehung der Fundamentalgruppe eine Einteilung der Fixpunkte jeder Abbildung in *Fixpunktklassen* vornahm [N., S. 289<sup>1)</sup>]. Nielsen vermutete (N., S. 298), daß die algebraische Zahl der

\*) Diese Arbeit, deren Veröffentlichung umständehalber in drei Mitteilungen vorgesehen ist, wurde von der Philosophischen Fakultät der Philipps-Universität zu Marburg als Habilitationsschrift angenommen.

<sup>1)</sup> Wir beziehen uns mehrfach auf folgende Arbeiten: P. Alexandroff-H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935 (zitiert als AH.); J. Nielsen, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I*, Acta math. 50 (1927), S. 189–358 (zitiert als N.); K. Reidemeister, *Automorphismen von Homotopiekettenringen*, Math. Annalen 112 (1936), S. 586–593 (zitiert als R. 1); K. Reidemeister, *Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe*, Leipzig 1938 (zitiert als R. 2).

Fixpunkte einer jeden Fixpunktklasse sich definieren lasse und deformationsinvariant sei; doch wurde dies (in den mir zugänglichen Schriften) auch für die von ihm eingehend behandelten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten nicht allgemein bewiesen. Ist die Vermutung richtig, so kann sich durch Deformation die Zahl  $\mu$  der „wesentlichen“ Fixpunktclassen, d. h. derjenigen mit einer von Null verschiedenen algebraischen Fixpunktzahl, nicht ändern, und man hat außerdem  $m \geq \mu$ . Auch die schärfere Aussage  $m = \mu$  wurde von Nielsen bereits vermutet<sup>2)</sup>. In der vorliegenden Arbeit werden unter gewissen recht allgemeinen Voraussetzungen diese Vermutungen bestätigt.

In Teil I wird die algebraische Fixpunktzahl einer Fixpunktklasse definiert und als deformationsinvariant nachgewiesen. Dazu sind in § 1 die bekannten Sätze über die algebraische Fixpunktzahl einer Abbildungsklasse im Anschluß an AH. XIV zusammengestellt, wobei sich zeigt, daß durch Einführung der „Vielfachheit“ (an Stelle des Index) eines Fixpunktes die Lefschetzsche Zahl  $A$  für beliebige endliche euklidische Polyeder als algebraische Fixpunktzahl gedeutet werden kann. Außerdem sind in § 1 die wichtigsten in der Arbeit häufig vorkommenden Begriffe eingeführt. In § 2 wird nachgewiesen, daß algebraische Fixpunktzahlen bei einer Abbildung  $f$  sich nicht nur für das ganze Polyeder  $\mathfrak{P}$ , sondern auch für gewisse Teilbereiche  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{P}$ , insbesondere für jede Fixpunktklasse definieren lassen. Die hiermit eingeführte algebraische Fixpunktzahl  $v(f, \mathfrak{A})$  auf einer Menge  $\mathfrak{A}$  erweist sich weiterhin als zweckmäßige Begriffsbildung. In § 3 werden die Fixpunktclassen bei einer Abbildung  $f$  zu denen bei einer zu  $f$  homotopen, insbesondere „benachbarten“ Abbildung  $g$  in Beziehung gesetzt; hierbei ergibt sich für die wesentlichen Classen eine eindeutige Zuordnung. Indem man die Fixpunkte zugeordneter Fixpunktclassen bei  $f$  und  $g$  zu derselben Klasse rechnet, erhält der Begriff „Fixpunktclass“ einen erweiterten Sinn<sup>3)</sup>; jedoch ist die Aussage, daß ein Fixpunkt bei  $f$  und einer bei  $g$  zu derselben Klasse gehören, im allgemeinen nur dann sinnvoll, wenn entweder  $f$  und  $g$  benachbart sind oder wenn man einen bestimmten  $f$  mit  $g$  verbindenden Deformationsweg im Auge hat. In diesem Sinne wird bewiesen, daß die algebraische Fixpunktzahl jeder Fixpunktclass bei Deformation der Abbildung konstant bleibt. Insbesondere ist invariant die Zahl  $\mu$  der wesentlichen Fixpunktclassen, sowie auch für jede Zahl  $v = \pm 1, \pm 2, \dots$  die Zahl  $n(v)$  der Fixpunktclassen mit der Fixpunktzahl  $v$ ; es gilt die Ungleichung  $m \geq \mu$ .

<sup>2)</sup> Für spezielle Polyeder, bei denen man alle Abbildungsklassen gut übersehen kann, wurde durch J. Nielsen [Math. Annalen 82 (1921), S. 83–93], L. E. J. Brouwer (ebenda, S. 94–96) und H. Hopf [Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 762–774]  $m = \mu$  nachgewiesen, indem zunächst  $m \geq \mu$  und dann durch Angabe von Beispielen  $m \leq \mu$  gezeigt wurde.

<sup>3)</sup> Auch Nielsen benutzte ihn in diesem Sinne.

In Teil II wird unter Verwendung der Fundamentalgruppe  $\Gamma$  von  $\mathfrak{P}$  die Frage untersucht, ob und wann die in Teil I, § 3 erklärte Zuordnung zwischen den Fixpunktclassen homotoper Abbildungen sich eindeutig über die ganze Abbildungsklasse fortsetzen läßt. Dazu wird zunächst die durch eine Abbildung erzeugte Automorphismenfamilie von  $\Gamma$  eingeführt und als homotopieinvariant erwiesen. Indem man neben der Abbildung  $f$  eine Kurve  $\mathbb{C}$  von  $p$  nach  $f(p)$  auszeichnet und bei Deformation von  $f$  mitdeformiert, wird ein bestimmter Automorphismus  $H$  deformationsinvariant festgelegt. Er erzeugt nach N. und R. 1<sup>1)</sup> eine Einteilung von  $\Gamma$  in Klassen, die wir als  $H$ -Klassen bezeichnen; sie lassen sich den sämtlichen Fixpunktclassen eineindeutig zuordnen, wenn man die bei einer bestimmten Abbildung wirklich auftretenden Fixpunktclassen um (im allgemeinen unendlich viele) „leere“ vermehrt. Hierdurch wird die Zuordnung zwischen den Fixpunktclassen homotoper Abbildungen eineindeutig. Es wird dann mit Hilfe der universellen Überlagerung von  $\mathfrak{P}$  eine andere Definition der Fixpunktclassen (nach N.) angegeben. Sie steht in engem Zusammenhang mit dem Ergebnis von R. 1, der Reidemeisterschen Spureninvariante. Diese wird, wie schon in R. 1 angedeutet, aufgefaßt als System der (auf die  $H$ -Klassen bezogenen) algebraischen Fixsimplexzahlen der einzelnen Fixpunktclassen. Zur praktischen Berechnung der Fixpunktzahl jeder Fixpunktclass ist damit ein Weg gewiesen. Mittels der  $H$ -Klassen wird dann eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß die Zuordnung der Fixpunktclassen in der ganzen Abbildungsklasse vom (Deformations-) Wege unabhängig ist; diese Bedingung ist insbesondere für die topologischen Selbstabbildungen der geschlossenen Flächen mit einem Geschlecht größer als Eins stets erfüllt. Ein Beispiel wird angegeben, bei dem die Zuordnung vom Wege wesentlich abhängt. Schließlich wird noch an einem weiteren Beispiel gezeigt, daß eine eindeutige Zuordnung der Fixpunktzahlen zu den  $H$ -Klassen nicht stets möglich ist.

In Teil III, der von Teil II unabhängig ist, wird gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen über das Polyeder jede Abbildungsklasse eine Abbildung enthält, bei der nur wesentliche Fixpunktclassen auftreten und jede von diesen durch einen einzigen Fixpunkt vertreten ist. Damit ist die Nielsensche Vermutung  $m = \mu$  bewiesen und gleichzeitig gezeigt, daß eine weitere gegen Deformation invariante Aufteilung der Fixpunkte in Unterklassen nicht möglich ist. Der Beweis wird zunächst für die Klasse der Identität geführt; hier ist  $\mu = 0$  oder 1.  $\mathfrak{P}$  wird als zweidimensional zusammenhängend vorausgesetzt, und diese Forderung kann sicher nicht wesentlich abgeschwächt werden. Man kann sich auf „kleine“ Deformationen  $g$  beschränken; das sind solche, bei denen der Bildpunkt  $g(x)$  stets in einer bestimmten Umgebung  $\mathcal{U}(x)$  des Originalpunktes  $x$  liegt.  $\mathcal{U}(x)$  kann mittels einer Zellenzerlegung oder einer Metrik erklärt werden. Der Beweis verläuft in der Weise, daß die ge-

wünschte Abbildungsfunktion  $g(x)$  auf allen Zellen einer bestimmten Zerlegung von  $\mathfrak{P}$  sukzessive nach aufsteigenden Dimensionszahlen erklärt wird. Im Hinblick auf spätere Anwendung wird eine Verschärfung des Satzes bewiesen, bei der vorausgesetzt ist, daß  $g(x)$  auf einem Teilpolyeder  $\mathfrak{P}_1$  von  $\mathfrak{P}$  bereits als kleine Deformation definiert ist; ist  $\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1$  zusammenhängend, so läßt sich  $g$  über  $\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1$  mit höchstens einem Fixpunkt stetig fortsetzen. Sodann wird ein Verfahren angegeben, um eine Abbildung  $f$ , die nur reguläre Fixpunkte und unter diesen zwei zur gleichen Klasse gehörige  $p$  und  $q$  besitzt, in einem  $p$  und  $q$  enthaltenden zu den übrigen Fixpunkten von  $f$  fremden Gebiet  $\mathfrak{G}$  so durch Deformation in eine Abbildung  $g$  abzuändern, daß die zwei Fixpunkte  $p$  und  $q$  durch einen einzigen ersetzt werden. Hiernach gelangt man offenbar in endlich vielen Schritten zu einer Abbildung, bei der alle Fixpunkte paarweise zu verschiedenen Klassen gehören, also jede Klasse nur durch einen Fixpunkt vertreten ist. Die Fixpunkte mit der Vielfachheit Null — den unwesentlichen Fixpunktklassen entsprechend — lassen sich dann leicht beseitigen. Als Hilfsmittel zur Konstruktion von  $g$  wird eine Funktion  $g_1$  angegeben, die zwar in  $\mathfrak{G}$  noch die Fixpunkte  $p$  und  $q$  und sogar noch weitere besitzt, doch so, daß alle diese in einem Gebiet  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G}$  enthalten sind, in dem  $g_1$  als „kleine Deformation“ anzusehen ist. Auf  $g_1$  und  $\mathfrak{U}$  wird dann der weiter oben gewonnene Satz angewendet, wodurch die Fixpunkte in  $\mathfrak{U}$  zu einem einzigen verschmolzen werden. Über das Polyeder  $\mathfrak{P}$  wird hier vorausgesetzt, daß jede Kurve in  $\mathfrak{P}$ , die zwei reguläre Punkte verbindet, unter Festhaltung der Endpunkte so deformiert werden kann, daß sie ganz in einem dreidimensional zusammenhängenden Gebiet in  $\mathfrak{P}$  verläuft. Die Frage bleibt offen, ob und wie diese scharfe Voraussetzung, die sogar die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten ausschließt, abgeschwächt werden kann.

### Teil I.

## Fixpunktzahlen und Fixpunktklassen.

### § 1.

#### Die algebraische Fixpunktzahl einer Abbildungsklasse.

Die Gültigkeit des „allgemeinen Fixpunktsatzes“ (AH. XIV, § 3, 2) wird in diesem Paragraphen auf beliebige, nicht notwendig homogen-dimensionale, zusammenhängende endliche Polyeder ausgedehnt. Einige Begriffe sind hierzu etwas abweichend zu definieren.

$\mathfrak{P}$  ist stets ein *endliches euklidisches Polyeder*; es sei in einen euklidischen Raum  $\mathfrak{R}^N$  eingebettet, auf den sich der *Abstand*  $\varrho(p, q)$  zweier Punkte und der Begriff „*geradlinig*“ beziehen. Diese Einbettung ist jedoch nicht wesentlich, denn da in den zu beweisenden Hauptsätzen nur von topologischen Eigen-

schaften die Rede sein wird, gelten sie ohne weiteres auch für krumme Polyeder und ohne Bezugnahme auf eine bestimmte Metrik. — Mit *Zerlegungen* von Polyedern sind stets simpliziale Zerlegungen, mit *Komplexen* Simplizialkomplexe gemeint; Simplexe sind, wenn nichts anderes bemerkt, offen. Ist  $K$  ein Zerlegungskomplex des Polyeders  $\mathfrak{P}$  mit dem *Verbindungspolynom*<sup>4)</sup>  $a(u_i)$ , so wird  $\mathfrak{P} = |K| = |a(u_i)|$  geschrieben. Ist das Simplex  $a$  aus  $K$  im Rande eines anderen Simplex aus  $K$  enthalten, so heißt  $a$  *Nebensimplex*, anderenfalls *Grundsimplex* von  $K$ . Eine Zerlegung, bei der die Durchmesser aller Simplexe kleiner als  $\varepsilon$  sind, heißt eine  $\varepsilon$ -Zerlegung. — Punktmengen werden im folgenden durchweg mit deutschen Buchstaben bezeichnet.  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  ist die Vereinigungsmenge von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$  der Durchschnitt,  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$  die Differenz, falls  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$  (d. h.  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{A}$  enthalten) ist.  $\overline{\mathfrak{A}}$  ist die abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}} - \overline{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{A}$  die Begrenzung von  $\mathfrak{A}$  in einem topologischen Raume  $\mathfrak{R}$  (AH., S. 40). Nur für Simplexe  $a$  bezeichne  $\dot{a}$  stets den Simplexrand. — Alle vorkommenden Abbildungen sollen stetig sein. Bilden die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  eine Menge  $m$  in ein Polyeder  $\mathfrak{P}$  ab, so wird die untere Grenze der Abstände  $\varrho(f(x), g(x))$  für  $x \in m$  als *Abstand*  $\varrho(f, g)$  der beiden Abbildungsfunktionen bezeichnet. — Im Falle  $m \subset \mathfrak{P}$  heißt ein Punkt  $x$  mit  $f(x) = x$  *Fixpunkt* bei  $f$ .

Der Beweis des Fixpunktsatzes beruht wesentlich auf dem Approximationssatz, den wir aus AH. VIII, § 2, 3 in folgender Form übernehmen: Ist  $f(x)$  eine Abbildung des Polyeders  $\mathfrak{P}$  in das Polyeder  $\mathfrak{P}'$  und  $K'$  eine  $\varepsilon$ -Zerlegung von  $\mathfrak{P}'$ , so gibt es für hinreichend kleines  $\eta > 0$  zu jeder  $\eta$ -Zerlegung  $K$  von  $\mathfrak{P}$  eine zu  $f$  homotope Simplizialabbildung  $g$  von  $K$  in  $K'$  mit  $\varrho(f, g) < \varepsilon$ .

Unabhängig hiervon führt eine zu AH. XIV, § 3, 5–6 analoge Überlegung zu folgendem Ergebnis ( $n$  sei die Dimension von  $\mathfrak{P}$ ): Ist  $K$  eine  $\varepsilon$ -Zerlegung von  $\mathfrak{P}$ ,  $K_0$  eine Unterteilung der baryzentrischen Unterteilung von  $K$ ,  $f_0$  eine simpliziale Abbildung von  $K_0$  in  $K$ , so gibt es eine Unterteilung  $K_n$  von  $K_0$  und eine zu  $f_0$  homotope simpliziale Abbildung  $f_n$  von  $K_n$  in  $K$  mit  $\varrho(f_0, f_n) \leq 2n\varepsilon$ , so daß bei  $f_n$  als Fixsimplexe nur Grundsimplxe auftreten. Beim Beweise tritt eine Kette von Abbildungen  $f_0, f_1, \dots, f_n$  auf, und  $f_{r+1}$  entsteht aus  $f_r$  durch Abänderung lediglich in der Umgebung derjenigen  $r$ -dimensionalen Fixsimplexe bei  $f_r$ , die Nebensimplxe sind.

In Erweiterung der in AH. X, § 3, 4 und XIV, § 3, 1 aufgestellten Definitionen setzen wir fest: jeder Punkt von  $\mathfrak{P}$ , der in  $\mathfrak{P}$  eine zum  $r$ -dimensionalen euklidischen Raum homöomorphe Umgebung hat ( $r \geq 0$ ), heißt *regulärer Punkt* von  $\mathfrak{P}$ . Jeder isolierte Fixpunkt bei einer Selbstabbildung von  $\mathfrak{P}$ , der regulärer Punkt von  $\mathfrak{P}$  ist, heißt *regulärer Fixpunkt*. Jedem regu-

<sup>4)</sup> Vgl. R. 2, S. 49; 88.

lären Fixpunkt ist ein Index  $j$  (AH., S. 535) und eine Dimensionszahl  $r$  zugeordnet. Für die zu beweisenden Sätze ist es nun zweckmäßig, statt mit dem Index, mit der *Vielfachheit*

$$v = (-1)^j$$

zu rechnen und als *algebraische Zahl einer endlichen Menge von regulären Fixpunkten* die Summe ihrer Vielfachheiten zu bezeichnen<sup>5)</sup>. Bei einer simplizialen Selbstabbildung, die als Fixsimplexe nur Grundsimplexe hat, liefert dann (nach AH., S. 538) jedes Fixsimplex  $\alpha'$  bei positiver (negativer) Überdeckung genau einen regulären Fixpunkt der Vielfachheit  $v = (-1)^r$  ( $v = -(-1)^r$ ).

Aus den beiden erwähnten Sätzen und der Hopfschen Spurformel (AH., S. 530) ergibt sich dann leicht folgender Hilfssatz: *Ist  $f(x)$  eine Selbstabbildung des  $n$ -dimensionalen Polyeders  $\mathfrak{P}$  und  $K$  eine  $\varepsilon$ -Zerlegung von  $\mathfrak{P}$ , so gibt es eine Unterteilung  $K_1$  von  $K$  und eine zu  $f$  homotope simpliziale Abbildung  $g$  von  $K_1$  in  $K$  mit  $\varrho(f, g) \leq (2n+1)\varepsilon$  und nur regulären Fixpunkten; deren algebraische Zahl ist  $A_f$ , die Lefschetzsche Zahl von  $f$ .*

Analog zu AH. XIV, § 3, 4 beweist man nun, daß jede Abbildung mit nur regulären Fixpunkten die gleiche algebraische Fixpunktzahl hat wie jede hinreichend gut approximierende nach dem Hilfssatz gewonnene Simplizialabbildung. Da  $A_f$  innerhalb der Abbildungsklasse  $\mathfrak{f}$  konstant ist und  $\mathfrak{f}$  mit dem Abstand  $\varrho(f, g)$  einen metrischen Raum darstellt, folgt der allgemeine Fixpunktsatz:

*In jeder Klasse  $\mathfrak{f}$  von Selbstabbildungen des Polyeders  $\mathfrak{P}$  liegen die Abbildungen mit nur regulären Fixpunkten dicht und jede von ihnen hat als algebraische Fixpunktzahl die Lefschetzsche Zahl  $A_f$  der Abbildungsklasse  $\mathfrak{f}$ .*

Wir schreiben demnach der Abbildung  $f$  und der Klasse  $\mathfrak{f}$  die algebraische Fixpunktzahl  $A_f = A_{\mathfrak{f}}$  zu. — Ist z. B.  $\mathfrak{f}$  die Klasse der Identität, also die Menge der stetigen Deformationen von  $\mathfrak{P}$  in sich, so ist die algebraische Fixpunktzahl  $A_f$  gleich der Eulerschen Charakteristik  $\chi(\mathfrak{P})$  des Polyeders.

## § 2.

### Die algebraische Fixpunktzahl einer Fixpunktklasse.

Die Definition der Fixpunktklassen, von der in diesem Paragraphen ausgegangen wird, ist nicht die von Nielsen (N., § 31) zugrunde gelegte, jedoch von ihm als gleichwertig nachgewiesen. Sie vermeidet die Verwendung der universellen Überlagerung und ist für beliebige zusammenhängende Polyeder sinnvoll. Mittels der reellwertigen Ortsfunktion  $\vartheta(x) = \varrho(x, f(x))$  gelingt

<sup>5)</sup> Die Sinnvollheit dieser Bezeichnung erhellt daraus, daß z. B. ein regulärer Fixpunkt  $p$ , der dadurch zustande kommt, daß eine volle Umgebung  $U(p)$  auf  $p$  abgebildet ist, stets die Vielfachheit  $v = +1$  hat.

es leicht, die Endlichkeit der Zahl der Fixpunktklassen nachzuweisen. Die Funktion  $\vartheta(x)$  ermöglicht eine Zerlegung der Fixpunktmenge von  $f(x)$  in endlich viele Teilmengen, für deren jede sich eine algebraische Fixpunktzahl definieren läßt; danach kann man einerseits die algebraische Fixpunktzahl jeder Fixpunktklasse erklären, andererseits die algebraische Zahl  $v(f, \mathfrak{A})$  der Fixpunkte in einer beliebigen Punktmenge  $\mathfrak{A}$ , deren Begrenzung fixpunktfrei ist.

**Definition.** Zwei Fixpunkte  $p$  und  $q$  der Abbildung  $f(x)$  gehören dann und nur dann zu derselben Fixpunktklasse, wenn es eine von  $p$  nach  $q$  verlaufende Kurve  $\mathbb{C}$  gibt, die mit ihrem Bilde  $f(\mathbb{C})$  eine in  $\mathfrak{P}$  zusammenziehbare geschlossene Kurve  $f(\mathbb{C})\mathbb{C}^{-1}$  ergibt.

Man kann statt dessen auch sagen: "... wenn es einen Weg  $\mathbb{C}$  von  $p$  nach  $q$  gibt, der zu seinem Bilde  $f(\mathbb{C})$  homotop ist." Damit ist gemeint, daß die Kurve  $\mathbb{C}$  unter Festhaltung der Endpunkte stetig in die Kurve  $f(\mathbb{C})$  deformiert werden kann, so daß punktweise  $x$  in  $f(x)$  übergeht.

Man erkennt leicht, daß die angegebene Beziehung zwischen  $p$  und  $q$  reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, also wirklich eine Klasseneinteilung liefert. Am Beispiel des Kreises überzeugt man sich weiter, daß tatsächlich bei einer Abbildung mehrere Fixpunktklassen auftreten können.

Zufolge der Retrakteigenschaft der Polyeder gilt der folgende Satz (vgl. AH. VIII, § 6, Satz III und Beweis von Satz II):

**Hilfssatz 1.** Es gibt eine nur von  $\mathfrak{P}$  abhängige Zahl  $\alpha > 0$  und eine für  $0 \leq \tau \leq 1$  und für alle  $x, y \in \mathfrak{P}$  mit  $\varrho(x, y) < \alpha$  erklärte stetige Funktion  $a(x, y, \tau)$  mit Werten aus  $\mathfrak{P}$ , so daß

$$a(x, y, 0) = x, \quad a(x, y, 1) = y, \quad a(x, x, \tau) = x$$

ist. Bezeichnet dann  $d(x, y)$  bei festen  $x, y$  den Durchmesser der Kurve

$$\{a(x, y, \tau) \mid (0 \leq \tau \leq 1)\},$$

so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\alpha(\varepsilon) > 0$ , so daß aus  $\varrho(x, y) < \alpha(\varepsilon)$  stets  $d(x, y) < \varepsilon$  folgt.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten. — Als Korollar ergibt sich hieraus das Folgende (Satz II, II' a. a. O.):  $f$  und  $g$  seien zwei Abbildungen irgendeines topologischen Raumes in  $\mathfrak{P}$ . Ist  $\varrho(f, g) < \alpha$ , so sind  $f$  und  $g$  homotop; ist  $\varrho(f, g) < \alpha(\varepsilon)$ , so gibt es von  $f$  nach  $g$  einen Deformationsweg mit einem Durchmesser kleiner als  $\varepsilon$ . Als Deformationsweg ist hier eine von einem reellen Parameter  $\tau$  abhängige stetige Schar von Abbildungen  $f_\tau(x)$  bezeichnet.

Es sei  $\vartheta(x) = \vartheta_\tau(x) = \varrho(x, f_\tau(x))$ ;  $\alpha$  habe die Bedeutung von Hilfssatz 1. Dann gilt

**Hilfssatz 2.** Sind  $p$  und  $q$  zwei Fixpunkte der Abbildung  $f$ , die zu verschiedenen Klassen gehören, so gibt es auf jeder  $p$  mit  $q$  verbindenden Kurve einen Punkt  $x$  mit  $\theta(x) \geq \alpha$ .

**Beweis.** Sonst gäbe es eine Kurve  $\mathbb{C}$  von  $p$  nach  $q$ , auf der überall  $\theta(x) < \alpha$  wäre. Nach Hilfssatz 1 ließe sich dann das Bild  $f(\mathbb{C})$  auf  $\mathfrak{P}$  stetig in  $\mathbb{C}$  deformieren unter Festhaltung von  $p = f(p)$  und  $q = f(q)$ . Das widerspricht der Voraussetzung, daß  $p$  und  $q$  verschiedenen Klassen angehören.

Wir bezeichnen vorübergehend mit  $[\theta(x) > \zeta]$ ,  $[\theta(x) \leq \epsilon]$  usw. die Menge der  $x$  mit  $\theta(x) > \zeta$  bzw. mit  $\theta(x) \leq \epsilon$  usw.

**Hilfssatz 3.** Ist  $0 \leq \zeta_1 < \zeta_2$ , so zerfällt  $[\theta(x) < \zeta_2]$  in endlich oder unendlich viele paarweise fremde Gebiete in  $\mathfrak{P}^0$ . Nur endlich viele hiervon enthalten ein  $x$  mit  $\theta(x) \leq \zeta_1$ .

**Beweis.** Die Menge  $\Omega = [\theta(x) < \zeta_2]$  ist wegen Stetigkeit von  $\theta(x)$  eine in  $\mathfrak{P}$  offene<sup>7)</sup> Menge. Rechnet man je zwei Punkte aus  $\Omega$ , die sich in  $\Omega$  durch einen Streckenzug verbinden lassen, in eine Klasse, so ergibt sich eine Einteilung der Menge  $\Omega$  in Klassen, die offenbar Gebiete in  $\mathfrak{P}$ , und zwar die maximalen in  $\Omega$  enthaltenen Gebiete, sind. Es gibt nur diese eine Zerlegung von  $\Omega$  in Gebiete. Aus jedem derselben sei, soweit möglich, ein Punkt  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit  $\theta(x_n) \leq \zeta_1$  gewählt. Gäbe es unendlich viele  $x_n$ , so sei  $y$  ein Häufungspunkt; es wäre auch  $\theta(y) \leq \zeta_1$ , also läge  $y$  in einem der Gebiete und damit auch eine Umgebung  $\mathfrak{U}(y)$  und unendlich viele der  $x_n$ , was nicht möglich ist, da die Gebiete paarweise punktfremd sind.

Von  $\theta(x)$  wurde hier nur benutzt, daß es eine stetige reelle Funktion ist.

**Satz 1.** Die Zahl der Fixpunktklassen ist bei jeder Abbildung endlich.

**Beweis.** Die Punkte  $x$  mit  $\theta(x) = 0$ , d. h. die Fixpunkte, sind nach Hilfssatz 3 nur in endlich vielen maximalen Gebieten aus  $[\theta(x) < \zeta_2]$  enthalten. Wird  $\zeta_2 = \alpha$  (nach Hilfssatz 1) gewählt, so gehören zufolge Hilfssatz 2 alle Fixpunkte eines Gebietes auch derselben Fixpunktklasse an; daher gibt es nur endlich viele solche Klassen.

Jede Fixpunktklasse ist eine abgeschlossene Punktmenge und hat von jeder anderen Fixpunktklasse einen von Null verschiedenen Abstand. — Eine leichte Folgerung aus dem allgemeinen Fixpunktsatz (S. 664) ist der

**Hilfssatz 4.** Sind  $g$  und  $h$  zwei homotope Selbstabbildungen von  $\mathfrak{P}$  mit nur regulären Fixpunkten, und ist  $\mathfrak{B}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{P}$ , so daß  $g(x) = h(x)$

<sup>6)</sup> D. h. zusammenhängende und in  $\mathfrak{P}$  offene Mengen, vgl. <sup>7)</sup>.

<sup>7)</sup> Vgl. AH., S. 44. Da die von uns zu betrachtenden Punktmengen fast immer Teilmengen eines festen Polyeders  $\mathfrak{P}$  sein werden; sind die Bezeichnungen „offen“, „abgeschlossen“ usw. (auch ohne den Zusatz „in  $\mathfrak{P}$ “) im allgemeinen als Relativbegriffe bezüglich  $\mathfrak{P}$  zu verstehen.

für  $x \in \mathfrak{P} - \mathfrak{B}$  ist und  $g$  und  $h$  auf  $\mathfrak{B}$ <sup>\*)</sup> fixpunktfrei sind, so haben  $g$  und  $h$  in  $\mathfrak{B}$  die gleiche algebraische Fixpunktzahl.

Denn da die Fixpunktzahlen für  $g$  und  $h$  in  $\mathfrak{P}$  sowie in  $\mathfrak{P} - \mathfrak{B}$  übereinstimmen, müssen sie es auch in  $\mathfrak{B}$ .

Hilfssatz 5. Ist  $0 < \zeta_1 < \zeta_2$  und sind  $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_m$  die maximalen nach Hilfssatz 3 in  $[\vartheta, (x) < \zeta_2]$  enthaltenen Gebiete, die einen Punkt  $x$  mit  $\vartheta(x) \leq \zeta_1$  enthalten, so gibt es ein nur von  $\mathfrak{P}$  und  $\zeta_1$  abhängiges  $\zeta_0 > 0$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $g$  eine Abbildung mit nur regulären Fixpunkten und  $\varrho(f, g) < \zeta_0$ , so ist die algebraische Zahl  $v_k$  der Fixpunkte bei  $g$  in  $\mathfrak{G}_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) durch  $f$  eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 1 an und setzen  $\zeta_0 = \alpha\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)$ . Es ist  $0 < \zeta_0 < \zeta_1 < \zeta_2$ .  $g$  und  $g'$  seien gewählt mit  $\varrho(f, g) < \zeta_0$ ,  $\varrho(f, g') < \zeta_0$  und mit nur regulären Fixpunkten; die bei  $g$  und  $g'$  auftretenden Fixpunkte liegen dann in  $\mathfrak{G}_1 + \dots + \mathfrak{G}_m$ .  $v_i$  und  $v'_i$  seien die algebraischen Fixpunktzahlen von  $g$  bzw.  $g'$  in  $\mathfrak{G}_i$ . Wir zeigen, daß für jedes  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ )  $v_k = v'_k$  ist.

Dazu sei  $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap [\vartheta(x) < \zeta_1]$ ; jeder Fixpunkt bei der Abbildung  $b(x) = a(f(x), g(x), \tau)$  oder  $b(x) = a(f(x), g'(x), \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) liegt in  $\mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{B}_m$ , da  $\varrho(f, b) \leq \frac{\zeta_1}{2}$  ist. Es sei nun

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \mathfrak{P} - \sum_i \mathfrak{G}_i, \\ a\left(g(x), f(x), \frac{\vartheta(x) - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) & \text{für } x \in \sum_{i \neq k} (\mathfrak{G}_i - \mathfrak{B}_i), \\ a\left(g'(x), f(x), \frac{\vartheta(x) - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) & \text{für } x \in \mathfrak{G}_k - \mathfrak{B}_k, \\ g(x) & \text{für } x \in \sum_{\neq k} \mathfrak{B}_i, \\ g'(x) & \text{für } x \in \mathfrak{B}_k. \end{cases}$$

Man erkennt nun leicht:  $h(x)$  ist stetig; die Abbildungen  $f, g, g', h$  sind homotop. Da  $g$  und  $h$  auf  $\sum_{i \neq k} \mathfrak{B}_i$  übereinstimmen, haben beide Abbildungen nach Hilfssatz 4 auf  $\mathfrak{P} - \sum_{i \neq k} \mathfrak{B}_i$ , also auf  $\mathfrak{B}_k$ , die gleiche algebraische Fixpunktzahl, d. h. es ist  $v_k = v'_k$ , w. z. b. w.

Man wird hiernach  $v_k$  als algebraische Fixpunktzahl der Abbildung  $f$  im Gebiet  $\mathfrak{G}_k$  bezeichnen. Diese Begriffsbildung läßt sich noch etwas verallgemeinern: Es sei  $\mathfrak{A}$  irgendeine Teilmenge von  $\mathfrak{P}$ ;  $\mathfrak{A}$ , die Begrenzung von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{P}$ , sei bei  $f$  fixpunktfrei.  $\zeta_2$  sei das Minimum von  $\vartheta, (x)$  auf  $\mathfrak{A}$  und  $\zeta_1 = \frac{1}{2} \zeta_2$ . Dann liegt jedes der Gebiete  $\mathfrak{G}_i$  des Hilfssatzes 5 (und damit die Fixpunkte aller zu  $f$  hinreichend benachbarten Abbildungen) entweder ganz im Innern

\*) Begrenzung von  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{P}$ ; vgl. <sup>7)</sup> und S. 663.

von  $\mathfrak{A}$  oder von  $\mathfrak{P} - \mathfrak{A}$ . Nach Hilfssatz 5 hat also jede hinreichend gute Approximation von  $f$ , die nur reguläre Fixpunkte hat, auf  $\mathfrak{A}$  sowie auf  $\mathfrak{P} - \mathfrak{A}$  eine durch  $f$  festgelegte Fixpunktzahl. Dies ermöglicht folgende

**Definition.** Ist  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$  und ist  $\mathfrak{A}$  bei  $f$  fixpunktfrei, so werde als *algebraische Fixpunktzahl* bei  $f$  in  $\mathfrak{A}$ ,  $v(f, \mathfrak{A})$ , die *algebraische Fixpunktzahl* auf  $\mathfrak{A}$  bei einer (und damit bei jeder) hinreichend wenig von  $f$  verschiedenen Abbildung mit nur regulären Fixpunkten bezeichnet.

Ist  $\mathfrak{A}$  bei  $f$  fixpunktfrei, so ist  $v(f, \mathfrak{A}) = 0$ . — Jedem isolierten Fixpunkt  $p$  (bzw. einer kleinen Umgebung von ihm) kann nun auch eine Vielfachheit zugeschrieben werden (nicht aber ein Index, wenn  $p$  nicht regulär ist). — Es ist  $v(f, \mathfrak{P}) = A_f$ .  $v(f, \mathfrak{A})$  ist, soweit erklärt, eine additive Mengenfunktion.

Da nach S. 666 die verschiedenen Fixpunktklassen von Null verschiedene Abstände voneinander haben, läßt sich jede Fixpunktklasse  $f$  in eine offene Umgebung  $\mathfrak{U}(f)$  einschließen, die ebenfalls von den übrigen Fixpunkten einen Abstand  $\neq 0$  hat; und die Zahl  $v(f, \mathfrak{U}(f))$  ist offenbar durch  $f$  eindeutig bestimmt. Daher kann man stets von der *algebraischen Fixpunktzahl der Fixpunktklasse*  $f$  reden, indem man darunter  $v(f, \mathfrak{U}(f))$  versteht. Nach Nielsen nennen wir eine Fixpunktklasse mit der Fixpunktzahl Null eine *unwesentliche*, jede andere eine *wesentliche* Klasse.

### § 3.

#### Die Deformationsinvarianz.

Durch die auf S. 665 gegebene Definition werden die Fixpunktklassen nicht, wie bei Nielsen, mit Marken versehen, die ihre individuelle Wiedererkennung beim Übergang zu einer homotopen Abbildung ermöglichen. (Dies wird erst in Teil II geschehen.) Man muß daher, um Eigenschaften einer Fixpunktklasse als deformationsinvariant nachweisen zu können, eine Zuordnung zwischen den Fixpunktklassen verschiedener Abbildungen erst herstellen. Durch Hilfssatz 5, der zeigt, wie beim Übergang zu einer „benachbarten“ Abbildung die Fixpunkte nur langsam wandern und insbesondere unter Erhaltung der algebraischen Fixpunktzahlen nach Gebieten  $\mathbb{G}_2$  getrennt bleiben, ist hierzu der Weg gewiesen; für irgend zwei homotope Abbildungen erhält man eine Zuordnung durch Zwischenschaltung einer Folge von Abbildungen, deren jede zur vorhergehenden benachbart ist. Jedoch kann man die so erklärte Zuordnung unter Anknüpfung an einen bestimmten Deformationsweg<sup>9)</sup> unmittelbar herstellen durch eine Definition, von der wir im folgenden ausgehen. Nur zum Nachweis der Konstanz der Fixpunktzahlen

<sup>9)</sup> Vgl. S. 665.

bedarf es des Zurückgehens auf benachbarte Abbildungen, wobei sich die zugrunde gelegte Definition mit der oben angedeuteten „natürlichen“ als gleichwertig erweist.

**Definition.**  $f_\tau(x)$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) sei eine stetige Schar von Selbstabbildungen des Polyeders  $\mathfrak{P}$ ;  $f_i^{(0)}, f_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) seien die Fixpunktklassen bei  $f_0$  bzw. bei  $f_1$ . Wir sagen, daß die Klassen  $f_i^{(0)}$  und  $f_k^{(1)}$  einander durch den Deformationsweg  $\{f_\tau\}$  zugeordnet werden, wenn folgendes gilt: Es gibt Punkte  $p_0 \in f_i^{(0)}$ ,  $p_1 \in f_k^{(1)}$  und eine stetige Kurve  $\mathfrak{C} = \{p_\tau, (0 \leq \tau \leq 1)\}$ , so daß die Kurve  $\mathfrak{C} = \{f_\tau(p_\tau), (0 \leq \tau \leq 1)\}$  zu  $\mathfrak{C}$  homotop ist<sup>10)</sup>.

Mit den soeben verwendeten Bezeichnungen gilt

**Satz 2.** Der Deformationsweg  $\{f_\tau\}$  ordnet einer Teilmenge der  $f_i^{(0)}$  eine Teilmenge der  $f_k^{(1)}$  eineindeutig zu.

**Beweis.** Es ist zu zeigen, daß einer Fixpunktklasse bei  $f_0$  nur höchstens eine Fixpunktklasse bei  $f_1$  zugeordnet ist; aus Symmetriegründen gilt dann auch dasselbe mit Vertauschung von  $f_0$  und  $f_1$ . Es seien also die Bedingungen der obigen Definition erfüllt, und außerdem sei der Klasse  $f_i^{(0)}$  eine weitere Klasse  $f_l^{(1)}$  zugeordnet; es sei etwa  $p_0^* \in f_i^{(0)}$ ,  $p_1^* \in f_l^{(1)}$ ;  $p_\tau^*, q_\tau$  stetig ( $0 \leq \tau \leq 1$ ),  $q_0 = p_0$ ,  $q_1 = p_1^*$ ; die Kurven  $\{p_\tau^* (0 \leq \tau \leq 1)\}$ ;  $f_\tau(p_\tau^*) (1 \geq \tau \geq 0)$  und  $\{q_\tau (0 \leq \tau \leq 1)\}$ ;  $f_0(q_\tau) (1 \geq \tau \geq 0)$  seien zusammenziehbar. Zu zeigen ist, daß die Klassen  $f_k^{(1)}$  und  $f_l^{(1)}$  identisch sind.

$\mathfrak{C}^*$  sei die Kurve  $\{p_\tau (1 \geq \tau \geq 0)\}$ ;  $q_\tau (0 \leq \tau \leq 1)$ ;  $p_\tau^* (0 \leq \tau \leq 1)$ ; sie läßt sich unter Festhaltung der Endpunkte  $p_1$  und  $p_1^*$  nach Voraussetzung deformieren in

$$\mathfrak{C}_0 = \{f_\tau(p_\tau) (1 \geq \tau \geq 0); f_0(q_\tau) (0 \leq \tau \leq 1); f_\tau(p_\tau^*) (0 \leq \tau \leq 1)\}.$$

Wir erklären für  $0 \leq \sigma \leq 1$  eine Kurve  $\mathfrak{C}_\sigma$  durch

$$\mathfrak{C}_\sigma = \{f_{\tau + \sigma(1-\tau)}(p_\tau) (1 \geq \tau \geq 0); f_\sigma(q_\tau) (0 \leq \tau \leq 1); f_{\tau + \sigma(1-\tau)}(p_\tau^*) (0 \leq \tau \leq 1)\};$$

sie leistet die stetige Deformation von  $\mathfrak{C}_0$  in  $\mathfrak{C}_1 = f_1(\mathfrak{C}^*)$  unter Festhaltung der Endpunkte. Damit ist  $\mathfrak{C}^*$  in  $f_1(\mathfrak{C}^*)$  deformiert, also gehören in der Tat  $p_1$  und  $p_1^*$  zu derselben Fixpunktklasse bei  $f_1$ , d. h.  $f_k^{(1)}$  und  $f_l^{(1)}$  sind identisch. w. z. b. w.

**Satz 3.** Irgend zwei durch einen Deformationsweg einander zugeordnete Fixpunktklassen haben die gleiche algebraische Fixpunktzahl. Die unzugeordnet bleibenden Klassen sind unwesentlich.

**Beweis.** Wir zerlegen den Beweis in drei Schritte.

I. Es sei zunächst der Durchmesser des Deformationsweges kleiner als  $\zeta_0$ , d. h. es sei  $\varrho(f_\sigma, f_\tau) < \zeta_0$  für  $0 \leq \sigma \leq \tau \leq 1$ . Hierbei sei  $\zeta_0$  die nach Hilfs-

<sup>10)</sup> Vgl. S. 665.

satz 5 durch  $\zeta_2 = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\zeta_1 = \frac{\alpha}{4}$  bestimmte Zahl, wobei  $\alpha$  die Zahl aus Hilfssatz 1 ist;  $\zeta_0$  hängt also nur von  $\mathfrak{P}$  ab. Sind  $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_m$  die nach Hilfssatz 5 der Funktion  $f_0$  zugeordneten Gebiete, so sind in ihnen die sämtlichen Fixpunkte von  $f_0$  und  $f_1$  enthalten, erstere nach Klassen getrennt; weiter ist nach Hilfssatz 5  $v(\bar{f}_0, \mathfrak{G}_k) = v(\bar{f}_1, \mathfrak{G}_k)$ , wenn  $\bar{f}_0$  und  $\bar{f}_1$  zu  $f_0$  bzw.  $f_1$  hinreichend eng benachbarte Abbildungen mit nur regulären Fixpunkten sind; daher ist nach Definition von  $v(f, \mathfrak{A})$   $v(f_0, \mathfrak{G}_k) = v(f_1, \mathfrak{G}_k)$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Es ist nur zu zeigen, daß Fixpunkte  $p_0$  von  $f_0$  und  $p_1$  von  $f_1$ , die in demselben  $\mathfrak{G}_k$  enthalten sind, in zugeordneten Klassen liegen, dann folgt die Behauptung durch Summation über die zu derselben Klasse gehörigen Gebiete. Es sei also  $f_0(p_0) = p_0$ ,  $f_1(p_1) = p_1$ ,  $p_0 \in \mathfrak{G}_k$ ,  $p_1 \in \mathfrak{G}_k$ ;  $\{p_\tau (0 \leq \tau \leq 1)\}$  sei eine in  $\mathfrak{G}_k$  liegende Kurve von  $p_0$  nach  $p_1$ . Für  $0 \leq \tau \leq 1$  ist  $\varrho_{f_0}(p_\tau) < \frac{\alpha}{2}$ , d. h.

$$\varrho(p_\tau, f_0(p_\tau)) < \frac{\alpha}{2},$$

weiter  $\varrho(f_0(p_\tau), f_\tau(p_\tau)) \leq \varrho(f_0, f_\tau) < \zeta_0 < \frac{\alpha}{4}$ , daher

$$\varrho(p_\tau, f_\tau(p_\tau)) < \alpha;$$

die Kurven  $\{p_\tau (0 \leq \tau \leq 1)\}$  und  $\{f_\tau(p_\tau) (0 \leq \tau \leq 1)\}$  sind nach Hilfssatz 1 homotop und  $p_0$  und  $p_1$  gehören zu zugeordneten Klassen, wie behauptet. Damit ist für kleine Deformationswege der Satz bewiesen.

II. Wir zeigen die Transitivität der Klassenzuordnung, d. h. wir beweisen: Sind  $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}$  Fixpunktklassen bei  $f_0$  bzw.  $f_1$  bzw.  $f_2$  und ist  $\{f_\tau (0 \leq \tau \leq 2)\}$  ein Deformationsweg, der  $f^{(0)}$  und  $f^{(1)}$  sowie  $f^{(1)}$  und  $f^{(2)}$  einander zuordnet, so ordnet er auch  $f^{(0)}$  und  $f^{(2)}$  einander zu. Sei also  $p_0 \in f^{(0)}$ ,  $p_1 \in f^{(1)}$ ,  $p'_1 \in f^{(2)}$ ,  $p'_2 \in f^{(2)}$ ;

$$\{f_\tau(p'_\tau) (0 \leq \tau \leq 1)\} \text{ homotop zu } \{p_\tau (0 \leq \tau \leq 1)\},$$

$$\{f_\tau(p'_\tau) (1 \leq \tau \leq 2)\} \text{ homotop zu } \{p'_\tau (1 \leq \tau \leq 2)\},$$

$$\{f_1(p'_\tau) (0 \leq \tau \leq 1)\} \text{ homotop zu } \{p'_\tau (0 \leq \tau \leq 1)\} \quad (p'_0 = p_1).$$

Dann setzen wir

$$p_\tau = p'_{2-\tau} \quad (1 \leq \tau \leq 2).$$

Die Kurve

$$\{p_\tau (0 \leq \tau \leq 2)\}$$

läßt sich deformieren in

$$\{f_\tau(p_\tau) (0 \leq \tau \leq 1); f_1(p_\tau) (1 \leq \tau \leq \frac{3}{2}); f_{2-\tau}(p_\tau) (\frac{3}{2} \leq \tau \leq 2)\},$$

dann durch Einschaltung von

$$\{f_\tau(p_\tau) (0 \leq \tau \leq 1); f_{1+\sigma(2-\tau)}(p_\tau) (1 \leq \tau \leq \frac{3}{2});$$

$$f_{2-\tau+2\sigma(2-\tau)}(p_\tau) (\frac{3}{2} \leq \tau \leq 2)\} \quad (0 \leq \sigma \leq 1)$$

in  $\{f_\tau(p_\tau) \mid (0 \leq \tau \leq 2)\}$ , womit die Zuordnung zwischen  $f^{(0)}$  und  $f^{(2)}$  hergestellt ist.

III. Da sich offenbar jeder Deformationsweg in endlich viele Abschnitte zerlegen läßt, die die Voraussetzung unter I erfüllen, ergibt sich für Fixpunktklassen, die an einem Ende des Deformationsweges wesentlich sind, die Behauptung des Satzes im allgemeinen Falle durch Einschaltung einer geeigneten Kette von paarweise benachbarten Abbildungen zwischen den beiden vorgegebenen und Anwendung von I und II; denn eine wesentliche Fixpunktklasse muß in jeder eingeschalteten Abbildung wieder als solche auftreten. Im anderen Falle ist an beiden Enden die Fixpunktzahl Null, also nichts weiter zu beweisen.

Man kann also sagen, daß bei Deformation der Abbildung *im kleinen* jede wesentliche Fixpunktklasse erhalten bleibt und ihre Fixpunktzahl konstant bleibt. Daraus folgt natürlich auch, daß eine unwesentliche Fixpunktklasse durch Deformation der Abbildung nicht wesentlich werden kann.

Welche weiteren Aussagen sich gewinnen lassen im Sinne einer stetigen Abhängigkeit der Fixpunktklassen vom Deformationsparameter, mag hier dahingestellt bleiben.

(Eingegangen am 29. 5. 1940.)

# Charakterisierung stetiger Kurven mit Hilfe eines allgemeinen Richtungsbegriffs für Punktmengen.

Von

K. Wagner in Berlin.

## § 1.

### Einleitende Betrachtungen.

Die folgenden Untersuchungen machen im wesentlichen von zwei Definitionen Gebrauch, die deshalb jetzt schon in der Einleitung in präziser Form vorausgeschickt werden sollen. Die Untersuchungen beziehen sich auf die Ebene.

1. Definition. Eine Punktmenge  $P$  soll dann speziell als ein Kontinuum  $K$  bezeichnet werden, wenn 1.  $P$  abgeschlossen und 2. zusammenhängend ist. Dabei nennt man die abgeschlossene Menge  $P$  zusammenhängend, wenn sich  $P$  nicht in eine Summe zweier von der Nullmenge verschiedener, punktfremder, abgeschlossener Mengen zerlegen läßt.

Die angegebene Definition für das Kontinuum  $K$  läßt sich in dem Falle, daß  $K$  beschränkt ist, also m. a. W. ganz im Endlichen liegt, noch in eine etwas anschaulichere Form fassen. Es sei nämlich  $K$  ein gegebenes Kontinuum, das zunächst nicht beschränkt zu sein braucht. Man nennt eine endliche Punktfolge  $k_1, k_2, \dots, k_n$  und zwar, die aus lauter Punkten von  $K$  besteht, eine „Kette von  $k_1$  nach  $k_n$  der Feinheit  $\varepsilon$ “, wobei  $\varepsilon$  eine gegebene Zahl  $> 0$  ist, wenn die Entfernung je zweier aufeinander folgender Punkte  $k_\nu$  und  $k_{\nu+1}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ , der Folge höchstens  $\varepsilon$  beträgt. Gäbe es nun zwei Punkte von  $K$ , die sich nicht durch eine Kette einer vorgegebenen Feinheit  $\varepsilon > 0$  verbinden ließen, so kann man leicht  $K$  in zwei von der Nullmenge verschiedene, fremde, abgeschlossene Punktmengen zerlegen im Widerspruch zur Definition 1<sup>1)</sup>. Es folgt also:

Ia. In einem Kontinuum  $K$  sind je zwei Punkte durch Ketten jeder beliebig vorgegebenen Feinheit  $\varepsilon > 0$  verbindbar.

Betrachtet man nun speziell nur beschränkte Punktmengen, so gilt auch die Umkehrung<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Alexandroff und Hopf, Topologie I, S. 116 u. 117, § 6, 1.

Ib. Eine beschränkte, abgeschlossene Menge, in der je zwei Punkte durch Ketten jeder beliebig vorgegebenen Feinheit  $\varepsilon > 0$  verbindbar sind, ist ein Kontinuum<sup>2)</sup>).

Wir kommen jetzt zur zweiten Definition. Es sei  $P$  eine beliebig gegebene Punktmenge in der Ebene und  $p$  ein fester Punkt von  $P$ . Ferner sei  $\delta$  eine Zahl  $> 0$ . Wir bezeichnen zunächst die Gesamtheit der Punkte in der Ebene, deren Entfernung von dem Punkt  $p$  kleiner oder gleich  $\delta$  ist, als die  $\delta$ -Umgebung von  $p$ . Die  $\delta$ -Umgebung von  $p$  ist also m. a. W die Kreisscheibe um  $p$  mit dem Radius  $\delta$  einschließlich der Peripherie. Unter einem Kreissektor oder kurz Sektor der  $\delta$ -Umgebung verstehen wir genau bei Verwendung von Polarkoordinaten  $r, \varphi$  mit dem Nullpunkt  $p$  eine Punktmenge mit den Koordinaten  $0 \leq r \leq \delta$  und  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ , wobei  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zwei gegebene Winkelgrößen sind. Man bezeichnet  $\varphi_2 - \varphi_1$  als den Öffnungswinkel des Sektors. Wir sagen von mehreren solchen Sektoren, daß sie fremd sind, wenn je zwei derselben bis auf  $p$  keinen weiteren Punkt gemeinsam haben. Nach einem bekannten Überdeckungssatz gibt es höchstens abzählbar viele fremde Sektoren einer  $\delta$ -Umgebung. Nunmehr sei  $\varepsilon > 0$  eine gegebene Zahl. Vielleicht gibt es dann eine feste  $\delta$ -Umgebung von  $p$ , in der wir alle Punkte von  $P$  mit einer Gesamtheit von fremden, also von höchstens abzählbar vielen Sektoren überdecken können, wobei überdies noch der Öffnungswinkel eines jeden der Sektoren höchstens  $\varepsilon$  ist. Wenn dies möglich ist, so wollen wir kurz von einer Überdeckung von  $P$  in der  $\delta$ -Umgebung von  $p$  der Feinheit  $\varepsilon$  sprechen und die Sektoren als überdeckende Sektoren der Feinheit  $\varepsilon$  bezeichnen. Wir wollen einmal den Fall annehmen, daß es zu jedem gegebenen  $\varepsilon > 0$  eine entsprechende  $\delta$ -Umgebung von  $p$  gibt, in der sich die Punkte von  $P$  mit fremden Sektoren der Feinheit  $\varepsilon$  überdecken lassen. Wir behaupten, daß wir dann zu jedem  $\varepsilon > 0$  ebenfalls eine  $\delta$ -Umgebung von  $p$  angeben können, in der sich die Punkte von  $P$  aber bereits mit endlich vielen fremden Sektoren der Feinheit  $\varepsilon$  überdecken lassen<sup>3)</sup>. Denn nach der Annahme läßt sich  $P$  in einer  $\delta$ -Umgebung zunächst mit vielleicht abzählbar vielen Sektoren der Feinheit  $\varepsilon$  überdecken. Jeder dieser Sektoren wird von zwei Radien begrenzt, auf denen mit Ausnahme von  $p$  kein weiterer Punkt von  $P$  liegt. Denn läge auf einem solchen Radius noch ein Punkt von  $P$ , so müßte dieser Radius in einem der überdeckenden Sektoren liegen. Dann wären aber die überdeckenden Sektoren nicht fremd. Wir greifen nun zwei solche Radien heraus. Diese zerlegen die

<sup>2)</sup> Denn wäre die Menge Summe zweier von der Nullmenge verschiedener, fremder, abgeschlossener Mengen, so hätten die beiden Summanden wegen der Beschränktheit einen positiven Minimalabstand voneinander.

<sup>3)</sup> Man kann zeigen, daß es sogar in derselben  $\delta$ -Umgebung, in der  $P$  mit abzählbar vielen fremden Sektoren der Feinheit  $\varepsilon$  überdeckt ist, bereits endlich viele fremde, überdeckende Sektoren der gleichen Feinheit  $\varepsilon$  gibt.

$\delta$ -Umgebung in zwei fremde Sektoren, die auf den beiden gemeinsam begrenzenden Radien außer  $p$  keinen weiteren Punkt von  $P$  haben, also  $P$  in der  $\delta$ -Umgebung überdecken. Wir können also annehmen, daß wir  $P$  in einer  $\delta$ -Umgebung von  $p$  mit endlich vielen fremden Sektoren überdeckt haben, die allerdings noch nicht von der geforderten Feinheit  $\varepsilon$  zu sein brauchen. Nunmehr sei  $0 \leq r \leq \delta$ ,  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  einer dieser endlich vielen Sektoren mit einem Öffnungswinkel  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon' > \varepsilon$ . Wir betrachten jetzt entsprechend der Annahme eine Überdeckung der Feinheit  $\frac{\varepsilon'}{3}$  in der zugehörigen

$\delta'$ -Umgebung von  $p$ . Dann gibt es in dem Sektor  $0 \leq r \leq \delta'$ ,  $\varphi_1 + \frac{\varepsilon'}{4} < \varphi < \varphi_2 - \frac{\varepsilon'}{4}$ , dessen Öffnungswinkel gleich  $\frac{\varepsilon'}{2}$ , also größer als  $\frac{\varepsilon'}{3}$  ist, sicher einen Radius der  $\delta'$ -Umgebung, der bis auf  $p$  von  $P$  frei ist. Dieser Radius teilt den Sektor  $0 \leq r \leq \delta'$ ,  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  in zwei Sektoren, deren Öffnungswinkel jetzt aber jeder kleiner als  $\frac{1}{2} \varepsilon'$  ist. Auf diese Weise gelangen wir also schrittweise, wobei zwar die  $\delta$ -Umgebung bei jedem Schritt vielleicht kleiner als die zuvor betrachtete gewählt werden muß, nach endlich vielen Schritten zu einer  $\delta$ -Umgebung mit einer aus endlich vielen fremden Sektoren bestehenden Überdeckung der geforderten Feinheit  $\varepsilon$ . Hiermit ist die Behauptung bewiesen. Nach dieser Überlegung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit festsetzen:

2. Definition. Gibt es um einen Punkt  $p$  der Menge  $P$  zu jedem fest gewählten  $\varepsilon > 0$  stets eine entsprechende  $\delta$ -Umgebung, in der sich die Punkte von  $P$  mit endlich vielen fremden Sektoren der Feinheit  $\varepsilon$  überdecken lassen, so nennen wir die Menge  $P$  in dem Punkt  $p$  differenzierbar. Das  $\delta$  ist also jeweils von der Wahl des  $\varepsilon$  abhängig.

Die Zahl der überdeckenden Sektoren braucht natürlich bei Verfeinerung derselben keinesfalls beschränkt zu bleiben, wie das folgende Beispiel zeigen soll. Wir denken uns dazu wieder Polarkoordinaten  $r, \varphi$  gegeben.  $\frac{n}{m}$  durchlaufe die Menge aller in reduzierter Form dargestellten, echten Brüche. Dann sei  $P$  die Punktmenge mit den Koordinaten

$$\varphi = \frac{n}{m} 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{m}.$$

$P$  ist abgeschlossen, beschränkt und zusammenhängend und mithin ein Kontinuum. Ferner ist  $P$  im Nullpunkt  $r = 0$  differenzierbar. Denn wir können sogar die ganze Menge  $P$  mit fremden Sektoren  $0 \leq r \leq 1$ ,  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  beliebiger Feinheit überdecken, wenn wir nur für  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  irrationale Vielfache von  $2\pi$  wählen.  $P$  ist auch in jedem von  $r = 0$  verschiedenen Punkt differenzierbar.  $P$  ist also ein in jedem Punkt differenzierbares Kontinuum. Die Zahl der überdeckenden Sektoren bei  $r = 0$  kann nun bei Verfeinerung derselben nicht beschränkt bleiben. Denn sonst müßte die Winkelsumme der

überdeckenden Sektoren bei Verfeinerung derselben ebenfalls beliebig klein werden im Widerspruch dazu, daß die  $\frac{n}{m} 2\pi$  eine überall dichte Menge bilden und die Winkelsumme mithin immer  $2\pi$  sein muß.

Wir ziehen noch einige Schlüsse aus der Definition 2. Es sei eine im Punkte  $p$  differenzierbare Punktmenge  $P$  gegeben. Dann gibt es nach der Definition zu einer beliebig gewählten Folge nach Null konvergierender Zahlen  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots$  entsprechende  $\delta_n$ -Umgebungen des  $p$ , in denen sich  $P$  jeweils mit endlich vielen fremden Sektoren überdecken läßt. Diese aus der Differenzierbarkeit sich ergebende unmittelbare Folgerung ist aber auch hinreichend für die Differenzierbarkeit. Denn angenommen zu einer nach Null konvergierenden Folge  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots$  gäbe es entsprechende  $\delta_n$ -Umgebungen des Punktes  $p$ , in denen sich  $P$  mit endlich vielen fremden Sektoren überdecken läßt.  $\varepsilon > 0$  sei nun eine beliebig vorgegebene Zahl. Wir greifen jetzt aus der Folge der nach Null konvergierenden  $\varepsilon_n$  ein  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$  heraus. Dann ist die Überdeckung der zugehörigen  $\delta_n$ -Umgebung von der Feinheit  $\varepsilon_n$ , also da der Öffnungswinkel eines jeden der Sektoren  $\leq \varepsilon_n$ , mithin  $\leq \varepsilon$  ist, auch von der Feinheit  $\varepsilon$ ; d. h. die Definition 2 ist erfüllt und  $P$  ist in  $p$  differenzierbar.

Bei einer Überdeckung können Sektoren auftreten, die mit Ausnahme des Punktes  $p$  keinen anderen Punkt von  $P$  enthalten. Diese Sektoren sind, da sie „leer“ sind, für die Überdeckung ohne Bedeutung, so daß wir sie also im folgenden nicht in Betracht ziehen wollen. Ein Sektor der Überdeckung soll also außer  $p$  mindestens noch einen Punkt von  $P$  enthalten. Nunmehr sei die Punktmenge  $P$  in  $p$  differenzierbar. Wir denken uns in der Ebene Polarkoordinaten  $r, \varphi$  mit dem Nullpunkt  $p$  eingeführt. Enthält dann bei einem festen  $\varphi_0$  jeder Sektor  $0 \leq r \leq \delta, \varphi_0 - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{2}$  bei jeder noch so kleinen Wahl von  $\delta > 0$  und  $\varepsilon > 0$  außer  $p$  mindestens noch einen Punkt von  $P$ , so nennen wir die von  $p$  mit dem Winkel  $\varphi_0$  ausgehende Halbgerade eine „Richtung von  $P$  in  $p$ “. Wir wollen nun noch ein Verfahren angeben, nach dem genau alle Richtungen von  $P$  in  $p$  gewonnen werden. Wir denken uns zu diesem Zweck zu einer Folge nach Null konvergierender  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots$  die entsprechenden  $\delta_n$ -Umgebungen des Punktes  $p$  gegeben. Für das zu beschreibende Verfahren ist es notwendig anzunehmen, daß die  $\delta_n$  ebenfalls nach Null konvergieren. Wir können diese Annahme machen, da eine Überdeckung der Feinheit  $\varepsilon_n$  ohne weiteres in jeder kleineren als der  $\delta_n$ -Umgebung von  $p$  eine Überdeckung der gleichen Feinheit  $\varepsilon_n$  liefert. Die Summe der überdeckenden Sektoren der  $\delta_n$ -Umgebung sei nun mit  $\Sigma_n$  bezeichnet. Wir bilden dann das mengentheoretische Produkt

$$\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 = \Sigma_2^*$$

indem wir also den Durchschnitt eines jeden Sektors von  $\Sigma_1$  mit jedem Sektor von  $\Sigma_2$  bilden.  $\Sigma_2^*$  ist dann wieder eine Summe von endlich vielen überdeckenden Sektoren. Analog sei

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Sigma_n = \Sigma_n^*.$$

Ferner sei  $\delta_n^*$  die kleinste der Zahlen  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  und desgleichen  $\varepsilon_n^*$  die kleinste der Zahlen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ . Nach Konstruktion sind dann die  $\Sigma_n^*$  Überdeckungen von  $P$  in der  $\delta_n^*$ -Umgebung von  $p$  von der Feinheit  $\varepsilon_n^*$ . Die Sektoren von  $\Sigma_n^*$  liegen jetzt in den Sektoren von  $\Sigma_{n-1}^*$ . Dabei konvergieren die Öffnungswinkel der Sektoren von  $\Sigma_n^*$  mit  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig nach Null. Wir interessieren uns speziell für die  $\varphi^*$ , die bei jedem  $\Sigma_n^*$  einen Sektor  $0 \leq r \leq \delta_n^*, \varphi_1^{(n)} < \varphi < \varphi_2^{(n)}$  mit  $\varphi_1^{(n)} \leq \varphi^* \leq \varphi_2^{(n)}$  haben, die also m. a. W. bei jedem  $\Sigma_n^*$  in einen der überdeckenden Sektoren oder wenigstens auf einen begrenzenden Radius derselben fallen. Die Menge dieser  $\varphi^*$  sei  $\Phi^*$ . Wir behaupten, daß  $\Phi^*$  mit der Menge der Richtungen von  $P$  in  $p$  identisch ist. Denn  $\varphi_0$  sei eine Richtung von  $P$  in  $p$ . Dann liegt nach Definition in jedem Sektor  $0 \leq r \leq \delta$  und  $\varphi_0 - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{2}$  außer  $p$  noch ein Punkt von  $P$ , wie klein auch  $\delta$  und  $\varepsilon$  seien. Läge nun die Richtung  $\varphi_0$  außerhalb der endlich vielen Sektoren eines  $\Sigma_n^*$  einschließlich der begrenzenden Radien, so würden nicht alle Punkte von  $P$  in der  $\delta_n^*$ -Umgebung von den Sektoren überdeckt. Also ist  $\varphi_0$  ein  $\varphi^*$ . Umgekehrt sei jetzt  $\varphi^*$  aus  $\Phi^*$  und  $0 \leq r \leq \delta, \varphi^* - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi < \varphi^* + \frac{\varepsilon}{2}$  ein gegebener Sektor. Es gibt dann ein  $\varepsilon_n^* < \frac{\varepsilon}{2}$ , dessen zugehöriges  $\delta_n^*$  außerdem  $\leq \delta$  ist. Letzteres ist möglich, da die  $\delta_n$  nach Null konvergieren sollen. Nach Definition des  $\varphi^*$  liegt  $\varphi^*$  in einem der Sektoren von  $\Sigma_n^*$  oder fällt zumindest mit einem Radius derselben zusammen. Also liegt wegen  $\varepsilon_n^* \leq \frac{\varepsilon}{2}$  und  $\delta_n^* \leq \delta$  einer der Sektoren von  $\Sigma_n^*$  ganz in dem gegebenen Sektor. Nun sollte aber nach einer Annahme keiner der überdeckenden Sektoren leer sein. Also enthält auch der gegebene Sektor außer  $p$  noch einen Punkt von  $P$ , d. h.  $\varphi^*$  ist eine Richtung von  $P$  in  $p$ . Hiermit ist die Behauptung bewiesen. In dem oben angegebenen Beispiel eines differenzierbaren Kontinuums besteht im Nullpunkt  $r = 0$  die Menge  $\Phi^*$  aus allen  $\varphi$  zwischen 0 und  $2\pi$ . Wir sehen also, daß eine differenzierbare Punktmenge in einem Punkte mehr als abzählbar viele Richtungen, selbst kontinuierlich viele Richtungen haben kann.

Auf Grund dieser ziemlich allgemein gehaltenen Definition der Differenzierbarkeit soll im folgenden die Frage beantwortet werden, wann eine in jedem Punkte differenzierbare Punktmenge eine stetige Kurve (= eindeutiges, stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke) ist. Hierzu ist zunächst notwendig, daß die Punktmenge abgeschlossen und beschränkt ist. Ferner folgt aus dem Satz über die gleichmäßige Stetigkeit sofort, daß je zwei Punkte einer stetigen

Kurve durch beliebig feine Ketten verbindbar sind. Also ist nach Ib die Punktmenge notwendig ein Kontinuum. Wir können uns also auf die Untersuchung beschränkter Kontinua beschränken. Nunmehr gilt aber bereits die Umkehrung. Wir beweisen nämlich im folgenden den

**Satz 1.** *Jedes beschränkte und in jedem Punkte differenzierbare Kontinuum ist eine stetige Kurve.*

Zu diesem Satz ist zu bemerken, daß er von einer punktmengentheoretisch gefaßten Definition der Differenzierbarkeit zur Kurventheorie und damit in das gewohnte Gebiet der Differentialrechnung führt, und zwar wenn man sich auf den speziellen Fall beschränkt, daß die Punktmenge in jedem Punkt höchstens zwei Richtungen hat. In den Betrachtungen ist gleichzeitig noch der Fall enthalten, daß die beiden Richtungen nicht wie bei der Tangente den Winkel  $\pi$ , sondern einen von  $\pi$  verschiedenen Winkel bilden können und die Punktmenge mithin in dem betrachteten Punkt eine „Ecke“ hat. Die Tangente erscheint also hier als Spezialfall der Ecke.

Die Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen gab mir Herr Prof. Dr. Dörge, der 1939 auf einem Mathematikerlager in Stolberg u. a. über einen neuen Begriff der Richtung einer Kurve vortrug. Es wurde dargelegt, daß man den Begriff der Richtung einer Kurve vom Koordinatensystem unabhängig machen kann, wenn man nämlich die Kurve in einer Umgebung des betrachteten Punktes in einen immer engeren Winkelraum einzuschließen versucht. Auf diese Weise könne dann auch Punktmengen, die nicht Kurven sind, in einem Punkt der Menge manchmal eine Tangente zugeordnet werden. Später schlug mir dann Herr Prof. Dr. Dörge vor zu untersuchen, ob eine hinreichend „vernünftige“ Punktmenge, die in jedem Punkte in dem angegebenen Sinne eine Tangente hat, eine Kurve sei.

Im folgenden beweisen wir noch den

**Satz 2.** *Voraussetzung:  $K$  sei ein Kontinuum, das nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, und  $p$  sei ein Punkt von  $K$ . Es gebe nun eine Umgebung von  $p$ , so daß  $K$  in jedem in dieser Umgebung liegenden Punkt von  $K$  differenzierbar sei.*

*Behauptung: Es gibt eine zweite Umgebung von  $p$  und eine stetige, aus lauter Punkten von  $K$  bestehende Kurve derart, daß die Kurve alle Punkte von  $K$  aus dieser Umgebung enthält.*

Am Schluß wird in einem Beispiel ein beschränktes Kontinuum angegeben, das in einem Punkte differenzierbar ist und dort nur eine Richtung hat, das aber keine stetige Kurve ist. Wie an dem Beispiel ferner gezeigt wird, gibt es sogar keine Umgebung des betrachteten Punktes und keine nur aus Punkten des angegebenen Kontinuums bestehende stetige Kurve derart, daß die Kurve alle Punkte des Kontinuums aus der Umgebung enthielte. Für die Gültigkeit des Satzes 2 genügt also nicht die Differenzierbarkeit des Kontinuums im Punkt  $p$  allein.

## § 2.

## Beweise und Schluß.

Wir wollen zunächst den Satz 1 beweisen. Wir denken uns ein Kontinuum  $K$  gegeben. Man nennt eine Teilmenge von  $K$  ein Teilkontinuum von  $K$ , wenn die Teilmenge wieder ein Kontinuum ist, also Definition 1 erfüllt. Nunmehr sei  $p$  ein Punkt von  $K$ . Gibt es ein Teilkontinuum von  $K$ , dem der Punkt  $p$  und ein anderer gegebener Punkt von  $K$  angehören, so wollen wir wegen Ia des § 1 sagen, daß  $p$  mit dem anderen Punkt durch das Teilkontinuum verbunden ist. Wir erinnern jetzt an den aus der Punktmengentheorie bekannten Begriff des „Zusammenhangs im Kleinen“.

3. Definition. Das Kontinuum  $K$  heißt im Punkt  $p$  im Kleinen zusammenhängend, wenn es zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  eine entsprechende  $\delta$ -Umgebung von  $p$  gibt, die also von der Wahl des  $\varepsilon$  abhängt, so daß jeder Punkt von  $K$  aus der  $\delta$ -Umgebung durch ein Teilkontinuum von  $K$  innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung mit  $p$  verbindbar ist.

Wir beweisen nunmehr den entscheidenden

Hilfssatz: *Gibt es eine Umgebung um den Punkt  $p$  des Kontinuums  $K$ , in der  $K$  in jedem seiner Punkte differenzierbar ist, so ist  $K$  im Punkte  $p$  im Kleinen zusammenhängend.*

Wir setzen einmal den folgenden Satz von Mazurkiewicz und Hahn<sup>4)</sup> als bekannt voraus: Eine Punktmenge ist dann und nur dann eine stetige Kurve, wenn sie ein beschränktes, in jedem ihrer Punkte im Kleinen zusammenhängendes Kontinuum ist. Aus dem Hilfssatz folgt zunächst, daß ein in jedem Punkte differenzierbares Kontinuum in jedem Punkte im Kleinen zusammenhängend ist. Ist also das in jedem Punkte differenzierbare Kontinuum außerdem noch beschränkt, so ist es nach dem eben angegebenen Satz eine stetige Kurve. Das ist der Satz 1. Im speziellen Falle der Differenzierbarkeit läßt sich der angegebene Satz von Mazurkiewicz und Hahn bedeutend vereinfachen. Wir wollen daher der Vollständigkeit wegen im folgenden den Satz nicht als bekannt voraussetzen, sondern den Satz 1 im Anschluß an den Beweis des Hilfssatzes vollständig beweisen.

Beweis des Hilfssatzes: Wir schicken einen leichten elementargeometrischen Satz voraus. Wir wollen einen Sektor einer  $\delta$ -Umgebung eines gegebenen Punktes  $k$  vom Öffnungswinkel  $\varepsilon$  mit  $k(\varepsilon\delta)$  bezeichnen. Nunmehr seien zwei Sektoren  $k(\varepsilon\delta)$  und  $k'(\varepsilon'\delta)$  gegeben, wobei der Radius der beiden Sektoren also gleich groß sei. Wir setzen voraus, daß der Punkt  $k'$  in  $k(\varepsilon\delta)$  und daß umgekehrt ebenfalls  $k$  in  $k'(\varepsilon'\delta)$  liege. Die beiden Punkte  $k$  und  $k'$  seien verschieden und es sei  $\varepsilon \leq \frac{\pi}{3}$  und  $\varepsilon' \leq \frac{\pi}{3}$ . Wir behaupten den einfachen

<sup>4)</sup> Mazurkiewicz, Fund. Math. I (1920), S. 166; Hahn, Wien. Ber. 123 (1914), S. 2433; Kerékjártó, Lehrbuch der Topologie I, S. 96.

Satz, daß dann der Durchschnitt der beiden Sektoren ein Viereck mit den beiden gegenüberliegenden Ecken  $k$  und  $k'$  ist (Fig. 1). Denn zunächst liegt die Strecke  $kk'$  in jedem der beiden Sektoren. Die Länge dieser Strecke ist  $\leq \delta$ . Die Strecke bildet mit jedem der vier begrenzenden Radien der beiden Sektoren einen Winkel  $< \varepsilon$  bzw.  $< \varepsilon'$ , also in jedem Fall  $< \frac{\pi}{3}$ . Nunmehr denken wir uns allgemein eine Strecke  $\leq \delta$  gezeichnet und an ihren beiden Endpunkten je einen Winkel  $< \frac{\pi}{3}$  angetragen. Der dritte Winkel in dem

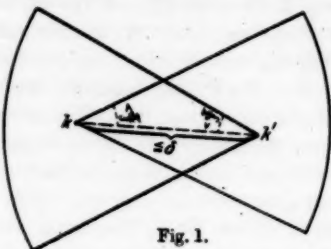


Fig. 1.

Dreieck, das wir so erhalten, ist dann  $> \frac{\pi}{3}$ . Da in einem Dreieck dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, sind also die beiden anderen Seiten des Dreiecks  $< \delta$ . Die vier Radien, deren Länge nun  $\delta$  ist, müssen sich also in bestimmter Weise schneiden und daher mit der Strecke  $kk'$  zwei Dreiecke bilden, womit der elementare Satz bewiesen ist. Wir kommen nunmehr zum eigentlichen Beweis des Hilfssatzes. Wir nehmen entgegen der Aussage des Hilfssatzes an, daß das Kontinuum  $K$  in dem gegebenen Punkt  $p$  von  $K$  nicht im Kleinen zusammenhängend ist. Dann gibt es also bei einem festen  $\varepsilon > 0$  und immer kleinerer Wahl von  $\delta$ ,  $\rightarrow 0$  mit  $\nu = 1, 2, \dots$  entsprechende Punkte  $q_\nu$  von  $K$  innerhalb der  $\delta_\nu$ -Umgebung von  $p$ , die sich mit  $p$  nicht durch ein Teilkontinuum von  $K$  innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung verbinden lassen. Die Gesamtheit der Punkte von  $K$ , die wir von einem festen  $q_\nu$  aus durch Ketten von  $K$  jeder beliebig vorgegebenen Feinheit verbinden können, ohne die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  zu verlassen, wollen wir mit  $K_\nu$  bezeichnen. Man sieht leicht, daß die Bedingungen 1 und 2 der Definition 1 für die  $K_\nu$  erfüllt sind. Die  $K_\nu$  sind also Kontinua<sup>2)</sup>. Es folgt weiter, daß zwei  $K_\nu$  mit verschiedenen Indizes entweder punktfremd oder identisch sind. Denn haben die beiden Kontinua einen Punkt gemeinsam, so können wir jeden Punkt des einen mit jedem Punkt des anderen Kontinuums über den gemeinsamen Punkt durch beliebig feine Ketten innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung verbinden, so daß also die beiden Kontinua identisch sind.  $p$  gehört nun weiter zu keinem  $K_\nu$ , da nach der Annahme  $p$  mit keinem  $q_\nu$  durch ein Teilkontinuum innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  verbunden ist. Folglich hat  $p$  von jedem  $K_\nu$  einen positiven Minimalabstand. Die  $q_\nu$  konvergieren aber nach  $p$ . Also gibt es unendlich viele punktfremde  $K_\nu$ . Wir wollen diese punktfremden  $K_\nu$  der Einfachheit halber im folgenden wieder mit  $K_\nu$  bezeichnen, da wir uns nur für punktfremde  $K_\nu$

<sup>2)</sup> Der Satz ist bekannt. Alexandroff und Hopf, Topologie I, S. 118, Satz II.

interessieren. Es folgt noch, daß jedes  $K_r$  mit einem gegebenen Kreis um  $p$  mit einem beliebigen Radius  $s' \leq \varepsilon$  und  $s' \geq \delta$ , mindestens einen Punkt gemeinsam hat. Denn außerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung gibt es sicher einen Punkt  $a$  von  $K$ , da sonst  $K_r = K$  für alle  $r$  wäre.  $a$  liegt damit auch außerhalb der  $s'$ -Umgebung von  $p$ . Wir können nun  $q_r$ , das wegen  $\delta_r \leq s'$  in der  $s'$ -Umgebung liegt, mit  $a$  durch immer feinere Ketten von  $K$  nach dem Satz Ia des § 1 verbinden. Die Punkte derselben, mit deren Nachfolger auf der Kette die  $s'$ -Umgebung zum ersten Male verlassen wird, haben auf dem vorgegebenen Kreis einen Häufungspunkt, der zu  $K$  gehört. Wir können also sagen, daß die  $K_r$  die  $q_r$  mit dem  $s'$ -Kreis verbinden. Wir wählen nun zwei feste Zahlen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  mit  $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varepsilon$ , wobei außerdem  $\varrho_2$  so klein sei, daß  $K$  in jedem seiner Punkte der  $\varrho_2$ -Umgebung von  $p$  differenzierbar sei. Dann müssen also alle  $K_r$  von einer Stelle  $r$  ab, nämlich sobald  $\delta_r \leq \varrho_1$  gilt, jeden Kreis um  $p$  mit dem Radius  $\varrho$  mit  $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$  mindestens in einem Punkt, den wir mit  $k_{\varrho r}$  bezeichnen, treffen. Die Punktfolgen  $k_{\varrho r}$  haben für jedes feste  $\varrho$

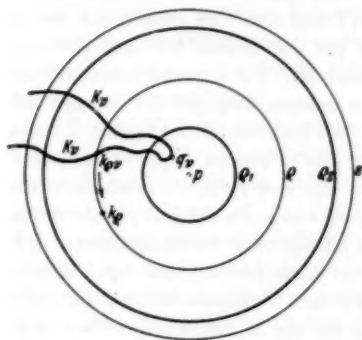


Fig. 2.

mit  $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$  einen Häufungspunkt  $k_{\varrho}$  (Fig. 2). Es sei ein festes  $\varepsilon_0 > 0$  vorgegeben, wobei  $\varepsilon_0 \leq \frac{\pi}{3}$  sei. Dann gibt es also nach der Definition 2 um jeden Punkt  $k_{\varrho}$  eine entsprechende  $\delta$ -Umgebung, in der  $K$  durch endlich viele fremde Sektoren der Feinheit  $\varepsilon_0$  überdeckt werden kann. Die Größe  $\delta$  ist natürlich von dem betrachteten  $k_{\varrho}$  abhängig. Wir können dabei von vornherein annehmen, daß die  $\delta$  kleiner als  $\frac{\varrho_1}{2}$  seien. Nunmehr liegen die  $k_{\varrho}$  außerhalb der  $\varrho_1$ -Umgebung

von  $p$ , also die  $\delta$ -Umgebungen der  $k_{\varrho}$  außerhalb der  $\frac{\varrho_1}{2}$ -Umgebung von  $p$ . Da die  $q_r$  nach  $p$  konvergieren, kann also jetzt von einem genügend großen  $r$  ab kein  $q_r$  in den  $\delta$ -Umgebungen der  $k_{\varrho}$  sein. Wir wollen die überdeckenden Sektoren von der Feinheit  $\varepsilon_0$  aus der entsprechenden  $\delta$ -Umgebung von  $k_{\varrho}$  mit  $k_{\varrho}^{(\alpha)}(\varepsilon\delta)$  bezeichnen, wobei  $\alpha = 1, 2, \dots, n_{\varrho}$  die Nummer der verschiedenen Sektoren bei dem jeweils festen  $\varrho$  bezeichne. Für die Öffnungswinkel der Sektoren gilt immer  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , wobei der Einfachheit halber die entsprechende Nummer an dem  $\varepsilon$  fortgelassen werde. Es sei nun  $\frac{\varrho_1}{2} = \delta'_1 > \delta'_2 > \dots > \delta'_r > \dots$  eine Folge nach Null konvergierender Zahlen. Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Sektoren  $k_{\varrho}^{(\alpha)}(\varepsilon\delta)$ , deren  $\delta$

zwischen zwei aufeinander folgenden  $\delta'_{v-1}$  und  $\delta'_v$  liegen. Es gibt dann aber bei einem festen  $v_0$  mehr als abzählbar viele  $k_q^{(a)}(\varepsilon \delta)$  mit  $\delta'_{v_0-1} \geq \delta > \delta'_{v_0}$ , da sonst die Menge der  $k_q$  abzählbar wäre. Von diesen mehr als abzählbar vielen  $k_q$  ist jetzt beim Schluß des Beweises allein noch die Rede. Wir setzen  $\delta'_{v_0} = \delta_0$  und betrachten im folgenden statt der  $k_q^{(a)}(\varepsilon \delta)$  nunmehr die Sektoren  $k_q^{(a)}(\varepsilon \delta_0)$ , deren Öffnungswinkel  $\varepsilon$  unverändert geblieben und deren Radius aber von  $\delta$  auf  $\delta_0$  verkleinert sei. Diese Sektoren überdecken dann erst recht  $K$  in dem Kreis um  $k_q$  mit dem Radius  $\delta_0$ . Wir denken uns irgendein festes  $k_q$  der mehr als abzählbaren Menge gegeben. Wir behaupten, daß dieses  $k_q$  nicht Häufungspunkt von anderen  $k_q$  sein kann oder genauer, daß es zu jedem festen  $k_q$  ein entsprechendes  $\delta \leq \delta_0$  gibt, so daß die Kreisscheibe um  $k_q$  mit dem Radius  $\delta$  mit Ausnahme von  $k_q$  kein anderes  $k_q$  enthält. Denn sonst gäbe es in jeder Nähe von  $k_q$  beliebig viele  $k_q$ . Also müßte einer der endlich vielen überdeckenden Sektoren  $k_q^{(a)}(\varepsilon \delta_0)$  eine nach  $k_q$  konvergierende Folge der  $k_q$  enthalten. Wir können diesen Sektor mit  $k_q^{(1)}(\varepsilon \delta_0)$  bezeichnen. Es sei dann  $k_q$  ein festes der nach  $k_q$  konvergierenden  $k_q$  in  $k_q^{(1)}(\varepsilon \delta_0)$ . Die Sektoren dieses festen  $k_q$  überdecken  $K$  in der  $\delta_0$ -Umgebung von  $k_q$ . In dieser  $\delta_0$ -Umgebung liegt  $k_q$ , da die beiden Umgebungen von  $k_q$  und  $k_q$  denselben Radius  $\delta_0$  haben.

Also können wir annehmen, daß  $k_q$  in dem Sektor  $k_q^{(1)}(\varepsilon' \delta_0)$  liegt. Es ist  $\varepsilon$  und  $\varepsilon' \leq \varepsilon_0 \leq \frac{\pi}{3}$ . Also wird der Durchschnitt der beiden Sektoren  $k_q^{(1)}(\varepsilon \delta_0)$  und  $k_q^{(1)}(\varepsilon' \delta_0)$  nach dem elementaren Satz von einem Viereck berandet. Die vier Seiten dieses Vierecks sind nun mit Ausnahme der beiden gegenüberliegenden Ecken  $k_q$  und  $k_q$  von weiteren Punkten von  $K$  frei, da die begrenzenden Radien der beiden Sektoren bis auf  $k_q$  und  $k_q$  mit  $K$  punktfremd sind. Innerhalb dieses Vierecks liegen aber beliebig viele  $k_q$  und mithin erst recht beliebig viele  $k_q$ . Nach einer obigen Bemerkung liegen die  $q$ , von einem genügend großen  $v$  ab außerhalb der  $\delta$ -Umgebungen der  $k_q$ , damit auch außerhalb des Vierecks. Also müßten dann die  $K$ , das Viereck entweder in  $k_q$  oder dem festen  $k_q$  passieren im Widerspruch dazu, daß die  $K$ , sämtlich punktfremd sind. Es gibt also in jeder Nähe des beliebig gewählten  $k_q$  nicht immer wieder ein  $k_q$ , d. h. es gibt um  $k_q$  eine Kreisscheibe von einem Radius  $\delta$  mit  $0 < \delta \leq \delta_0$ , in der kein  $k_q$  mehr liegt. Mithin ist die Menge der  $k_q$  eine isolierte Punktmenge, also abzählbar, im Widerspruch dazu, daß es mehr als abzählbar viele  $k_q$  gibt. Also ist entgegen der anfangs gemachten Annahme das Kontinuum  $K$  im Punkte  $p$  im Kleinen zusammenhängend, w. z. b. w.

Es soll nun der Satz 1 bewiesen werden. Es sei also  $K$  ein beschränktes, in jedem Punkte differenzierbares Kontinuum. Dann ist also nach dem Hilfsatz das Kontinuum  $K$  in jedem Punkt im Kleinen zusammenhängend. Wir denken uns einmal eine feste Zahl  $\varepsilon > 0$  gegeben.  $p$  sei ein Punkt von  $K$ . Da  $K$

in  $p$  im Kleinen zusammenhängend ist, gibt es nach der Definition 3 zu der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  eine entsprechende  $\delta$ -Umgebung von  $p$ . Wir bezeichnen mit  $K_p$  die Gesamtheit aller derjenigen Punkte von  $K$ , die sich mit  $p$  durch Ketten von  $K$  jeder beliebig vorgegebenen Feinheit verbinden lassen, ohne die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  zu verlassen. Mit denselben Schlüssen, die oben bereits auf die  $K$ , angewandt wurden, zeigt man, daß  $K_p$  ein Kontinuum ist.  $K_p$  enthält dann alle Punkte von  $K$  aus der  $\delta$ -Umgebung von  $p$ , da diese Punkte durch Teilkontinua, also erst recht durch Ketten von  $K$  jeder geforderten Feinheit innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  mit  $p$  verbindbar sind. Auf diese Weise ist also bei dem gegebenen festen  $\varepsilon$  für jeden Punkt  $p$  von  $K$  eine von  $p$  abhängige  $\delta$ -Umgebung von  $p$  und ein Teilkontinuum  $K_p$  bestimmt derart, daß  $K_p$  alle Punkte von  $K$  aus der  $\delta$ -Umgebung enthält. Wir betrachten nunmehr die Gesamtheit der  $\delta$ -Umgebungen. Diese überdecken  $K$ . Also wird  $K$  nach einem bekannten Überdeckungssatz, da  $K$  abgeschlossen und beschränkt ist, bereits von endlich vielen  $\delta$ -Umgebungen überdeckt, deren zugehörige  $K_p$  wir mit

$$(1) \quad K_1, K_2, \dots, K_p, \dots, K_m$$

bezeichnen wollen. Da die  $\delta$ -Umgebungen  $K$  überdecken, gilt:

$$\sum_{\mu=1}^m K_{\mu} = K.$$

Es seien nun  $a$  und  $b$  zwei beliebig gegebene Punkte von  $K$ . Wir behaupten, daß wir dann die  $K_{\mu}$  derart in eine endliche Folge ordnen können, in der vielleicht einige  $K_{\mu}$  dann mehrfach vorkommen, so daß  $a$  in dem ersten und  $b$  in dem letzten  $K_{\mu}$  der Folge liegen und ferner je zwei in der Folge benachbarte  $K_{\mu}$  mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Denn wir beginnen mit einem  $K_{\mu}$ , das  $a$  enthält. Wir bezeichnen dieses  $K_{\mu}$  als erstes Element der zu bildenden neuen Folge der Einfachheit halber wieder mit  $K_1$ . Wir nehmen an, daß wir bereits eine Folge

$$(2) \quad K_1, K_2, \dots, K_i, \dots, K_l$$

gefunden haben, in der je zwei aufeinander folgende  $K_i$  nicht punktfremd sind. Angenommen, es gäbe noch ein  $K_{\mu_0}$  aus (1), das in (2) nicht vorkommt. Dann muß die Menge der  $K_{\mu}$  von (1), die nicht in der Folge (2) vorkommen, mit der Menge der  $K_i$  von (2):  $\sum_{i=1}^l K_i$  einen Punkt gemeinsam haben, da sonst  $K$  Summe zweier fremder, abgeschlossener, nicht leerer Mengen wäre. Die beiden Mengen  $K_{\mu_0}$  und  $K_l$  seien also nicht punktfremd. Dann bilden wir aus (2) die Folge

$$(3) \quad K_1, K_2, \dots, K_l, K_{\mu_0}, K_1, \dots, K_l.$$

Wir können also annehmen, daß die Folge (2) bereits alle  $K_n$  aus (1) enthält. Liegt nun der Punkt  $b$  etwa in  $K_1$ , so bilden wir zum Schluß die Folge

$$K_1, K_2, \dots, K_1, \dots, K_1, K_{1-1}, \dots, K_1,$$

die die geforderten Eigenschaften hat. Nunmehr sei

$$s_1 > s_2 > \dots > s_r > \dots$$

eine nach Null konvergierende gegebene Zahlenfolge. Zu  $s_1$  konstruieren wir, wie eben für  $s$  allgemein angegeben wurde, eine endliche Folge der  $K_p$ . Diese Folge sei

$$(I) \quad K_1, K_2, \dots, K_r, \dots, K_n,$$

in der also je zwei  $K_i$  und  $K_{i+1}$  mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Nun ist aber jedes  $K_i$  als Teilkontinuum von  $K$  wieder in jedem Punkt differenzierbar<sup>\*)</sup>. Also ist jedes  $K_i$  vollkommen analog (I) jetzt aber zu dem gegebenen  $s_2$  weiter in eine endliche Folge von Teilkontinua zerlegbar:

$$(II) \quad K_{r,1}, K_{r,2}, \dots, K_{r,\mu}, \dots, K_{r,m},$$

in der je zwei  $K_{r,\mu}$  und  $K_{r,\mu+1}$  und außerdem  $K_{r,1}$  mit  $K_{r,\mu-1}$  und  $K_{r,m}$  mit  $K_{r,1}$  mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Auf diese Weise fahren wir schrittweise mit den  $s_i$  und weiteren Unterteilungen der im vorhergehenden Schritt konstruierten Kontinua fort. Wir teilen nun das Intervall  $[0, 1]$  in  $n$  gleich große Teilintervalle

$$(I') \quad i_1, i_2, \dots, i_r, \dots, i_n$$

und ordnen den  $i_r$  die  $K_{r,\nu}$  von (II) mit gleichen  $\nu$  zu. Analog durch entsprechende Unterteilung der  $i_r$  in Teilintervalle  $i_{r,\mu}$  und Zuordnung auf die  $K_{r,\mu}$  verfahren wir beim zweiten Schritt. So fahren wir schrittweise bei allen  $s_i$  fort. Die Durchmesser der zu  $s_i$  konstruierten Teilkontinua sind  $\leq 2s_i$ . Andererseits hat jedes solche Teilkontinuum einen positiven Durchmesser mit Ausnahme des trivialen Falles, daß es nur aus einem Punkt und damit auch  $K$  nur aus einem Punkt besteht. Es folgt somit, daß mit  $s_i \rightarrow 0$  jedes der Teilkontinua immer wieder einmal eine Unterteilung erfährt. Damit wird auch jedes Teilintervall von  $[0, 1]$  mit  $s_i \rightarrow 0$  immer wieder unterteilt; d. h. jeder Punkt von  $[0, 1]$  läßt sich durch eine Intervallschachtelung der schrittweise konstruierten Unterteilungen von  $[0, 1]$  festlegen. Einer Intervallschachtelung in  $[0, 1]$  entspricht auf  $K$  eine Folge von Teilkontinua, die nach einem festen Punkt von

<sup>\*)</sup> Durch diesen Schluß vereinfacht sich hier durch die vorausgesetzte Differenzierbarkeit der Satz von Mazurkiewicz und Hahn wesentlich. Die übrigen Schlüsse schließen sich eng an den bekannten Beweis an (vgl. Fußnote <sup>\*)</sup>).

$K$  konvergieren, da jedes Kontinuum der Folge ein Teilkontinuum des in der Folge vorhergehenden Kontinuums ist und die Durchmesser der Kontinua der Folge nach Null konvergieren. Somit entspricht jedem Punkt von  $[0, 1]$  auf diese Weise eindeutig<sup>7)</sup> ein Punkt von  $K$ , und umgekehrt entspricht dabei auch jedem Punkt von  $K$  mindestens ein Punkt aus  $[0, 1]$ , da jeder Punkt von  $K$  zu jedem  $\varepsilon$ , von mindestens einem der Teilkontinua überdeckt wird. Hiernit haben wir eine eindeutige Zuordnung der Punkte einer Strecke  $[0, 1]$  auf  $K$ . Diese Zuordnung ist stetig. Denn ein gegebener Punkt aus  $[0, 1]$  liegt bei jedem  $\varepsilon$ , in einem Teilintervall oder ist gemeinsamer Punkt von zwei Teilintervallen von  $[0, 1]$ . Die Bilder der Punkte dieses einen oder dieser beiden Teilintervalle auf  $K$  liegen in einer oder in zwei  $\varepsilon$ -Umgebungen, die nach Konstruktion einen Punkt gemeinsam haben, und  $\varepsilon$ , ist bei genügend großem  $\nu$  kleiner als jede vorgegebene Zahl  $> 0$ . Also ist  $K$  das eindeutige, stetige Bild einer Strecke, d. h.  $K$  ist eine stetige Kurve, w. z. b. w.

Der Beweis des in § 1 angegebenen Satzes 2 bietet nun keine Schwierigkeit mehr. Es sei also  $K$  ein Kontinuum, das jetzt nicht notwendig beschränkt zu sein braucht, und  $p$  ein Punkt von  $K$ . Nach Voraussetzung des Satzes 2 nehmen wir an, daß es eine feste  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  gibt, in der  $K$  in jedem seiner Punkte differenzierbar ist. Wie wir beim Beweis des Satzes 1 zeigten, gibt es ein Teilkontinuum  $K_p$  von  $K$ , das genau aus allen denjenigen Punkten von  $K$  besteht, die sich mit  $p$  mit beliebig feinen Ketten von  $K$  verbinden lassen, ohne die  $\varepsilon$ -Umgebung des  $p$  zu verlassen. Mit  $K$  ist auch  $K_p$  differenzierbar, also nach Satz 1 eine stetige Kurve, die, da  $K$  nach dem Hilfsatz in  $p$  im Kleinen zusammenhängend ist, alle Punkte von  $K$  aus einer  $\delta$ -Umgebung von  $p$  enthält. Damit ist auch der Satz 2 bewiesen.

Wie in der Einleitung erwähnt, schließen wir mit einem Beispiel eines beschränkten Kontinuums, das in einem Punkte differenzierbar, dort aber nicht im Kleinen zusammenhängend ist. Wir denken uns dazu in der Ebene Polarkoordinaten  $r, \varphi$  gegeben und betrachten zunächst eine unendliche Folge von Streckenpaaren, die wir mit  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  bezeichnen wollen (Fig. 3) und folgende Koordinaten haben:

$$(S_1) \quad \varphi = \pi \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1,$$

ferner

$$(S_2) \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{1}{4} \leq r \leq 1,$$

<sup>7)</sup> Nach jedem Teilpunkt von  $[0, 1]$  konvergieren zwar zwei verschiedene, in bestimmtem Sinne benachbarte Intervallschachtelungen, deren Bilder aber auf  $K$  ebenfalls zum selben Punkt konvergieren, da nach Konstruktion die Bilder benachbarter Intervalle nicht punktfremd sind.

und allgemein

$$(S_n) \quad \varphi = \frac{\pi}{2n-1} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{1}{2n} \leq r \leq 1.$$

Weiter betrachten wir Kreisbögen, die wir mit  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  bezeichnen

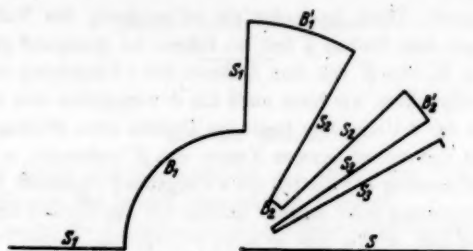


Fig. 3.

und die die beiden Strecken jeweils eines Streckenpaares  $S_n$  verbinden, und zwar sei:

$$(B_1) \quad r = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi,$$

ferner

$$(B_2) \quad r = \frac{1}{4}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

allgemein

$$(B_n) \quad r = \frac{1}{2n}, \quad \frac{\pi}{2n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2n-1}.$$

Wir nehmen dann noch Kreisbögen hinzu, die mit  $B'_1, B'_2, \dots, B'_n, \dots$  bezeichnet seien und die das erste Streckenpaar  $S_1$  mit  $S_2$  und allgemein  $S_n$  mit  $S_{n+1}$  verbinden, und zwar sei:

$$(B'_1) \quad r = 1, \quad \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$(B'_2) \quad r = 1, \quad \frac{\pi}{5} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$(B'_n) \quad r = 1, \quad \frac{\pi}{2n+1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Es sei noch  $S$  die Strecke  $\varphi = 0, 0 \leq r \leq 1$ . Dann ist die Punktmenge

$$K = S + \sum_{n=1}^{\infty} S_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n$$

ein Kontinuum. Denn erstens ist  $K$  abgeschlossen, und zweitens sind je zwei Punkte von  $K$  durch beliebige feine Ketten verbindbar. Also ist  $K$  nach Ib

des § 1 ein Kontinuum.  $K$  ist nun im Nullpunkt  $r = 0$  differenzierbar. Denn in der  $\frac{1}{2^n}$ -Umgebung des Nullpunktes wird  $K$  nach Konstruktion von dem Sektor  $0 \leq r \leq \frac{1}{2^n}$ ,  $-\frac{\pi}{2n-2} < \varphi < +\frac{\pi}{2n-2}$  überdeckt, und der Öffnungswinkel  $\frac{\pi}{n-1}$  wird mit  $n$  beliebig klein.  $K$  ist aber im Nullpunkt nicht im Kleinen zusammenhängend. Denn legen wir als  $\varepsilon$ -Umgebung des Nullpunktes die Kreisscheibe mit dem Radius  $\frac{1}{2}$  fest, so führen bei genügend großem  $n$  alle „Zacken“  $S_n + B_n$  von  $K$  von dem Äußeren der  $\varepsilon$ -Umgebung in eine  $\delta$ -Umgebung des Nullpunktes, wie klein auch das  $\delta$  vorgegeben sein mag. Wollen wir also die in der  $\delta$ -Umgebung liegenden Punkte eines solchen Zacken mit dem Nullpunkt mit immer feineren Ketten von  $K$  verbinden, so müssen wir einmal bei Verfeinerung der Ketten die  $\varepsilon$ -Umgebung verlassen, da in der angegebenen  $\varepsilon$ -Umgebung jeder liegende Zacken von den übrigen einen positiven Minimalabstand hat. Mithin gibt es keine  $\delta$ -Umgebung, deren Punkte von  $K$  sich sämtlich mit dem Nullpunkt durch beliebig feine Ketten innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung verbinden lassen. D. h.  $K$  ist im Nullpunkt nicht im Kleinen zusammenhängend. — Es gilt nun allgemein, daß ein Kontinuum  $K$  in einem Punkt  $p$  im Kleinen zusammenhängend ist, wenn es eine nur aus Punkten von  $K$  bestehende stetige Kurve gibt, die alle Punkte von  $K$  aus einer Umgebung von  $p$  enthält. Denn anderenfalls gäbe es in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  eine nach  $p$  konvergierende Punktfolge  $q_i$  von  $K$  derart, daß sich kein  $q_i$  mit  $p$  durch ein Teilkontinuum von  $K$  innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung verbinden ließe. Von einem  $\nu$  ab liegen die  $q_i$  auf der Kurve, da die Kurve alle Punkte von  $K$  aus einer Umgebung von  $p$  enthält und die  $q_i$  nach  $p$  konvergieren. Jedem  $q_i$  entspricht dann auf der Strecke, deren Bild die Kurve ist, mindestens ein  $\tilde{q}_i$ . Die  $\tilde{q}_i$  haben einen Häufungspunkt  $\tilde{p}$ , dem wegen der Stetigkeit auf  $K$  der Punkt  $p$  entspricht. Den Strecken  $\tilde{p}\tilde{q}_i$  entsprechen auf  $K$  stetige Kurvenstücke, die wegen der Stetigkeit für genügend große  $\nu$  innerhalb der festen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$  liegen im Widerspruch dazu, daß  $p$  mit den  $q_i$  nicht durch ein Teilkontinuum in der  $\varepsilon$ -Umgebung verbindbar sein sollte. Also ist  $K$  in  $p$  im Kleinen zusammenhängend, wie behauptet wurde. In dem Beispiel ist aber das Kontinuum  $K$  in  $r = 0$  nicht im Kleinen zusammenhängend. Also ist dieses  $K$  weder eine stetige Kurve, noch gibt es eine nur aus Punkten von  $K$  bestehende stetige Kurve, die alle Punkte von  $K$  aus einer Umgebung des Nullpunktes  $r = 0$  enthält.

(Eingegangen am 16. 7. 1940.)

# Das Verschwinden der Klammersymbole in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme.

Von

Oskar Perron in München.

## § 1.

### Ziel der Arbeit.

In dieser Arbeit sind alle Variablen und Funktionen reell; alle Bereiche sind *offene* Mengen des jeweils angegebenen Raumes.

In der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen hat man es immer als einen Schönheitsfehler angesehen, daß man das Verschwinden der Klammersymbole nicht beweisen konnte, ohne die Existenz (und Stetigkeit) der zweiten partiellen Ableitungen vorauszusetzen; diese Ableitungen heben sich im Laufe der Rechnung heraus und kommen im Resultat nicht mehr vor. Hiernach konnte es zunächst zweifelhaft sein; ob, wenn die zweiten Ableitungen nicht existieren, das Verschwinden der Klammersymbole überhaupt ausnahmslos zutrifft. Nun hat vor einiger Zeit Herr Erhard Schmidt tatsächlich einen Beweis gegeben, bei dem die Existenz der zweiten Ableitungen nicht vorausgesetzt wird<sup>1)</sup>; die Sache ist also heute nicht mehr zweifelhaft. Der Schmidtsche Beweis ist sehr kunstvoll, aber doch insofern nicht ganz befriedigend, als er allerhand Dinge benutzt, die dem Problem recht fern zu liegen scheinen, vor allem eine Art von Greenschem Integralsatz im  $n$ -dimensionalen Raum, der bei den gegebenen Voraussetzungen einen besonders vorsichtigen vom Normalen abweichenden Beweis erfordert.

Andererseits hat Herr W.-L. Chow kürzlich das Integrationsproblem behandelt, ohne die Klammersymbole zu benutzen<sup>2)</sup>. Statt des in den Klammersymbolen steckenden infinitesimalen Prozesses benutzt er vielmehr einen finiten Prozeß und gelangt so zu Ausdrücken, die für das Integrationsproblem dasselbe leisten wie die Klammersymbole. Es liegt daher nahe, daß man versucht, von den Chowschen Ausdrücken aus durch einen nachträglichen Differentiationsprozeß zu den Klammersymbolen zu gelangen und ihr Verschwinden zu beweisen. Das ist in der Tat möglich und soll im folgenden

<sup>1)</sup> Erhard Schmidt, Bemerkung zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen I. Ordnung. Monatshefte f. Math. u. Phys. 48 (1939), S. 426—432.

<sup>2)</sup> W.-L. Chow, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Annalen 117 (1939), S. 98—105.

geschehen. Dabei werden wir aber von der Chowschen Arbeit nichts voraussetzen, sondern alles ab ovo entwickeln und nur solche Dinge als bekannt annehmen, die mit dem Integrationsproblem unmittelbar zusammenhängen und jedem, der die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung jemals sauber behandelt hat, völlig geläufig sind.

Der von Herrn Schmidt a. a. O. bewiesene und jetzt erneut zu beweisende Satz lautet:

**Satz.** Die  $2n + 1$  Funktionen<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} f(x^1, x^n), \\ P^v(x^1, x^n) & \quad (v = 1, \dots, n), \\ Q^v(x^1, x^n) & \quad (v = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

mögen in einem Bereich  $B_n$  des  $(x^1, x^n)$ -Raumes stetig sein und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach allen Argumenten haben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} &= f_\mu(x^1, x^n), \\ \frac{\partial P^v}{\partial x^\mu} &= P_\mu^v(x^1, x^n), \\ \frac{\partial Q^v}{\partial x^\mu} &= Q_\mu^v(x^1, x^n). \end{aligned}$$

Ferner sei

$$(P) \quad Pf \equiv \sum_{\mu=1}^n P^\mu f_\mu = 0,$$

$$(Q) \quad Qf \equiv \sum_{\mu=1}^n Q^\mu f_\mu = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist das Klammersymbol

$$(QP - PQ)f \equiv \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n (Q^v P_\mu^v - P^v Q_\mu^v) f_\mu$$

ebenfalls gleich 0.

## § 2.

### Die vorausgesetzten Vorkenntnisse.

Als bekannt werden die folgenden Tatsachen angesehen:

A. Aus der Differentialrechnung:

Hat die Funktion  $f(x^1, x^n)$  in einem Bereich  $B_n$  des  $(x^1, x^n)$ -Raumes stetige partielle Ableitungen nach den  $x^\mu$

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = f_\mu(x^1, x^n) \quad (\mu = 1, \dots, n),$$

<sup>3)</sup> Es handelt sich um Funktionen von  $n$  Variablen  $x^1, \dots, x^n$ . Lediglich, um später bei den ziemlich langen Formeln Platz zu sparen, schreiben wir durchweg  $f(x^1, x^n)$  statt  $f(x^1, \dots, x^n)$ .

sind ferner die Funktionen  $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$  an einer Stelle  $t$  nach  $t$  differenzierbar und liegt das System ihrer Funktionswerte im Bereich  $B_n$ , so ist auch die Funktion

$$f(\varphi^1(t), \varphi^n(t)) = F(t)$$

an dieser Stelle nach  $t$  differenzierbar, und zwar ist

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{\mu=1}^n f_{\mu}(\varphi^1(t), \varphi^n(t)) \frac{d\varphi^{\mu}(t)}{dt}.$$

B. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen<sup>4)</sup>:

I. Sind die  $n$  Funktionen

$$P^{\nu}(x^1, x^n) \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

sowie ihre partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial P^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = P_{\mu}^{\nu}(x^1, x^n) \quad (\nu, \mu = 1, \dots, n)$$

in einem Bereich  $B_n$  des  $(x^1, x^n)$ -Raumes stetig, so hat das Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \frac{dx^{\nu}}{dt} = P^{\nu}(x^1, x^n) \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(x^{\nu})_{t=0} = x^{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

wo der Punkt  $(x^1, x^n)$  irgendwie im Bereich  $B_n$  vorgeschrieben ist, genau eine Lösung

$$x^{\nu} = \varphi^{\nu}(t, x^1, x^n) \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

so daß also

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi^{\nu}(t, x^1, x^n)}{\partial t} = P^{\nu}(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)),$$

$$(3) \quad \varphi^{\nu}(0, x^1, x^n) = x^{\nu}$$

für  $\nu = 1, \dots, n$  ist.

II. Diese Funktionen  $\varphi^{\nu}(t, x^1, x^n)$  sind stetig in einem gewissen Bereich  $B_{n+1}$  des  $(t, x^1, x^n)$ -Raumes und das System der Funktionswerte  $(\varphi^1, \varphi^n)$  liegt im Bereich  $B_n$ . Der Bereich  $B_{n+1}$  enthält jeden Punkt  $(0, x^1, x^n)$ , wobei  $(x^1, x^n)$  irgendein Punkt von  $B_n$  ist.

III. Die Funktionen  $\varphi^{\nu}(t, x^1, x^n)$  haben in  $B_{n+1}$  partielle Ableitungen nach den  $x^{\mu}$ :

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi^{\nu}(t, x^1, x^n)}{\partial x^{\mu}} = \varphi_{\mu}^{\nu}(t, x^1, x^n)$$

<sup>4)</sup> Man sehe etwa: E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Nr. 71, 79, 87. Leipzig 1930; oder C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, § 13–19. Leipzig 1935.

und wegen (3) ist dabei

$$(5) \quad \varphi_{\mu}^{\nu}(0, x^1, x^n) = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (\text{Kronecker-Symbol}).$$

IV. Die Funktionen  $\varphi_{\mu}^{\nu}(t, x^1, x^n)$  sind in  $B_{n+1}$  ebenfalls stetig und genügen den „Variationsgleichungen“:

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi_{\mu}^{\nu}(t, x^1, x^n)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n P_i^{\nu}(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) \varphi_{\mu}^i(t, x^1, x^n).$$

V. Ist  $(y^1, y^n)$  ein Punkt von  $B_n$ , so hat das Gleichungssystem

$$\varphi^{\nu}(t, x^1, x^n) = y^{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

für hinreichend kleines  $|t|$  genau eine in  $B_n$  liegende Auflösung nach  $x^1, \dots, x^n$ , und zwar ist

$$x^{\nu} = \varphi^{\nu}(-t, y^1, y^n) \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Das sieht man so ein: Da die unabhängige Variable  $t$  auf der rechten Seite des Systems (1) nicht vorkommt, so ist

$$x^{\nu} = \varphi^{\nu}(t - t', x^1, x^n) \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

ebenfalls eine Lösung von (1), und zwar diejenige eindeutig bestimmte, die für  $t = t'$  die Werte  $x^{\nu} = x^{\nu}$  annimmt. Setzt man daher

$$(7) \quad \varphi^{\nu}(t' - t', x^1, x^n) = y^{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

so sagen diese Gleichungen aus, daß diejenige Lösung von (1), welche für  $t = t'$  die Werte  $x^{\nu}$  annimmt, für  $t = t''$  die Werte  $y^{\nu}$  hat. Entsprechend sagen die Gleichungen

$$(8) \quad \varphi^{\nu}(t' - t'', y^1, y^n) = x^{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

aus, daß diejenige Lösung von (1), welche für  $t = t''$  die Werte  $y^{\nu}$  annimmt, für  $t = t'$  die Werte  $x^{\nu}$  hat. Beide Aussagen sind aber identisch. Also sind die Gleichungen (7) gleichbedeutend mit (8). Für  $t' = 0, t'' = t$  ist das die Behauptung.

### § 3.

#### Beweis des Satzes in § 1.

Unter den Voraussetzungen des in § 1 formulierten Satzes betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx^{\nu}}{dt} = P^{\nu}(x^1, x^n) \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

und bezeichnen seine Lösung wie in § 2 mit

$$\varphi^{\nu}(t, x^1, x^n);$$

dann gelten für diese Funktionen  $\varphi^*$  die Sätze des § 2, B I bis V. Nun bilden wir, wenn  $f(x^1, x^n)$  die in dem Satz des § 1 vorkommende Funktion ist, die Funktion

$$(9) \quad f(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) = F(t, x^1, x^n),$$

die nach § 2, B II in einem dort charakterisierten Bereich  $B_{n+1}$  des  $(t, x^1, x^n)$ -Raumes existiert. Wegen (3) ist speziell

$$(10) \quad F(0, x^1, x^n) = f(x^1, x^n).$$

Die Funktion  $F(t, x^1, x^n)$  ist nach  $t$  differenzierbar, und zwar ist nach § 2, A und B I

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x^1, x^n)}{\partial t} &= \sum_{\mu=1}^n f_{\mu}(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) \frac{\partial \varphi^{\mu}(t, x^1, x^n)}{\partial t} \\ &= \sum_{\mu=1}^n f_{\mu}(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) P^{\mu}(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) \\ &= 0 \quad (\text{wegen Voraussetzung (P)}). \end{aligned}$$

Daher ist  $F(t, x^1, x^n)$  von  $t$  unabhängig, also wegen (10) gleich  $f(x^1, x^n)$ . Nach (9) besagt das, daß die Funktion  $f$  im Bereich  $B_{n+1}$  der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$(11) \quad f(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) = f(x^1, x^n).$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach  $x^*$  gemäß § 2, A und B III

$$\sum_{\mu=1}^n f_{\mu}(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) \varphi_{\mu}^*(t, x^1, x^n) = f_{x^*}(x^1, x^n).$$

Wenn man diese Formel mit  $Q^*(x^1, x^n)$  multipliziert und dann nach  $x$  summiert, ergibt sich mit Rücksicht auf die Voraussetzung (Q):

$$(12) \quad \sum_{\mu=1}^n \sum_{x=1}^n f_{\mu}(\varphi^1(t, x^1, x^n), \varphi^n(t, x^1, x^n)) \varphi_{\mu}^*(t, x^1, x^n) Q^*(x^1, x^n) = 0.$$

Hier ändern wir nun die Bezeichnung, indem wir

$$\varphi^*(t, x^1, x^n) = y^*$$

setzen. Nach § 2, B V ist dann

$$x^* = \varphi^*(-t, y^1, y^n)$$

zu setzen, so daß (12) übergeht in

$$(13) \quad \sum_{\mu=1}^n \sum_{x=1}^n f_{\mu}(y^1, y^n) \varphi_{\mu}^*(t, y^1, y^n) \Omega^*(t, y^1, y^n) = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$(14) \quad \varphi_x''(t, \varphi^1(-t, y^1, y^n), \varphi^n(-t, y^1, y^n)) = \Phi_x''(t, y^1, y^n),$$

$$(15) \quad Q^x(\varphi^1(-t, y^1, y^n), \varphi^n(-t, y^1, y^n)) = \Omega^x(t, y^1, y^n)$$

gesetzt worden ist.

Soweit steht die Sache, wenn auch in etwas anderer Aufmachung, so doch dem Wesen nach bei Herrn Chow a. a. O. Die zu beweisende Formel entsteht nun, wie wir sehen werden, einfach aus der Formel (13), indem man sie an der Stelle  $t = 0$  nach  $t$  differenziert. Diese Differentiation kann aber nicht auf die übliche Weise vorgenommen werden, weil die Funktionen  $\varphi_x''(t, x^1, x^n)$  zwar stetige partielle Ableitungen nach ihrem ersten Argument haben (nach § 2, B IV), im allgemeinen aber keine nach den anderen Argumenten. Um trotzdem die Differentiation als möglich zu erkennen und durchzuführen, bemerken wir zunächst, daß auf die Funktion  $\Omega^x$  allerdings die übliche Differentiationsmethode (§ 2, A) anwendbar ist, und zwar erhält man

$$\frac{\partial \Omega^x(t, y^1, y^n)}{\partial t} = \sum_{r=1}^n Q_r^x(\varphi^1(-t, y^1, y^n), \varphi^n(-t, y^1, y^n)) \frac{\partial \varphi^r(-t, y^1, y^n)}{\partial t},$$

was mit Rücksicht auf (2) gleich

$$- \sum_{r=1}^n Q_r^x(\varphi^1(-t, y^1, y^n), \varphi^n(-t, y^1, y^n)) P^r(\varphi^1(-t, y^1, y^n), \varphi^n(-t, y^1, y^n))$$

ist. Speziell für  $t = 0$  folgt daraus mit Rücksicht auf (3)

$$(16) \quad \left[ \frac{\partial \Omega^x(t, y^1, y^n)}{\partial t} \right]_{t=0} = - \sum_{r=1}^n Q_r^x(y^1, y^n) P^r(y^1, y^n).$$

Nicht so mechanisch kann die Funktion  $\Phi_x''$  differenziert werden. Aus (14) folgt aber, wenn zur Abkürzung  $\bar{\varphi}^r$  statt  $\varphi^r(-t, y^1, y^n)$  geschrieben und die Beziehung  $\varphi^r(0, y^1, y^n) = y^r$  (vgl. (3)) benutzt wird:

$$\Phi_x''(t, y^1, y^n) - \Phi_x''(0, y^1, y^n) = \varphi_x''(t, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n) - \varphi_x''(0, y^1, y^n).$$

Nun ist nach (5)

$$\varphi_x''(0, y^1, y^n) = \varphi_x''(0, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n) \quad (\text{nämlich beides} = \delta_x''),$$

so daß aus der vorigen Formel folgt:

$$\Phi_x''(t, y^1, y^n) - \Phi_x''(0, y^1, y^n) = \varphi_x''(t, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n) - \varphi_x''(0, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n).$$

Die rechte Seite ist aber nach dem Mittelwertsatz gleich

$$t \left[ \frac{\partial \varphi_x''}{\partial t} \right]_{\theta t, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n} \quad (0 < \theta < 1),$$

wobei die partielle Ableitung nur nach dem ersten Argument zu nehmen ist ohne Rücksicht darauf, daß auch die anderen Argumente  $\bar{\varphi}^s$  noch von  $t$  abhängen. Mit Rücksicht auf (6) ergibt sich daher

$$\frac{\Phi_x^\mu(t, y^1, y^n) - \Phi_x^\mu(0, y^1, y^n)}{t} = \sum_{i=1}^n P_i^\mu(\varphi^1(\theta t, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n), \varphi^n(\theta t, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n)) \varphi_x^i(\theta t, \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^n).$$

Läßt man jetzt  $t$  gegen 0 wandern, so wandert  $\bar{\varphi}^r = \varphi^r(-t, y^1, y^n)$  nach (3) gegen  $y^r$ , und man erhält

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \Phi_x^\mu(t, y^1, y^n)}{\partial t} \right]_{t=0} &= \sum_{i=1}^n P_i^\mu(\varphi^1(0, y^1, y^n), \varphi^n(0, y^1, y^n)) \varphi_x^i(0, y^1, y^n) \\ &= \sum_{i=1}^n P_i^\mu(y^1, y^n) \delta_x^i = P_x^\mu(y^1, y^n). \end{aligned}$$

Das ergibt schließlich in Verbindung mit (16) die Formel

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\partial (\Phi_x^\mu(t, y^1, y^n) \Omega^x(t, y^1, y^n))}{\partial t} \right]_{t=0} \\ &= P_x^\mu(y^1, y^n) \Omega^x(0, y^1, y^n) - \Phi_x^\mu(0, y^1, y^n) \sum_{r=1}^n Q_r^x(y^1, y^n) P^r(y^1, y^n) \\ &= P_x^\mu(y^1, y^n) Q^x(y^1, y^n) - \delta_x^\mu \sum_{r=1}^n Q_r^x(y^1, y^n) P^r(y^1, y^n). \end{aligned}$$

Diese Ableitung an der Stelle  $t = 0$  existiert also. Man kann daher die Formel (13) an der Stelle  $t = 0$  nach  $t$  differenzieren und erhält:

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{x=1}^n f_\mu(y^1, y^n) [P_x^\mu(y^1, y^n) Q^x(y^1, y^n) - \delta_x^\mu \sum_{r=1}^n Q_r^x(y^1, y^n) P^r(y^1, y^n)] = 0,$$

oder also

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^n \sum_{x=1}^n f_\mu(y^1, y^n) P_x^\mu(y^1, y^n) Q^x(y^1, y^n) - \\ &- \sum_{\mu=1}^n \sum_{r=1}^n f_\mu(y^1, y^n) Q_r^\mu(y^1, y^n) P^r(y^1, y^n) = 0, \end{aligned}$$

oder schließlich, wenn man die Argumente  $y^1$  unterdrückt:

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{r=1}^n (P_r^\mu Q^r - Q_r^\mu P^r) f_\mu = 0.$$

Das ist die zu beweisende Formel.

(Eingegangen am 16. 7. 1940.)

# Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen. I.

Von

G. Tautz in Breslau.

Die elliptische Differentialgleichung

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y)$$

läßt sich bekanntlich, wenn man die Koeffizientenfunktionen  $a, b, c$  bloß als stetig voraussetzt, im allgemeinen nicht klassisch lösen. Hinreichend für die Lösbarkeit ist z. B. die Hölderstetigkeit von  $a, b, c$ . Aber auch in diesem Falle braucht noch nicht der adjungierte Ausdruck

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv$$

zu existieren, da für  $v(x) \neq 0$   $\frac{\partial a}{\partial x}$  und  $\frac{\partial b}{\partial y}$  existieren müssen.

Es liegt nun der Versuch nahe, die elliptische Differentialgleichung in ähnlicher Weise zu verallgemeinern wie die Poissonsche<sup>1)</sup>. In der Gleichung ( $d\omega = dx dy$ )

$$\int_{\omega} \Delta u d\omega = - \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = - 2\pi \int_{\omega} \rho d\omega = - 2\pi \mu(\omega)$$

( $s$  die Kontur von  $\omega$ )

kann man die Voraussetzung, daß die Massenverteilung  $\mu(\omega)$  eine Dichte  $\rho$  besitzt, fallen lassen und sie nur als absolut additive Mengenfunktion ansetzen. Nach Evans<sup>1)</sup> besitzt dann das logarithmische Potential fast überall erste Ableitungen und genügt für fast alle glatten Kurven der Gleichung

$$\int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 2\pi \mu(\omega).$$

Verfahren wir mit der elliptischen Differentialgleichung in ähnlicher Weise, so kommen wir auf die Gleichung

$$(1) \quad - \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dA + \frac{\partial u}{\partial y} dB + u dC \right) = F(\omega),$$

wo jetzt  $A(\omega), B(\omega), C(\omega), F(\omega)$  absolut additive Mengenfunktionen<sup>2)</sup> sind.

<sup>1)</sup> Vgl. G. C. Evans, Amer. Journ. 51, S. 1–18.

<sup>2)</sup> N. Gunther (Sur les Intégrales de Stieltjes ..., Travaux de l'Institut Stekloff 1932, Cap. 9) hat eine etwas andere Verallgemeinerung gewisser Differentialgleichungen studiert, wo die gesuchte Funktion Mengenfunktion ist.

Der Gedanke, die Gleichung  $L(u) = f$  in integrierter Form zu untersuchen, findet sich auch bei P. Gillis<sup>3)</sup>; welcher die Gleichung

$$(2) \quad - \int \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial u}{\partial y} b + c u - f \right) d\omega = 0$$

durch sukzessive Approximation für kleine Gebiete und hinreichend reguläre Randfunktionen löst, unter der Voraussetzung, daß die Dichten  $a, b, c, f$ , die in unserem Falle nicht zu existieren brauchen, beschränkt und meßbar sind.

Im folgenden wird eine Theorie der Gleichung (1) entwickelt für den Fall, daß die Koeffizientenfunktionen einer Bedingung genügen, die der Hölderstetigkeit von Punktfunktionen entspricht.

Durch die Lösung der Gleichung (1) wird es ermöglicht, zu jedem Operator  $L(u)$  im klassischen Sinne mit hölderstetigen Koeffizienten  $a, b, c$  einen adjungierten Operator in dem hier behandelten Sinne aufzustellen und die zugehörige Gleichung zu lösen (§ 3).

Im ersten Teile behandeln wir im wesentlichen das Dirichletsche Problem für kleine und hinreichend reguläre Gebiete und damit zusammenhängende Fragen.

Es wird zunächst das Dirichletsche Problem bei der homogenen Gleichung für den Kreis mit beschränkter integrierbarer Randfunktion durch sukzessive Approximation gelöst. Dann wird die inhomogene und die adjungierte Gleichung behandelt und die Eindeutigkeit der Lösung im Kleinen bewiesen. Es folgt ein Satz über die Maximumeigenschaften der Lösungen, der für das Weitere von Wichtigkeit ist, und schließlich wird die Existenz der Greenachen Funktion für kleine Gebiete nachgewiesen. Im zweiten Teile wird das verallgemeinerte Dirichletsche Problem in Angriff genommen und nach der Methode von O. Perron gelöst. Das Verhalten auf dem Rande wird unter Benutzung einer passenden Verallgemeinerung des Begriffs der Kapazität untersucht. Das Hauptresultat ist der Satz, daß die für die Laplacesche Gleichung regulären Punkte mit den für  $L(u)$  regulären übereinstimmen. In einer früheren Arbeit<sup>4)</sup> habe ich nur die eine Hälfte dieses Satzes bei einem viel spezielleren Gleichungstyp beweisen können.

### § 1.

#### Fünf Hilfssätze.

Den ersten Hilfssatz geben wir ohne Beweis. Der Beweis des dritten ist sehr umständlich und wird, um den Zusammenhang nicht zu zerreißen, ebenso wie der Beweis des vierten und fünften im Schlußparagrafen wiedergegeben.

<sup>3)</sup> Acad. roy. Belg. Bull., 5. Sér., 22, S. 835.

<sup>4)</sup> Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem. Math. Zeitschr. 39.

Hilfssatz 1. Die Funktionen  $f(P)$  und  $g(P)$  seien im Kreise  $K$  stetig,  $g(P)$  nicht notwendig beschränkt.  $A(\omega)$  sei eine absolut additive Mengenfunktion. Existiert das Integral

$$\int_K |f| \cdot |g| dA$$

und setzt man  $\int f dA = B(\omega)$ , so gilt

$$\int g dB = \int g \cdot f \cdot dA$$

(die hier auftretenden Mengen sind immer als  $B$ -meßbar vorausgesetzt).

Hilfssatz 2.  $A(\omega)$  sei absolut additiv in  $K$  und für jeden konzentrischen Kreis  $\tau$  um einen bestimmten Punkt  $P_0$  vom Radius  $r$  sei

$$(3) \quad \|A(\tau)\| \leq C \cdot r^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

$\|F(\omega)\|$  bedeutet die totale Schwankung der Funktion  $F(\omega)$ .  $\varphi(P)$  sei eine  $B$ -meßbare Funktion, die in bezug auf  $P_0$  der Bedingung genügt

$$|\varphi(P)| \leq C_1 \cdot r^{-\beta} \quad (\alpha - \beta > 0).$$

Dann ist

$$(4) \quad \left| \int_\tau \varphi dA \right| \leq C_2 \cdot r^{\alpha - \beta}.$$

Wir können  $A(\omega)$  als positiv monoton und die Konstanten  $C$  und  $C_1$  gleich der Einheit annehmen. Dann ist für einen Kreisring  $\tau$ , ( $\varepsilon \leq t \leq r$ ) um  $P_0$

$$\left| \int_\tau \varphi(P) dA \right| \leq \int_\tau t^{-\beta} dA.$$

Da das Integral rechts jetzt als Riemannsches aufgefaßt werden kann, können wir ringweise aufsummieren

$$\int_\tau t^{-\beta} dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} A(\Delta \tau_i).$$

$A(\tau)$  ist für konzentrische Kreise  $\tau$  eine monoton wachsende Funktion von  $t$

$$A(\tau) = f(t) \leq t^\alpha.$$

Also

$$\begin{aligned} \int_\tau t^{-\beta} dA &= \int_\tau t^{-\beta} df(t) = r^{-\beta} f(r) - \varepsilon^{-\beta} f(\varepsilon) + \beta \int_\tau t^{-\beta-1} f(t) dt \\ &\leq r^{-\beta} f(r) - \varepsilon^{-\beta} f(\varepsilon) + |\beta| \frac{r^{\alpha-\beta} - \varepsilon^{\alpha-\beta}}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Wegen  $\alpha - \beta > 0$  existiert der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und es ergibt sich somit die zu beweisende Abschätzung

$$\int_\tau t^{-\beta} dA \leq \left(1 + \frac{|\beta|}{\alpha - \beta}\right) r^{\alpha - \beta}.$$

Bemerkung. Formal gelangt man zu diesem Resultat, indem man in (3) auf beiden Seiten zum Differential übergeht mit eventueller Vergrößerung der Konstanten

$$\|dA\| \leq C^* r^{\alpha-1} d\tau.$$

In dieser Weise werden wir meistens den Satz benutzen.

Im folgenden sei der Einfachheit halber  $K$  der Einheitskreis. Sei

$$x + iy = z, \quad \xi + i\eta = \zeta = \varrho e^{i\varphi}, \quad |\zeta - z| = r.$$

$\Gamma(z, \zeta)$  bedeute die Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung für  $K$ . Mit  $Df$  werde im folgenden stets eine der Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , mit  $D_z f(z, \zeta)$  eine Ableitung in bezug auf das Argument  $z$  bezeichnet.

Definition. Die in dem ebenen Gebiet  $T$  definierte absolut additive Mengenfunktion  $F(\omega)$  genügt daselbst einer Hölderbedingung mit dem Exponenten  $\alpha > 0$ , wenn es positive Zahlen  $r_0$  und  $C$  gibt derart, daß für jeden Kreis  $\tau$  vom Radius  $r \leq r_0$

$$(H) \quad \|F(\tau)\| < C \cdot r^{1+\alpha}$$

gilt. ( $F$  wird, soweit nötig, außerhalb  $T$  durch Null ersetzt.)

Hilfssatz 3.  $F(\omega)$  genüge in  $K$  einer Hölderbedingung mit dem Exponenten  $\alpha > 0$ . Dann gelten für die Integrale

$$J_\beta(z) = \int_K \frac{\Gamma(z, \zeta)}{(1-\varrho)^\beta} dF_\zeta, \quad K_\beta(z) = \int_K \frac{D_z \Gamma(z, \zeta)}{(1-\varrho)^\beta} dF_\zeta;$$

$$(0 \leq \beta \leq 1)$$

die Beziehungen

$$(5) \quad |J_\beta(z)| \leq C(1-|z|)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad |K_\beta(z)| \leq \begin{cases} C/(1-|z|)^{\beta-\alpha} & (\alpha \neq \beta) \\ C \cdot \lg \frac{1}{1-|z|} & (\alpha = \beta). \end{cases}$$

Hilfssatz 4. Genügt die Belegungsfunktion  $F(\omega)$  in  $T$  einer Hölderbedingung mit dem Exponenten  $\alpha$ , so existieren in jedem Punkte der Ebene die ersten Ableitungen des logarithmischen Potentials

$$v(P) = \int_T \lg \frac{1}{r} dF.$$

Sie sind hölderstetig vom Exponenten  $\alpha$ , und zwar ist  $D_z v = \int_T D_z \lg \frac{1}{r} dF$ .

Hilfssatz 5.  $F(\omega)$  sei hölderstetig im Quadrat  $T$ . Dann kann  $F(\omega)$  durch absolut stetige Mengenfunktionen  $F_k(\omega)$  mit stetiger Dichte  $\varphi_k(P)$  in folgender Weise schwach approximiert werden.

$$\varphi_k(P) = \frac{F(\omega_k(P))}{|\omega_k|}, \quad F_k(\omega) = \int_\omega \varphi_k(P) d\omega,$$

$\omega_k(P)$  ist ein Kreis vom Radius  $\frac{1}{k}$  um  $P$ ,  $|\omega_k|$  der Inhalt von  $\omega_k(P)$ .  $F$  wird außerhalb  $T$  gleich Null gesetzt. Für jede stetige Funktion  $f(P)$  gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T f(P) dF_k = \int_T f(P) dF.$$

## § 2.

### Lösung des Dirichletschen Problems für kleine Gebiete.

Wir gehen nun an die Lösung der homogenen Gleichung

$$(1_b) \quad L(u) = - \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dA + \frac{\partial u}{\partial y} dB + u dC \right) = 0,$$

gültig für alle Gebiete  $\omega$ , die von einer stückweise glatten einfachen Kurve berandet werden und in einem Gebiet  $T$  liegen.

Die Funktionen  $A, B, C$  seien in  $T$  absolut additiv und genügen dort einer Hölderbedingung mit dem Exponenten  $\alpha > 0$ .

**Satz 1.** *Der Kreis  $K$  sei hinreichend klein,  $f(s)$  eine auf dem Rande  $S$  von  $K$  definierte beschränkte  $L$ -integrale Funktion der Bogenlänge  $s$ . Dann gibt es im Innern von  $K$  eine mit hölderstetigen ersten Ableitungen versehene Funktion  $u(x, y)$ , welche (1<sub>b</sub>) befriedigt, fast überall im Fatouschen Sinne gegen die Randwerte  $f(s)$  strebt, und für welche das Verhältnis des Absolutbetrages zur wesentlichen oberen Grenze von  $|f(s)|$  unter einer festen Schranke bleibt. Die entsprechende Aufgabe ist ebenfalls lösbar für jedes hinreichend kleine Gebiet endlichen Zusammenhanges, das von endlich vielen analytischen Kurven berandet wird, falls die Randfunktion eine hölderstetige Ableitung nach der Bogenlänge besitzt. Die Lösung ist bei Ergänzung durch die Randwerte im abgeschlossenen Gebiet samt ihren ersten Ableitungen gleichfalls hölderstetig.*

Da  $L(u)$  offenbar ohne Verletzung der Voraussetzungen konforme Abbildung gestattet, gilt die Behauptung des ersten Teiles auch für einfach zusammenhängende Gebiete mit stetig gekrümmter Berandung.

Die entsprechende Aufgabe für den Fall des klassischen Operators mit hölderstetigen Koeffizienten  $a, b, c$  hat Lichtenstein<sup>5)</sup> behandelt.

Nach dem Vorbild von Lichtenstein (l. c.) suchen wir die Lösung durch sukzessive Approximation zu bestimmen. Sei  $u_0(x, y)$  die durch das Poisson'sche Integral den Randwerten  $f(s)$  zugeordnete Potentialfunktion.

$$\Gamma(z, \zeta) = \Gamma(P, Q) \quad (P(x, y), Q(\xi, \eta))$$

<sup>5)</sup> Vgl. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 14 (1915), S. 130. Auch der in § 7 bewiesene Hilfssatz 3 stellt eine Verallgemeinerung ähnlicher Beziehungen dar, die Lichtenstein a. a. O. für Riemannsche Integrale hergeleitet hat. Allerdings mußte der Beweis in unserem Falle völlig anders geführt werden.

sei die zu  $K$  gehörige Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung. Dann setzen wir

$$(6) \quad u_1 = \frac{1}{2\pi} \int_K \Gamma(P, Q) \left[ \frac{\partial u_0}{\partial \xi} dA(Q) + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} dB(Q) + u_0 dC(Q) \right]$$

und allgemein

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_K \Gamma(P, Q) \left[ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} dA(Q) + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} dB(Q) + u_{n-1} dC(Q) \right],$$

falls die Integrale existieren, und

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

falls die Reihe konvergiert.

Nach Lichtenstein<sup>\*)</sup> genügen die ersten Ableitungen von  $u_0$  einer Abschätzung

$$(7) \quad |D u_0(\varrho, \varphi)| < \frac{H \cdot F}{R - \varrho},$$

wo  $H$  nur vom Radius  $R$  des Kreises  $K$  abhängt und  $F$  eine obere Schranke für  $|f(s)|$ , also auch für  $|u_0|$  ist.

Nun sind z. B. die Funktionen  $\Gamma(P, Q) \frac{\partial u_0}{\partial \xi}$ , bzw.  $D\Gamma(P, Q) \frac{\partial u_0}{\partial \xi}$  für festes  $P$  im Innern von  $K$  stetig außer für  $Q = P$ , woselbst sie wie  $\lg \frac{1}{r}$  bzw.  $\frac{1}{r}$  unendlich werden. In der Umgebung des Randes aber bleiben sie wegen (7) und wegen des Verschwindens der Greenschen Funktion beschränkt. Nach Hilfssatz 2 (man hat  $\alpha$  durch  $\alpha + 1$  zu ersetzen) existiert also das Integral in (6) und genügt einer Abschätzung

$$|u_1| \leq H \cdot F,$$

wo  $H$  nur vom Kreisradius und den Koeffizienten  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$ ,  $C(\omega)$  abhängt. Ebenso existiert das Integral.

$$(6a) \quad \frac{1}{2\pi} \int_K D_P \Gamma(P, Q) \left[ \frac{\partial u_0}{\partial \xi} dA(Q) + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} dB(Q) + dC(Q) \right].$$

<sup>\*)</sup> Vgl. Journ. f. reine und angew. Math. 141, S. 20–22 und die Arbeit des Verf. Jber. Deutsch. Math. Vereinig. 48, S. 182. Mittels Ähnlichkeitstransformation erkennt man übrigens leicht, daß, wenn z. B.  $H$  die Konstante für den Einheitskreis ist, die Konstante für den Kreis vom Radius  $R$  den Wert  $H_R = H \cdot R$  haben darf. Natürlich hätte man gleich von vornherein auf den Einheitskreis transformieren können, wobei sich die Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nur mit gewissen Faktoren multipliziert hätten.

Wir zeigen, daß es die Ableitungen von  $u_1$  darstellt.  $P$  werde auf einen im Innern von  $K$  liegenden Kreis  $K_1$  eingeschränkt. Nach Hilfssatz 2 und den früheren Bemerkungen genügt die Funktion

$$F_0(\omega) = \int_{\omega} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} dA + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} dB + u_0 dC \right)$$

in  $K_1$  ebenfalls noch der Hölderbedingung

$$\|F_0(\tau)\| < C \cdot r^{1+\alpha}.$$

Es ist  $\Gamma(P, Q) = \lg \frac{1}{r} + v$ , und  $v$  harmonisch in  $P$  und  $Q$ , da  $P$  auf  $K_1$  eingeschränkt ist.

$\int_{K_1} v dF_0$  ist offenbar harmonisch in  $P$  und  $\int_{K_1} \lg \frac{1}{r} dF_0$  besitzt nach Hilfssatz 4 hölderstetige erste Ableitungen  $\int_{K_1} D \lg \frac{1}{r} dF_0$ . Mithin ist

$$D_P \int_{K_1} \Gamma(P, Q) dF_0(Q) = \int_{K_1} D_P \Gamma(P, Q) dF_0(Q)$$

und  $\int_{K_1} D_P \Gamma dF_0$  hölderstetig in  $K_1$ . Sei jetzt  $K_n$  eine Folge von konzentrischen Kreisen

$$K_n \rightarrow K, \quad K_n \supset K_1.$$

$U_n = \int_{K_n - K_1} \Gamma(P, Q) dF_0(Q)$  ist offenbar auch harmonisch in jedem ganz im Innern von  $K_1$  liegenden abgeschlossenen Bereiche. Wegen Hilfssatz 1 ist

$$\int_{K_n - K_1} \Gamma dF_0 = \int_{K_n - K_1} \Gamma \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} dA + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} dB + u_0 dC \right).$$

Infolge der gleichmäßigen Beschränktheit von  $\Gamma \frac{\partial u_0}{\partial \xi}$ ,  $\Gamma \frac{\partial u_0}{\partial \eta}$ ,  $\Gamma u_0$  in der Umgebung des Randes, konvergiert für  $n \rightarrow \infty$   $\int_{K_n - K_1} \Gamma dF_0$  gleichmäßig in  $K_1$  und ebenso  $\int_{K_n - K_1} D_P \Gamma dF_0 = D_P U_n$ .  $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$  und  $DU = \lim_{n \rightarrow \infty} DU_n$  ist also harmonisch im Innern von  $K_1$ . Es ist also  $U + \int_{K_1} \Gamma dF_0 = 2\pi u_1$ . Weiterhin ist

$$D_P u_1 = \frac{1}{2\pi} D_P U + \frac{1}{2\pi} \int_{K_1} D_P \Gamma dF_0 = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} D_P U_n + \frac{1}{2\pi} \int_{K_1} D_P \Gamma dF_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{K_1} D_P \Gamma dF_0.$$

Aus dem Beweise folgt außerdem die Hölderstetigkeit von  $Du_1$ .

Mittels Hilfssatz 3 ergibt sich, daß die Funktion  $u_1$  die Randwerte Null besitzt, während die ersten Ableitungen von  $u_1(\varrho, \varphi)$  höchstens wie  $\frac{1}{(R-\varrho)^{1-\alpha}}$  unendlich werden. Genauer ist

$$(7a) \quad |Du_1(\varrho, \varphi)| \begin{cases} < \frac{H \cdot F}{(R-\varrho)^{1-\alpha}} & (\alpha < 1) \\ < H \cdot F \cdot |\lg |R - \varrho|| & (\alpha = 1), \end{cases}$$

wo  $F$  wie in (7) die Schranke für  $|u_0|$  ist, während die Konstante  $H$  nur von  $K$  und den totalen Variationen der Koeffizienten  $A, B, C$  abhängt. Dies ist leicht aus (6a) und (7) zu entnehmen.

Wir haben jetzt für  $|u_1|$  und  $|Du_1|$  ähnliche Abschätzungen wie für  $|u_0|$  und  $|Du_0|$  erhalten. Die Schranke für  $|Du_1|$  wird sogar schwächer unendlich gegen den Rand hin als die von  $|Du_0|$ . Es lassen sich daher bei  $u_1$  dieselben Schlüsse anwenden wie bei  $u_0$ .  $u_2$  und  $Du_2$  existieren also und es ist, wenn

noch  $\int_{\omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi} dA + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} dB + u_1 dC \right) = F_1(\omega)$  gesetzt wird,

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_K \Gamma(P, Q) dF_1(Q),$$

$$Du_2 = \frac{1}{2\pi} \int_K D \Gamma(P, Q) dF_1(Q),$$

$$|u_2| < H \cdot F,$$

$$|Du_2| < \frac{H \cdot F}{(R-\varrho)^{1-2\alpha}} \quad (\alpha \neq \frac{1}{2})$$

$$< H \cdot F \cdot |\lg |R - \varrho|| \quad (\alpha = \frac{1}{2}),$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow R} u_2(\varrho, \varphi) = 0.$$

Dies läßt sich fortsetzen und wir gewinnen allgemein die folgende Abschätzung (nach eventueller Vergrößerung von  $H$ ):

$$|u_k| < H \cdot F, \quad |Du_k| < \frac{H \cdot F}{(R-\varrho)^{1-2\alpha}} \quad \left( \alpha \neq \frac{1}{k} \right)$$

$$< H \cdot F \cdot |\lg |R - \varrho|| \quad \left( \alpha = \frac{1}{k} \right)$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow R} u_k = 0.$$

Die Ordnung des Unendlichwerdens am Rande bei den Ableitungen nimmt also dauernd ab, und für einen gewissen Index  $n_0$  wird somit einmal die folgende Abschätzung erreicht

$$(8) \quad \begin{aligned} |u_{n_0}| &< H_0 \cdot F, \\ |Du_{n_0}| &< H_0 \cdot F, \end{aligned}$$

wo  $H$  nur vom Kreise und von den Funktionen  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$ ,  $C(\omega)$  abhängt. Der weitere Schluß erfolgt in bekannter Weise. Setzen wir

$$M = \text{Max}_K \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_K \Gamma (\|dA\| + \|dB\| + \|dC\|), \frac{1}{2\pi} \int_K |D\Gamma| (\|dA\| + \|dB\| + \|dC\|) \right\},$$

so kann man  $K$  so klein wählen, daß

$$M < 1$$

ausfällt. Sei nun

$$\text{Max} (|u_n|, |Du_n|) = U_n \quad (n > n_0); \quad U_{n_0} = H_0 \cdot F,$$

so ergibt sich

$$U_{n+1} \leq M U_n \leq M^n - n_0 + 1 U_{n_0}.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $\sum_{n=n_0}^{\infty} U_n < \frac{U_{n_0}}{1-M}$  folgt die gleichmäßige

Konvergenz von  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$  und  $\sum_{n=n_0}^{\infty} Du_n$  und damit die Gleichung

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} Du_n = Du,$$

sowie die Hölderstetigkeit von  $Du$ . Wählen wir die Konstante  $H_0$  in (8), die nur von  $K$  und den Funktionen  $A, B, C$  abhängt, so, daß sie für alle Ungleichungen

$$|u_k| < H_0, \quad |Du_k| < \frac{H_0 F}{R-\varrho} \quad (k < n_0); \quad U_{n_0} \leq H_0$$

gemeinsam gilt, so erhalten wir: für  $H = \frac{H_0}{1-M}$

$$(7b) \quad \begin{aligned} |U| &\leq H \cdot F, \\ |Du| &\leq \frac{H \cdot F}{R-\varrho}, \end{aligned}$$

wo  $H$  nur vom Kreise  $K$  und den Funktionen  $A, B, C$  (d. h. von ihren Totalschwankungen und dem Exponenten  $\alpha$ ) abhängt, während  $F$  eine obere Schranke für die Randwerte  $f(s)$  von  $u$  ist; denn  $u$  erfüllt die Randbedingung in derselben Weise wie  $u_0$ .

Wir werden später (vgl. § 6) unter einer weiteren Voraussetzung eine schärfere Abschätzung für  $u$  aus dem Maximumprinzip bekommen. Wichtig ist insbesondere die zweite Ungleichung, welche zeigt, daß die ersten Ableitungen proportional mit dem Randmaximum der Funktion selbst klein werden.

Mittels (9) folgt leicht für  $u$  die Integralgleichung

$$(1_k) \quad u = u_0 + \frac{1}{2\pi} \int_K \Gamma(P, Q) \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} dA + \frac{\partial u}{\partial \eta} dB + u dC \right],$$

die mithin durch eine in  $K$  stetige mit hölderstetigen ersten Ableitungen versehene Funktion  $u$  gelöst wird.

Nun folgt aus den Arbeiten von G. C. Evans<sup>7)</sup> und dem Umstande, daß jede mit stetigen ersten Ableitungen versehene Lösung der für alle Kreislinien  $s$  eines einfach zusammenhängenden Gebietes  $T$  geltenden Gleichung

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

harmonisch ist, daß die Integralgleichung

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = G(\omega),$$

falls  $G(\omega)$  einer Hölderbedingung genügt, immer in  $T$  eine Lösung besitzt und daß diese die Form hat

$$u = u_0 + \frac{1}{2\pi} \int_T \lg \frac{1}{r} dG \quad (u_0 \text{ harmonisch in } T).$$

Ist nun  $\Gamma_T$  die Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung für das (hinreichend reguläre) Gebiet  $T$  und setzen wir

$$\Gamma_T = \lg \frac{1}{r} + v,$$

so ist offenbar

$$\int_T v(P, Q) dG(Q)$$

im Innern von  $T$  harmonisch. Unsere Lösung  $u$  von  $(1'_h)$  läßt sich also auf die gewünschte Form bringen.

Die Lösung von  $(1'_h)$  genügt also auch der Gleichung  $(1_h)$ , womit der erste Teil von Satz 1 bewiesen ist.

Was den zweiten Teil der Behauptung anlangt, so erfolgt der Existenzbeweis genau so wie beim Beweis des ersten Teiles von S. 702 ab. Man hat nur an Stelle der Abschätzung (7) die bekannte Tatsache zu benutzen, daß die ersten Ableitungen der entsprechenden Potentialfunktion  $u_0$  wegen der Voraussetzung des Satzes jetzt im abgeschlossenen Gebiet  $T$  hölderstetig sind. Damit fallen alle Schwierigkeiten mit dem Randverhalten der ersten Ableitungen fort, und der oben benutzte Index  $\alpha_0$  (S. 701) kann gleich 1 gesetzt werden. Die Hölderstetigkeit der ersten Ableitungen der Lösung im abgeschlossenen Gebiet folgt aus der Gültigkeit dieser Eigenschaft für  $u_0$  und aus Hilfssatz 4.

<sup>7)</sup> l. c. <sup>1)</sup>; vgl. auch H. J. Binney, Transact. Amer. Math. Soc. 37, S. 254–265.

## § 3.

## Die inhomogene und die adjungierte Gleichung.

Die inhomogene Gleichung brauchen wir nur für den Fall verschwindender Randwerte zu lösen. Sei also

$$L(u) = F(\omega).$$

$F(\omega)$  genüge einer Hölderbedingung mit dem Exponenten  $\beta > 0$ . Wir setzen jetzt

$$u_0 = \frac{-1}{2\pi} \int_{\bar{K}} \Gamma(P, Q) dF(Q).$$

Wie vorhin bemerkt, ist  $u_0$  eine Lösung der Gleichung

$$-\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = F(\omega).$$

Aus Hilfssatz 3 (statt  $\alpha$  ist  $\beta$ , statt  $\beta$  Null einzusetzen) folgt, daß jetzt die ersten Ableitungen von  $u_0$  sogar beschränkt sind, so daß sich die sukzessive Approximation noch glatter erledigt.

Nun wenden wir uns der Aufgabe zu, zu dem Operator (1) einen adjungierten aufzustellen, für den Fall, daß die Funktionen  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  hölderstetige Dichten  $a(P)$ ,  $b(P)$  besitzen. Es sei also

$$A(\omega) = \int_{\omega} a(P) d\omega, \quad B(\omega) = \int_{\omega} b(P) d\omega, \quad \left| a(P) - a(P_0) \right| < C \cdot \overline{P P_0}^{\alpha}, \\ \left| b(P) - b(P_0) \right|$$

Nach Gunther<sup>\*)</sup> existieren wegen der Stetigkeit von  $a$  und  $b$  die ersten Ableitungen von  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  und es gilt bei Benutzung der inneren Normalen der verallgemeinerte Gaußsche Satz

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial x} = \int_{\omega} a(P) dy, \quad \frac{\partial B(\omega)}{\partial y} = - \int_{\omega} b(P) dx.$$

Ist  $\omega$  ein Kreis vom Radius  $\varrho$  mit dem Mittelpunkt  $P_0$ , so ist z. B.

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial x} = \int_{\omega} (a(P) - a(P_0)) dy + a(P_0) \int_{\omega} dy.$$

<sup>\*)</sup> Vgl. l. c. <sup>2)</sup>, S. 360<sup>f</sup>. Do... werden Ableitungen von Bereichsfunktionen in einer bestimmten Richtung definiert; diese erhält man, indem man die Bereichsfunktion in der Weise zu einer Punktfunktion macht, daß man nur ihre Werte für alle Bereiche  $\omega_P$  ins Auge faßt, die aus einem festen Bereich  $\omega$  durch Translation hervorgehen.

Das zweite Integral rechts ist Null. Für das erste und damit für  $\frac{\partial A(\omega)}{\partial x}$  ergibt sich also die Abschätzung

$$\left\| \frac{\partial A(\omega)}{\partial x} \right\| \leq \int_0^{2\pi} |a(P) - a(P_0)| \varrho d\varphi < 2\pi C \cdot \varrho^{1+\alpha}.$$

Entsprechendes gilt für  $B(\omega)$ .

Definieren wir nun einen adjungierten Operator durch

$$\begin{aligned} M(v) &= - \int_s \frac{\partial v}{\partial n} ds - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} v a d\omega - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} v b d\omega + \int_{\omega} v dC \\ &= \int_s \left( \frac{\partial v}{\partial x} - va \right) dy - \int_s \left( \frac{\partial v}{\partial y} - vb \right) dx + \int_{\omega} v dC, \end{aligned}$$

so gilt die folgende Greensche Formel für Bereiche mit stückweise glatten Rändern

$$\int_{\omega} (v dL(u) - u dM(v)) = - \int_s \left[ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} + uv(a \cos(nx) + b \cos(ny)) \right] ds.$$

Wir beweisen sie zunächst für den Fall  $a = b = 0$  und setzen (Bezeichnung wie in Hilfssatz 5)

$$\frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k(P)} u d\omega = U_k(P), \quad \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k(P)} v d\omega = V_k(P),$$

dann ist z. B.  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k(P)} \frac{\partial u}{\partial x} d\omega$  und es gilt

$$U_k \rightarrow u, \quad V_k \rightarrow v, \quad \frac{\partial U_k}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_k}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\int_{\omega} (V_k \Delta U_k - U_k \Delta V_k) d\omega = - \int_s \left( V_k \frac{\partial U_k}{\partial n} - U_k \frac{\partial V_k}{\partial n} \right) ds \rightarrow - \int_s \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Nun folgt wie beim Beweise von Hilfssatz 5 (vgl. § 7), daß die totalen Variationen  $\int_T |\Delta U_k| d\omega$ ,  $\int_T |\Delta V_k| d\omega$  beschränkt bleiben. Also ist

$$\left| \int_{\omega} (V_k - v) \Delta U_k d\omega \right| < \varepsilon M.$$

Andererseits ergibt der genannte Hilfssatz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\omega} v \Delta U_k d\omega = \int_{\omega} v dL(u),$$

mithin ist auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\omega} V_k \Delta U_k d\omega = \int_{\omega} v dL(u).$$

woraus für  $a = b = 0$  die Behauptung folgt.

Nun ist noch zu zeigen, daß, wenn z. B.

$$\int_{\gamma} v a dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} v a d\omega = F(\omega)$$

gesetzt wird,

$$\int_{\omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} a d\omega + u dF(\omega) \right) = \int_{\gamma} u v a dy$$

ist.  $F(\omega)$  ist eine hölderstetige Mengenfunktion. Gemäß Hilfssatz 5 approximieren wir sie schwach durch Funktionen

$$\int_{\omega} \frac{F(\omega_k(P))}{|\omega_k|} d\omega = F_k(\omega).$$

Sei  $av = c$ . Für beliebiges festes  $y$  setzen wir

$$\int_{x_0}^x \frac{F(\omega_k(P))}{|\omega_k|} dx + c(x_0, y) = c_k(x, y).$$

also

$$F_k(\omega) = \int_{\omega} \frac{\partial c_k}{\partial x} d\omega.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} c_k(x, y) &= \frac{k^2}{\pi} \int_{x_0}^x dx \int_{-\pi}^{\pi} c \cdot \cos \varphi \frac{d\varphi}{k} + c(x_0, y) \\ &= \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{x_0}^x c(x + k^{-1} \cos \varphi, y + k^{-1} \sin \varphi) dx + c(x_0, y) \\ &= \frac{k}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \left[ \int_{x - k^{-1} \cos \varphi}^{x + k^{-1} \cos \varphi} c(x, y + k^{-1} \sin \varphi) dx - \int_{x_0 - k^{-1} \cos \varphi}^{x_0 + k^{-1} \cos \varphi} c(x, y + k^{-1} \sin \varphi) dx \right] \\ &\quad + c(x_0, y) \\ &= c(\xi_k, \eta_k) - c(\xi_0, \eta_0) + c(x_0, y), \end{aligned}$$

wobei der Abstand der Mittelwerte  $\xi_k, \eta_k, \xi_0, \eta_0$  von  $x, y, x_0, y$  den Wert  $\frac{1}{k}$  nicht überschreitet. Es strebt also  $c_k(x, y)$  gleichmäßig mit  $\frac{1}{k}$  gegen  $c(x, y)$ .

Unter Benutzung von Hilfssatz 1 folgt

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} c_k d\omega + u dF_k(\omega) \right) = \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} c_k + u \frac{\partial c_k}{\partial x} \right) d\omega = \int_{\gamma} u c_k dy.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $c_k$  gegen  $c = av$  und der schwachen Konvergenz von  $F_k(\omega)$  gegen  $F(\omega)$  folgt dann schließlich die Behauptung.

## § 4.

## Eindeutigkeit der Lösung.

**Definition.** Eine Lösung von  $(1_h)$  heißt in einem Gebiete (offenes Kontinuum) regulär, wenn sie daselbst stetige erste Ableitungen besitzt.

**Satz 2.** Für jeden hinreichend kleinen Kreis gibt es nur eine beschränkte und im Innern reguläre Lösung, die fast überall gegen vorgeschriebene beschränkte summable Randwerte strebt.

Wir beweisen Satz 2 zuerst unter der Annahme, daß die ersten Ableitungen von  $u$  im abgeschlossenen Kreise stetig sind.

Am Ende des vorigen Paragraphen sahen wir, daß jede mit stetigen ersten Ableitungen versehene Lösung von  $(1'_h)$  auch  $(1_h)$  genügt, und umgekehrt folgt aus den dort herangezogenen Sätzen, daß eine reguläre Lösung von  $(1_h)$  auch  $(1'_h)$  befriedigt.

$(1'_h)$  und  $(1_h)$  sind also gleichwertig.

Die Differenz  $v$  zweier in  $K$  regulärer Lösungen von  $(1_h)$  mit gleichen stetigen Randwerten genügt also der Gleichung

$$v(P) = \int_K \Gamma \left[ \frac{\partial v}{\partial \xi} dA + \frac{\partial v}{\partial \eta} dB + v dC \right] = \frac{1}{2\pi} \int_K \Gamma dF.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{\omega} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} dA + \frac{\partial v}{\partial \eta} dB + v dC \right) \\ &= \int_{\omega} dA(Q) \int_K \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}(Q, R) dF(R) + \int_{\omega} dB(Q) \int_K \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(Q, R) dF(R) + \\ &\quad + \int_{\omega} dC(Q) \int_K \frac{\Gamma(Q, R)}{2\pi} dF(R) \\ &= \int_K H(R; \omega) dF(R), \\ H(R; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \left[ \frac{\partial \Gamma(Q, R)}{\partial \xi} dA(Q) + \frac{\partial \Gamma(Q, R)}{\partial \eta} dB(Q) + \Gamma(Q, R) dC(Q) \right]. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Vertauschung gestattet ist, weil wegen der Stetigkeit der ersten Ableitungen  $Dv$  die Funktion  $F(\omega)$  in  $K$  der gleichen Hölderbedingung genügt wie  $A$ ,  $B$  und  $C$ .  $F(\omega)$  befriedigt also die Stieltjesintegralgleichung

$$(10) \quad F(\omega) = \int_K H(R; \omega) dF(R).$$

$H(R; \omega)$  ist bei beliebigem, aber festem  $\omega$  offenbar stetig in  $R$ . Für  $\omega = K$  folgt dies aus Hilfssatz 3, wenn man dort  $\beta = 0$  setzt. Bei festem  $R$  ist  $H$  im abgeschlossenen Kreise absolut additiv und genügt sogar gleichmäßig bezüglich  $R$  einer Hölderbedingung mit dem Exponenten  $\alpha$ . Dies folgt leicht aus Hilfssatz 2, wenn man berücksichtigt, daß die ersten Ableitungen der Greenschen Funktion einer Abschätzung

$$D\Gamma \leq \frac{2}{r}$$

genügen. Multiplizieren wir (10) mit  $H(P; \omega_1)$  und integrieren, so erhalten wir

$$\int_K H(P; \omega_1) dF(\omega_P) = \int_K H(P; \omega_1) d_P \int_K H(R; \omega_P) dF(R).$$

Nach dem über  $H(P; \omega)$  Gesagten können wir rechts die Integrationen vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} F(\omega_1) &= \int_K H(P; \omega_1) dF(P) = \int_K H_2(R; \omega_1) dF(R), \\ (11) \quad H_2(R; \omega_1) &= \int_K H(P; \omega_1) dH(R; \omega_P). \end{aligned}$$

Nun wählen wir  $K$  so klein, daß

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_K \left( \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right| \|dA\| + \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right| \|dB\| + \Gamma \|dC\| \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_K \frac{2}{r} [\|dA\| + \|dB\| + \|dC\|] < q < 1 \end{aligned}$$

wird, was nach Hilfssatz 2 ja möglich ist; dann ist

$$\left| \frac{H}{\int_K \|dH\|} \right| < q < 1.$$

Durch weitere Iteration folgt

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_K H_n(R; \omega) dF(R), \\ |H_n(R; \omega)| &< q^n, \\ |F(\omega)| &\leq \int_K \|dF\| \cdot q^n, \\ F(\omega) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Damit ist der spezielle Fall erledigt. Außerdem ergibt sich nebenbei folgendes Resultat für die Lösung von (1<sub>b</sub>):

Damit

$$(12) \quad u = u_0 + \int_K \Gamma(P, Q) d\mu(Q)$$

eine Lösung von  $(1_h)$  ist, ist notwendig und hinreichend, daß  $\mu(\omega)$  der Stieltjes-integralgleichung

$$(1_h'') \quad \mu(\omega) = \int_K H(Q; \omega) d\mu(Q) + \int_{\omega} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} dA + \frac{\partial u_0}{\partial y} dB + u_0 dC \right)$$

genügt und im Innern von  $K$  absolut additiv ist.

Daß dies hinreicht, ergibt sich sofort daraus, daß aus  $(1_h'')$  die (allerdings nicht gleichmäßige) Hölderstetigkeit der ersten Ableitungen von  $u$  folgt.

$(1_h')$  ist also ebenfalls gleichwertig mit  $(1_h)$ .

Nun der allgemeine Satz 2.  $u$  sei eine beschränkte Lösung, die fast überall beschränkte integrable Randwerte  $f(s)$  im Fatouschen Sinne annimmt und im Innern von  $K$  stetige erste Ableitungen besitzt. Indem wir von  $u$  die in § 2 konstruierte Lösung abziehen, können wir  $f(s) = 0$  annehmen.

$K_n$  sei eine Folge von Kreisen, die konzentrisch gegen  $K$  streben. In  $K_n$  können wir nach Satz 1 und dem eben bewiesenen speziellen Eindeutigkeits-satz schreiben

$$u = u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)},$$

wo  $u_0^{(n)}$  die zu den Randwerten  $u$  auf  $K_n$  gehörige Potentialfunktion ist. Diese strebt wegen der Beschränktheit von  $u$  mit  $u$  gegen Null, und zwar, wie man leicht unter Benutzung des Poissonschen Integrals erkennt, gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich  $K^*$  von  $K$ . Auch die ersten Ableitungen von  $u_0^{(n)}$  konvergieren dann in  $K^*$  gleichmäßig gegen Null.

Sei  $K^*$  etwa ein Kreis vom Radius  $R^* < R$ . Wir wählen zunächst  $R - R^*$  so klein, daß das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{K_n - K^*} \Gamma \left[ \frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial \xi} dA + \frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial \eta} dB + u_0^{(n)} dC \right]$$

für alle  $n$  absolut kleiner als  $\frac{\epsilon}{2}$  bleibt. Dies ist möglich, weil  $u_0^{(n)}$  unter einer festen Schranke  $F$  bleibt, und daher für alle  $n$  die Abschätzung (7) mit festem  $H$  und  $F$  gilt [vgl. auch Fußnote \*)]. Jetzt wählen wir  $n$  so groß, daß wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $u_0$  und  $Du_0$  in  $K^*$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{K^*} \Gamma \left[ \frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial \xi} dA + \frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial \eta} dB + u_0^{(n)} dC \right]$$

absolut kleiner als  $\frac{\varepsilon}{2}$  ist. Also gilt

$$|u_1| < \varepsilon.$$

Genau so können wir zeigen, indem wir  $R - R^*$  eventuell noch verkleinern und den Punkt  $P$  auf einen festen Kreis  $K^{**}$  beschränken, daß auch

$$Du_1(P) < \varepsilon \quad (P \in K^{**})$$

ist. Damit ist für  $u_1^{(n)}$  dasselbe gezeigt wie für  $u_0^{(n)}$ , nämlich daß  $u_1^{(n)}$  mit seinen ersten Ableitungen in jedem festen Kreise  $K^{**}$  gleichmäßig gegen Null strebt. Das gleiche gilt ebenso von den weiteren Funktionen  $u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, \dots$   $k_0$  sei jetzt wieder der Index, von welchem ab die ersten Ableitungen beschränkt bleiben. Dann läßt sich für die Funktion  $u_{k_0+1}^{(n)}$  und ihre ersten Ableitungen die Beziehung

$$\left| \begin{array}{l} u_{k_0+1}^{(n)} \\ Du_{k_0+1}^{(n)} \end{array} \right| < \varepsilon$$

für den ganzen Kreis  $K$  beweisen. Sei dann wie früher

$$U_k = \text{Max} (|u_k|, |Du_k|),$$

so gilt jetzt

$$U_k \leq M^{k-k_0-1} U_{k_0+1} < M^{k-k_0-1} \cdot \varepsilon,$$

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} U_k < \frac{\varepsilon}{1-M}$$

für beliebiges  $\varepsilon$ . Da die Funktion  $u$  aber fest ist, so ist dies nur möglich, wenn

$$u \equiv 0$$

ist, was zu beweisen war.

Durch eine kleine Abänderung der vorstehenden Ausführungen erhält man leicht den folgenden Konvergenzsatz:

**Satz 3.** *Konvergieren die gleichmäßig beschränkten und summablen Funktionen  $f_n(s)$  auf dem Rande von  $K$  fast überall gegen die Funktion  $f(s)$ , so konvergieren die zugehörigen regulären Lösungen  $u_n$  gegen die reguläre Lösung  $u$  für die Randwerte  $f(s)$ , und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche von  $K$ .*

## § 5.

### Die Greensche Funktion.

Wir konstruieren zunächst eine Grundlösung im Kreise, mittels deren man auf Grund von Satz 1 für die dort definierten Gebiete leicht die Greensche Funktion aufstellen kann.

Setzen wir

$$u_0(P, P_0) = \lg r, \quad (r = \overline{P_0 P}).$$

$P_0$  sei ein fester Punkt im Innern von  $K$ .

Wir versuchen mit  $u_0$  als Ausgangsfunktion die sukzessive Approximation durchzuführen.  $Du_0$  wird in  $P_0$  wie  $\frac{1}{r}$  unendlich. Nach Hilfssatz 2 genügt die absolut additive Mengenfunktion  $\int \frac{\|dA\|}{r} = \Phi(\tau)$  für Kreise  $\tau$  um den Punkt  $P_0$  der Bedingung

$$\Phi(\tau) < C \cdot \varrho^\alpha.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Bedingung mit passendem festen  $C$  für jeden beliebigen Kreis in  $K$  erfüllt ist.

Sei  $P \neq P_0$ ,  $\overline{P P_0} = d$ ,  $\tau_P$  der Kreis vom Radius  $\varrho$  um  $P$ . Ist zunächst

$$\varrho \leq \frac{d}{2},$$

so ist

$$\int_{\tau_P} \frac{\|dA\|}{r} \leq \text{Max}_{\tau_P} \frac{1}{r} \int \|dA\| \leq \frac{2}{d} C \cdot \varrho^{1+\alpha} = \frac{2\varrho}{d} C \cdot \varrho^\alpha \leq C \cdot \varrho^\alpha.$$

Ist  $\varrho > \frac{d}{2}$ , so sei  $\tau$  der Kreis vom Radius  $d + \varrho$  um  $P_0$

$$\int_{\tau_P} \frac{\|dA\|}{r} \leq \int_{\tau} \frac{\|dA\|}{r} \leq C(d + \varrho)^\alpha \leq C \cdot 3^\alpha \cdot \varrho^\alpha.$$

Die Behauptung gilt also unter Benutzung der Konstanten

$$C \cdot 3^\alpha.$$

Nun können wir mit passendem  $C$  die Greensche Funktion von  $\Delta u$  für den Kreis abschätzen durch

$$\Gamma(P, Q) < C r^{-\beta} \quad (r = \overline{PQ})$$

$$\beta < \alpha.$$

Anwendung von Hilfssatz 2 auf einen Kreis  $\tau$  um  $P$  ergibt

$$\left| \int_{\tau} \Gamma(P, Q) d\Phi(Q) \right| < C_1 \cdot \varrho^{\alpha-\beta}.$$

Daraus ist leicht zu erkennen, daß  $\int_K \Gamma(P, Q) d\Phi(Q)$  und damit die Funktion  $u_1$  der sukzessiven Approximation in  $K$  stetig ist.

Um die ersten Ableitungen von  $u_1$  in der Umgebung von  $P_0$  abzuschätzen, genügt es, indem wir  $|D\Gamma|$  durch  $\frac{1}{r'}$ , ( $r' = \overline{PQ}$ ),  $|Du_0|$  durch  $\frac{1}{r''}$  ( $r'' = \overline{P_0Q}$ ) ersetzen, als Muster das folgende Integral<sup>9)</sup> zu behandeln

$$\int_K \frac{\|dA(Q)\|}{r'^\gamma r''^\delta} \quad 0 < \gamma, \delta \leq 1.$$

Sei wieder  $\overline{PP_0} = d$ ;  $\tau'$ ,  $\tau''$  seien Kreise vom Radius  $\frac{d}{2}$  um  $P$  bzw.  $P_0$ . In  $\tau'$  ist  $r'' \geq \frac{d}{2}$ . Es ergibt sich leicht unter Benutzung von Hilfssatz 2

$$\int_{\tau'} \frac{\|dA\|}{r'^\gamma r''^\delta} \leq C \cdot d^{n+1-(\gamma+\delta)}$$

und ebenso

$$\int_{\tau''} \frac{\|dA\|}{r'^\gamma r''^\delta} \leq C \cdot d^{n+1-(\gamma+\delta)}.$$

Legen wir den Pol der Polarkoordinaten etwa nach  $P$ . Dann folgt, wegen  $\frac{r'}{r''} \leq \frac{r''+d}{r''} \leq 3$  in  $K - \tau' - \tau''$

$$\int_{K - \tau' - \tau''} \frac{\|dA\|}{r'^\gamma r''^\delta} \leq 3^\delta C \int_{\frac{d}{2}}^R \frac{r'^n dr'}{r'^\gamma r''^\delta} \leq C^* \cdot d^{n+1-(\gamma+\delta)},$$

wo  $R$  irgendeine hinreichend große Zahl ist. Insgesamt also

$$\int_K \frac{\|dA\|}{r'^\gamma r''^\delta} \leq C d^{n+1-(\gamma+\delta)},$$

$$|Du_1| \leq \frac{C^{**}}{d^{1-\alpha}},$$

wo  $C^{**}$  von der Lage von  $P$  und  $P_0$  unabhängig ist. Für  $|Du_2|$  erhält man ähnlich

$$|Du_2| \leq \frac{C}{d^{1-2\alpha}}.$$

Nach endlich vielen Schritten fällt  $Du_n$  wieder endlich aus, und man beweist wie früher, daß

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lg \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

<sup>9)</sup> Ähnliche Abschätzungen, jedoch für gewöhnliche Integrale, finden sich bei U. Dini, Acta Math. 25.

konvergiert und differenzierbar ist. Daß  $u$  die Differentialgleichung bezüglich  $P$  für  $P \neq P_0$  befriedigt, beweist man wie am Ende von § 2. Dabei ist  $u - \lg \frac{1}{r}$  stetig in  $K$ ,

$$(13a) \quad \left| u - \lg \frac{1}{r} \right| < M,$$

während die Ableitungen dieser Funktion offenbar der Abschätzung

$$(13b) \quad \left| D \left( u - \lg \frac{1}{r} \right) \right| < \frac{N}{r^{1-\alpha}}$$

genügen. Die Konstanten  $M$  und  $N$  sind unabhängig von der Lage der Punkte  $P$  und  $P_0$  wählbar.

Ist  $T$  ein Gebiet in  $K$ , für welches nach Satz 1 die Randwertaufgabe lösbar ist, so addieren wir zu  $u$  die in  $T$  reguläre Lösung  $v$  mit den Werten von  $-u$  auf dem Rande von  $T$  und erhalten so eine Greensche Funktion  $G(P, Q)$  für  $T$ .

Schränken wir den Pol  $Q$  der Greenschen Funktion ein auf einen Bereich  $\Omega$ , der vom Rande von  $T$  den positiven Mindestabstand  $d$  besitzt, so ist, wenn  $P$  den Rand von  $T$  durchläuft,

$$\lg \frac{1}{r} \leq \lg \frac{1}{d}.$$

Wegen (13) folgt unter Benutzung von (7b)<sup>10)</sup>, daß dann  $v$  unter einer nur von  $M + \lg \frac{1}{d}$ , dem Gebiet  $T$  und den Koeffizienten der Differentialgleichung abhängigen Schranke liegt.

**Satz 4.** *Erfüllt das Gebiet  $T$  die Bedingungen von Satz 1, so existiert in  $T$  eine Greensche Funktion  $G(P, Q)$  mit dem Pol  $Q$ , die als Funktion von  $P$  für  $P \neq Q$  der homogenen Gleichung genügt und auf dem Rande verschwindet; für beliebige Lage von  $P$  in  $T$  und  $Q$  in  $\Omega$ , wo  $\Omega$  einen festen Mindestabstand  $d$  vom Rande von  $T$  hat, genügt die Funktion  $w = G - \lg \frac{1}{r}$  der Abschätzung*

$$|w| < M + \lg \frac{1}{d}$$

und ist stetig in  $P$ .

Die Frage, ob es noch weitere von  $G(P, Q)$  verschiedene Funktionen mit denselben wesentlichen Eigenschaften gebe, bleibt zunächst offen. Unter der Greenschen Funktion eines Gebietes verstehen wir immer die in der obigen Weise konstruierte.

<sup>10)</sup> Diese Abschätzungen sind zwar nur für den Fall des Kreises hergeleitet, gelten aber offenbar ebenso wie die daran anknüpfenden Bemerkungen für den Fall der allgemeineren Gebiete  $T$ .

## § 6.

**Das Maximumprinzip.**

Wir machen jetzt die Annahme, daß der dritte Koeffizient negativ monoton sei,

(C<sub>a</sub>)

$$C(\omega) \leq 0,$$

und daß es außerdem für jeden abgeschlossenen Teilbereich von  $T$  eine positive Konstante  $h$  gebe derart, daß für alle  $B$ -meßbaren Mengen  $\omega$  gelte

(C<sub>b</sub>)

$$\int_{\omega} \|dC\| > h \int_{\omega} (\|dA\| + dB).$$

Dann gilt das dem klassischen völlig entsprechende Maximumprinzip:

**Satz 5.** *Gelten in dem Gebiet  $T$  die Bedingungen (C<sub>a,b</sub>), so kann eine in  $T$  reguläre Lösung  $u$  der homogenen Gleichung in einem Punkte  $P_0$  von  $T$  nur dann ein positives Maximum annehmen, wenn in einer Umgebung von  $P_0$  die Funktionen  $A, B, C, u$  konstant sind.*

Entsprechendes gilt natürlich auch für negative Minima.

Wir haben also zu zeigen: ist  $u(P_0) > 0$  und in einer Umgebung von  $P_0$

(14)

$$u(P) \leq u(P_0),$$

so gibt es einen Kreis um  $P_0$ , in welchem  $A, B, C, u$  konstant sind. Sei zunächst in einem Kreise  $\tau$  um  $P_0$

$$\int_{\tau} \|dC\| = 0.$$

Dann ist dort wegen (C<sub>b</sub>) auch  $\int_{\tau} \|dA\| = \int_{\tau} \|dB\| = 0$ , also  $u$  wegen der Regularitätsbedingung harmonisch [vgl. S. 703 und Fußnote 7)], und wegen (14) konstant, die Behauptung also richtig.

Es sei nun für jeden Kreis  $\tau$  um  $P_0$

$$\int_{\tau} \|dC\| > 0.$$

Wir wählen  $\tau$  so klein, daß in  $\tau$

(15)

$$u(P) \geq \frac{1}{2} u(P_0) > 0, \\ |u_x|, |u_y| < \frac{h}{2} u(P_0)$$

gilt, was möglich ist, da ja in  $P_0$  ein Maximum von  $u$  vorliegt. Wenden wir Satz 1 auf  $\tau$  an, so können wir schreiben

$$u(P) = u(P_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\tau} \Gamma \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} dA + \frac{\partial u}{\partial \eta} dB + u dC \right),$$

wo  $\Gamma$  die Greensche Funktion für  $\tau$  ist. Dann folgt aus  $(C_{a,b})$  und (15)

$$\int_{\partial\tau} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \|dA\| + \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| \|dB\| < \frac{h}{2} u(P_0) \int_{\partial\tau} \|dA\| + \|dB\| \\ < \frac{u(P_0)}{2} \int_{\partial\tau} \|dC\| < - \int_{\partial\tau} u(P) dC,$$

mithin, da im Innern von  $\tau$   $\Gamma > 0$  ist,

$$u(P) < u_0(P)$$

im Innern von  $\tau$ , speziell

$$u(P_0) < u_0(P_0) \leq u(P_0).$$

Damit ist die Annahme  $\int_{\partial\tau} \|dC\| > 0$  für alle  $\tau$  ad absurdum geführt und der Satz bewiesen.

Unter der bloßen Annahme  $(C_a)$  läßt sich immer noch das Nichtauftreten wenigstens eigentlicher positiver Maxima beweisen. Es genügt offenbar zu zeigen, daß die Lösung im Innern ein positives Randmaximum nicht übertreffen kann.

Das letztere gilt sicher nach Satz 5 dann, wenn auch die Bedingung  $(C_b)$  erfüllt ist. Wir approximieren nun die Funktion  $C(\omega)$  mittels Funktionen  $C_n(\omega)$ , welche  $(C_b)$  erfüllen, durch die Festsetzung

$$C_n(\omega) = C(\omega) - h_n \int_{\partial\tau} (\|dA\| + \|dB\|), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0.$$

$u_n$  seien die Lösungen der entsprechenden homogenen Gleichungen mit den Randwerten  $u$ . Setzen wir

$$L(u - u_n) = \int_{\partial\tau} u_n d(C_n - C) = -h_n \int_{\partial\tau} u_n (\|dA\| + \|dB\|) = f_n(\omega).$$

Die  $u_n$  bleiben nach dem eben Bemerkten unter einer festen Schranke. Mithin ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\tau)\| = 0.$$

Nun hängt die Schranke für die Funktion  $u - u_n$ , die ja auf dem Rand verschwindet und noch regulär ist, im wesentlichen nur ab von der Schranke für die Lösung  $v_n$  der Gleichung

$$-\int_{\partial\tau} \frac{\partial v}{\partial n} ds = f_n(\omega),$$

die in der sukzessiven Approximation als Ausgangsfunktion auftritt. Es ist

$$v_n = \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial\tau} \Gamma d f_n(\omega).$$

Da  $f_n$  derselben Hölderbedingung wie  $A$  und  $B$  genügt, so folgt leicht

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u - u_n = 0.$$

Daraus ist aber sofort ersichtlich, daß  $u$  so wenig wie jedes  $u_n$  ein positives Randmaximum übertreffen kann.

### § 7.

#### Beweis von Hilfssatz 3, 4 und 5.

Zum Beweise setzen wir der Einfachheit halber die Funktion  $F$  als positiv monoton voraus. Aus Gründen der Übersicht verwenden wir im folgenden für Konstante durchgehend die Bezeichnung  $C$  ohne Index.

Bei  $J_\beta(z)$  genügt es offenbar, die Behauptung nur für  $\beta = 0$  zu beweisen. Zur Vereinfachung des Beweisganges treffen wir die folgenden Festsetzungen: Es sei

$$z = x > 0.$$

Dann ist

$$\Gamma(z, \zeta) = \lg \left| \frac{1 - x\bar{\zeta}}{\zeta - x} \right| = \lg \left| \frac{1 - x\bar{\zeta}}{\zeta - x} \right| = \lg \left| \frac{1 - x\bar{\zeta}}{\zeta - x} \right|.$$

Sei ferner  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein und sonst beliebig. Wir schlagen um den Punkt  $1/\cos \varepsilon$  der  $x$ -Achse einen Orthogonalkreis  $K_0$  von  $K$  mit dem Radius  $\operatorname{tg} \varepsilon > \varepsilon$ . Seine Bogenlänge in  $K$  ist also  $2\varepsilon$ .  $x$  halbiere den Radius von  $K_0$ . Dann ist

$$(1) \quad x = \frac{1}{\cos \varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{2} \sin \varepsilon \right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2).$$

Für alle  $\varepsilon$ , die kleiner als ein festes  $\varepsilon_0$  sind, gilt bei festem  $M$

$$O(\varepsilon^2) < M \cdot \varepsilon^2.$$

Ähnliches gilt im folgenden bei entsprechenden Fällen.

Es sei weiterhin  $K_1$  ein Kreis um den Punkt  $x$  mit dem Radius

$$(2) \quad \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Sein Mindestabstand vom Rande des Kreisbogenzweiecks  $K_0K$  ist

$$\frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^2).$$

Das Integrationsgebiet  $K$  wird in gewisse Teilgebiete zerlegt, in denen wir die in Frage stehenden Integrale einzeln abschätzen.

1. Abschätzung von  $\Gamma$  und  $D\Gamma$  für den Fall, daß  $\zeta = \varrho e^{i\varphi}$  in  $K_0K$  liegt. Dann ist  $|\varphi| \leq \varepsilon$ . Weiterhin ist

$$x - \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon \leq \varrho \leq 1,$$

also nach (1)

$$(3) \quad 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \leq \varrho \leq 1.$$

Setzen wir

$$x = 1 - c\varepsilon, \quad |\zeta| = \varrho = 1 - \gamma\varepsilon,$$

so können wir für  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$0 < c, \gamma < 2$$

annehmen.

$$(4) \quad \begin{aligned} x\bar{\zeta} &= (1 - c\varepsilon)(1 - \gamma\varepsilon)e^{-i\varphi} = 1 - (c + \gamma)\varepsilon - i\varphi + O(\varepsilon^2) = 1 - d\varepsilon, \\ d &= c + \gamma + i\frac{\varphi}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  können wir  $O(\varepsilon) < \frac{c}{2}$  annehmen. Wegen  $|\varphi| \leq \varepsilon$  folgt unter Benutzung von (1)

$$(5) \quad \begin{aligned} c &> \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{8} &< \frac{c}{2} < |d| < 2 + 2 + 1 + 1 = 6, \\ \frac{1}{4} &< |d| < 6, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \Gamma(z, \zeta) = \lg \left| \frac{d\varepsilon}{r} \right| \leq \left| \lg \frac{\varepsilon}{r} \right| + O(1).$$

Schreiben wir

$$\lg \frac{x\bar{\zeta} - 1}{s - \zeta} = f(z),$$

so ist nach (4)

$$|D\Gamma| \leq |f'(z)| = \frac{1 - |\zeta|^2}{|z\bar{\zeta} - 1||s - \zeta|} = \frac{1 - \varrho^2}{|s\bar{\zeta} - 1|r} = \frac{1 - \varrho^2}{|d|\varepsilon \cdot r}.$$

Aus (5) folgt also

$$(6a) \quad |D\Gamma| \leq 8 \frac{1 - \varrho^2}{r \cdot \varepsilon}.$$

$$2. \text{ Abschätzung von } \int_{K_1} \frac{\Gamma}{1 - \varrho} dF \text{ und } \int_{K_1} \frac{D\Gamma}{(1 - \varrho)^2} dF$$

$$\int_{K_1} \frac{\Gamma}{1 - \varrho} dF \leq \frac{C}{\varepsilon} \left\{ \int_{K_1} \left| \lg \frac{\varepsilon}{r} \right| dF + O(1) F(K_1) \right\}.$$

Liegt  $\zeta$  in  $K_1$ , so gilt

$$1 - \varrho \geq 1 - \left( x + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon \right) > \frac{\varepsilon}{8} \quad (\varepsilon \leq \varepsilon_0).$$

Aus  $r < \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon$  folgt

$$\frac{\varepsilon}{r} > 1, \quad \left| \lg \frac{\varepsilon}{r} \right| = \lg \frac{\varepsilon}{r}.$$

Wegen (2) ist

$$F(K_1) < C (\operatorname{tg} \varepsilon)^{1+\alpha} = C \varepsilon^{1+\alpha},$$

$$\int_{K_1} \lg \frac{\varepsilon}{r} dF \leq C \int_0^{\frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon} \lg \frac{\varepsilon}{r} \cdot \varepsilon^{1+\alpha} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^\alpha d \left( \frac{r}{\varepsilon} \right) = C \varepsilon^{1+\alpha}$$

(vgl. die Bemerkung zu Hilfssatz 2),

$$(I_a) \quad \int_{K_1} \frac{r}{1-\varrho} dF \leq C \cdot \varepsilon^\alpha.$$

Aus (6a) folgt

$$\int_{K_1} \frac{|D F|}{(1-\varrho)^\beta} dF \leq 8 \int_{K_1} \frac{(1+\varrho)(1-\varrho)^{1-\beta}}{r \cdot \varepsilon} dF \leq C \varepsilon^{1-\beta} \int_{K_1} \frac{dF}{r},$$

$$(I_b) \quad \int_{K_1} \frac{|D F|}{(1-\varrho)^\beta} dF \leq C \frac{\varepsilon^{1-\beta}}{\varepsilon^{1-\alpha}} = \frac{C}{\varepsilon^{\beta-\alpha}}.$$

Für  $\alpha \geq \beta$  ist dies mithin beschränkt.

3. Abschätzung in dem Streifen  $S$ :

$$x + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon \leq \varrho \leq 1 \quad (\zeta \text{ in } K_0).$$

Aus

$$1 - x \bar{\zeta} = \frac{1}{\bar{\zeta}} (\zeta - x) + \frac{x}{\bar{\zeta}} (1 - \varrho^2)$$

folgt

$$(7) \quad \left| \frac{1 - x \bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - x} \right| = \frac{1}{\varrho} \left| 1 + x \frac{1 - \varrho^2}{\bar{\zeta} - x} \right|$$

Nun hat für  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  die Funktion  $x \frac{1 - \varrho^2}{\bar{\zeta} - x} = x (1 - \varrho^2) \frac{\bar{\zeta} - x}{r^2}$  in  $S$  positiven Realteil, denn es ist, da in  $S$

$$\varrho \geq x + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon, \quad \cos \varphi = 1 - O(\varepsilon^2)$$

ist,

$$\bar{\zeta} - x = \varrho \cos \varphi - \varepsilon - x + i \varrho \sin \varphi = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon - O(\varepsilon^2) + i \varrho \sin \varphi.$$

Mithin ist

$$\left| 1 + x \frac{1 - \varrho^2}{\bar{\zeta} - x} \right| \geq 1 + x (1 - \varrho^2) \frac{\varrho \cos \varphi - \varepsilon}{r} = 1 + C \frac{1 - \varrho}{r} \geq 1.$$

In  $S$  ist weiter

$$r > \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon > \frac{\varepsilon}{4}, \quad \frac{1}{r} < \frac{4}{\varepsilon}.$$

Also

$$(8) \quad \Gamma = \lg \left| 1 + x \frac{1-\varrho^2}{\zeta-x} \right| - \lg \varrho = \lg \left| 1 + C \frac{1-\varrho}{\varepsilon} \right| + \lg \frac{1}{\varrho} \\ = \frac{1-\varrho}{\varepsilon} O(1) = O(1),$$

wie man bei Benutzung des Mittelwertsatzes leicht einsieht.

$$(II_a) \quad \int_S \frac{\Gamma}{1-\varrho} dF \leq C \int_{K_0} dF = C \cdot \varepsilon^{1+\alpha}.$$

Es war  $|f'(z)| = \frac{1-\varrho^2}{r|1-x\zeta|}$ . Nach Satz (1) ist

$$|1-x\zeta| \geq 1-x|\zeta| \geq 1-x = \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2) > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wegen  $\frac{1}{r} < \frac{4}{\varepsilon}$  ist also

$$\int_S \frac{|D\Gamma|}{(1-\varrho)^\beta} dF \leq \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^\beta \int_S (1+\varrho)(1-\varrho)^{1-\beta} dF \leq \frac{4^\beta \varepsilon^{1-\beta}}{\varepsilon^\beta} \int_{K_0} dF,$$

$$(II_b) \quad \int_S \frac{|D\Gamma|}{(1-\varrho)^\beta} dF \leq C \frac{\varepsilon^{1-\beta}}{\varepsilon^{1-\alpha}} = C \frac{1}{\varepsilon^{\beta-\alpha}}.$$

4. Abschätzung für den Rest des Kreisbogenzweiecks:

$$K_0 K - K_1 - S = R.$$

Es war [vgl. (6)]

$$\Gamma \leq \lg \left| \frac{\varepsilon}{r} \right| + O(1).$$

In  $R$  ist

$$\frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon \leq r \leq 2 \operatorname{tg} \varepsilon < 3 \varepsilon,$$

also etwa  $\frac{1}{3} < \frac{\varepsilon}{r} < 4$ ,

$$\Gamma = O(1).$$

$1-\varrho$  ist größer als die Breite von  $S$ , also

$$(9) \quad 1-\varrho \geq 1-x-\frac{1}{4} \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^2) > \frac{\varepsilon}{8},$$

$$(III_a) \quad \int_R \frac{\Gamma}{1-\varrho} dF \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{K_0} dF = C \varepsilon^\alpha.$$

Aus (4), (5) folgt

$$|1-x\zeta| = |d| \varepsilon > \frac{\varepsilon}{8},$$

$$|f'(z)| < \frac{8(1-\varrho)}{\varepsilon} \frac{1+\varrho}{r} < \frac{8(1-\varrho)}{\varepsilon} (1+\varrho) \frac{4}{\varepsilon}.$$

Unter Benutzung von (9) ergibt sich

$$(III_b) \quad \int_R \frac{|DF|}{(1-\varrho)^\beta} dF \leq \frac{C}{\varepsilon^\beta} \int_R (1-\varrho)^{1-\beta} dF = C \frac{\varepsilon^\alpha}{\varepsilon^{\beta-\alpha}} = \frac{C}{\varepsilon^{\beta-\alpha}}.$$

5. Abschätzung in  $(K_2 - K_0 K) K = T$ .

$K_2$  sei ein Kreis um  $x$  vom Radius  $\varepsilon^\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ).  $\gamma$  erhält später [vgl. (17)] seine genauere Bestimmung. Ist  $\varepsilon$  hinreichend klein, so trifft die Peripherie von  $K_2$  diejenige von  $K_0$  nicht. Nun war [vgl. (8)]

$$I = \lg \left| 1 + (1-\varrho) \frac{x(1+\varrho)}{\zeta-x} \right| + \lg \frac{1}{\varrho}.$$

Da  $\varrho \geq x - \varepsilon^\gamma = 1 - \varepsilon^\gamma + O(\varepsilon)$  ist, können wir also annehmen für  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$(10) \quad \varrho \geq \frac{1}{2}, \quad 1-\varrho \leq \frac{1}{2}.$$

Unter der bloßen Annahme  $\varrho \geq \frac{1}{2}$  gilt nun

$$(11) \quad \begin{aligned} I &= \lg \left| \frac{1 + (1-\varrho) \frac{x(1+\varrho)}{\zeta-x}}{\varrho} \right| > 0, \\ \left| 1 + (1-\varrho) \frac{x(1+\varrho)}{\zeta-x} \right| &> \varrho \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$1 + (1-\varrho) \frac{x(1+\varrho)}{\zeta-x} = 1 + \frac{1-\varrho}{r} C^*,$$

so ist

$$|C^*| = x(1+\varrho) \left| \frac{\zeta-x}{r} \right| < 2.$$

Aus der bekannten Relation  $|a-b| \geq ||a| - |b||$  folgt, wenn

$$\left| 1 + \frac{1-\varrho}{r} C^* \right| = 1 + \frac{1-\varrho}{r} C$$

gesetzt wird,

$$|C| \leq |C^*| < 2.$$

Wir setzen für den Augenblick  $1-\varrho = u$  und schätzen für ein bestimmtes festes  $\zeta$

$$\left| \frac{1}{u} \lg \left| 1 + \frac{u}{r} \frac{x(1+\varrho)}{\zeta-x} \right| \right| = \left| \frac{\lg \left( 1 + \frac{u}{r} C \right)}{u} \right|$$

in der Weise ab, daß wir  $u$  als Variable ansehen,  $C$  aber festhalten. Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich

$$\frac{\lg \left( 1 + \frac{u}{r} C \right)}{u} = \frac{C}{r} \frac{1}{1 + \theta \frac{u}{r} C} \quad (0 < \theta < 1).$$

Ist nun  $C \geq 0$ , so ist

$$\frac{1}{1 + \theta \frac{u}{r} C} \leq 1.$$

Ist aber  $C < 0$ , so ist, da  $u = 1 - \varrho > 0$ ,

$$\frac{1}{1 + \theta \frac{u}{r} C} < \frac{1}{1 + \frac{u}{r} C} < 2$$

nach (11). Also erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{1 - \varrho} \left| \lg \left| 1 + (1 - \varrho) \frac{x(1 + \varrho)}{\xi - x} \right| \right| < \frac{2|C|}{r} < \frac{4}{r}.$$

Wegen (10) ist

$$\left| \frac{\lg \varrho}{1 - \varrho} \right| = \left| \frac{\lg(1 - u)}{u} \right| = \frac{1}{1 - \theta u} < \frac{1}{1 - u} \leq 2,$$

also

$$\frac{r}{1 - \varrho} < \frac{4}{r} + 2 \leq \frac{8}{r},$$

$$(IV_2) \quad \int_{(K_2 - K_0) \cap K} \frac{r}{1 - \varrho} dF \leq C \int_{\frac{1}{2} \lg \varepsilon}^{\varepsilon} \frac{r^2 dr}{r} = C \varepsilon^2 \gamma.$$

$D\Gamma$  können wir gleich über den ganzen Rest des Kreises  $K$ , also über  $K - K_0$  abschätzen.

$$|f'(z)| = \frac{1 - \varrho^2}{r|1 - x\xi|}.$$

Für  $\varrho \geq \frac{1}{2}$  folgt wegen (11)

$$|1 - x\xi| > \frac{1}{2} \frac{r}{\varrho},$$

$$|D\Gamma| \leq (1 - \varrho) \frac{4}{r^2} \quad \left( \varrho \geq \frac{1}{2} \right).$$

Ist aber  $\varrho \leq \frac{1}{2}$ , so liegen offenbar  $r$  und  $|1 - x\xi|$  über einer festen positiven Schranke. Es gilt mithin

$$|D\Gamma| \leq (1 - \varrho) \cdot C \quad \left( \varrho \leq \frac{1}{2} \right),$$

auf alle Fälle also

$$(12) \quad |D\Gamma| \leq \frac{1 - \varrho}{r^2} C.$$

Nun ist leicht zu sehen, daß in  $K - K_0$

$$\frac{1 - \varrho}{r} < 4$$

bleibt. Denn die linke Seite wird offenbar am größten im Schnittpunkte der Peripherie von  $K_0$  mit der  $x$ -Achse. Dort ist aber

$$\varrho = x - \frac{1}{2} \lg \varepsilon, \quad 1 - \varrho < 2\varepsilon, \\ r = \frac{1}{2} \lg \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für hinreichend großes  $a$  bekommen wir demnach

$$(IV_b) \quad \int_{K-K_0} \frac{D\Gamma}{(1-\varrho)^\beta} dF \leq C \int_{\frac{1}{2}}^a \frac{r^{1-\beta+a}}{r^2} dr = \begin{cases} C \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\beta-a}} & (\alpha \neq \beta) \\ C \cdot \lg \frac{1}{\varepsilon} & (\alpha = \beta). \end{cases}$$

Damit ist  $K_\beta$  vollständig erledigt. Es bleibt noch  $\int_{K-K_1} \frac{\Gamma}{1-\varrho} dF$ . Wir integrieren zunächst über den Ring

$$1 - \varepsilon^\delta \leq \varrho \leq 1,$$

wo  $\delta$  vorläufig nur der Bedingung

$$(13) \quad \delta > 2\gamma$$

genüge. Auf jedem Strahle durch den Nullpunkt ist  $\Gamma$  eine bestimmte Funktion von  $\varrho$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma(\varrho), \quad \Gamma(1) = 0, \\ \Gamma(\varrho) &= (1-\varrho) \frac{\partial \Gamma}{\partial \varrho}(\tilde{\varrho}) \quad (\tilde{\varrho} > \varrho). \end{aligned}$$

Auch  $\tilde{\zeta} = \tilde{\varrho} e^{\gamma}$  liegt noch in  $K - K_2$ . Wir können folglich auf  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \varrho}$  die Abschätzung (12) anwenden und erhalten

$$(14) \quad \int_{\substack{K-K_2 \\ \varrho \geq 1-\varepsilon^\delta}} \frac{\Gamma}{1-\varrho} dF < \varepsilon^{-2\gamma} \int (1-\varrho) C dF \leq \varepsilon^{\delta-2\gamma} C \cdot \int_K dF = \varepsilon^{\delta-2\gamma} \cdot C.$$

Nun sei  $\varrho < 1 - \varepsilon^\delta$ . Es war

$$\Gamma = \lg \left| \frac{1-x\tilde{\zeta}}{x-\tilde{\zeta}} \right| = \lg \left| \frac{1-x\zeta}{x-\zeta} \right|.$$

Da  $x$  der Mittelpunkt des Kreises  $K_2$  ist, so gilt

$$|x - \zeta| = r \geq \varepsilon^\gamma,$$

also etwa

$$x - \zeta = C_1 \varepsilon^\gamma \quad (|C_1| \geq 1).$$

Aus (1) folgt mithin

$$\begin{aligned} \frac{1-x\zeta}{x-\zeta} &= \frac{1-x^2}{x-\zeta} + x = \frac{(1+x)\left(\frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)\right)}{C_1 \varepsilon^\gamma} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{1-x\zeta}{x-\zeta} &= 1 + C^* \varepsilon^{1-\gamma} \quad (C^* \text{ beschränkt}). \end{aligned}$$

Schreiben wir

$$\left| \frac{1-x\zeta}{x-\zeta} \right| = 1 + C\varepsilon^{1-\gamma},$$

so ist

$$\begin{aligned} |C| &\leq |C^*|, \\ \Gamma &= C\varepsilon^{1-\gamma}, \end{aligned}$$

$$(15) \quad \int_{\substack{K-K_2 \\ \varrho < 1-\delta}} \frac{\Gamma}{1-\varrho} \leq C \int_K \varepsilon^{1-\gamma-\delta} dF = \varepsilon^{1-\gamma-\delta} \cdot C.$$

Jetzt legen wir endlich  $\gamma$  und  $\delta$  fest durch die Forderung

$$(16) \quad 1 - \gamma - \delta > 0.$$

Den Bedingungen (13) und (16) wird genügt, wenn  $1 > 3\gamma$ , also z. B. durch die Werte

$$(17) \quad \gamma = \frac{1}{6}, \quad \delta = \frac{3}{6}.$$

(14) und (15) ergeben zusammengefaßt

$$(V) \quad \int_{K-K_2} \frac{\Gamma}{1-\varrho} dF = C \cdot \varepsilon^{\frac{1}{6}}.$$

Insgesamt erhalten wir schließlich aus (I)–(V) das folgende Resultat:

$$J_0(z) = \int_K \frac{\Gamma(z, \zeta)}{1-\varrho} dF(\zeta) \leq C \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{5}},$$

$$\begin{aligned} |K_\varrho(z)| &= \left| \int_K \frac{D \Gamma(z, \zeta)}{(1-\varrho)^\beta} dF(\zeta) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^{\beta-\alpha}} & (\alpha \neq \beta) \\ & & \frac{C}{\lg \frac{1}{\varepsilon}} & (\alpha = \beta). \end{aligned}$$

Aus (1) folgt, daß man  $\varepsilon$  durch

$$3(1-x) = 3(1-|z|)$$

ersetzen kann. Bei passender Drehung des Koordinatensystems erhält man endlich die im Hilfssatz angegebenen Formeln.

Der Beweis von Hilfssatz 4 wird geführt nach dem Muster eines analogen Satzes von U. Dini<sup>11)</sup>. Wir untersuchen die Ableitung nach  $x$  und bilden dementsprechend die Differenz

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{r}} (\lg r'' - \lg r') dF(\bar{Q}) \\ r' &= \bar{P}'\bar{Q}, \quad r'' = \bar{P}''\bar{Q}, \quad P'(x, y), \quad P''(x + \delta, y). \end{aligned}$$

<sup>11)</sup> Vgl. Acta Mathematica 25, insbes. S. 194/195.

Die Funktion  $F(\omega)$  nehmen wir wieder als positiv monoton an.  $\tau'$  und  $\tau''$  seien Kreise vom Radius  $\frac{\delta}{2}$  um  $P'$  bzw.  $P''$ ,  $\tau$  ein Kreis vom Radius  $\varrho = \frac{3}{4}\delta$  um  $P'$ .

$$\left| \int_{\tau'} (\lg r'' - \lg r') dF \right| \leq 2 \int_{\tau'} |\lg r'| dF.$$

Aus

$$F(\sigma) = f(r) \leq C \cdot r^{1+\alpha},$$

gültig für irgendeinen Kreis  $\sigma$ , folgt mittels partieller Integration leicht

$$(18) \quad \int_{\tau'} |\lg r'| dF = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\tau'} \lg r' d/(r')^{\frac{\delta}{2}} \leq C \delta \cdot \eta \quad (\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta = 0).$$

Ähnliches gilt für  $\tau''$ .

In  $\tau - \tau' - \tau''$  schreiben wir

$$\lg r'' - \lg r' = \frac{r'' - r'}{t}, \quad (t \text{ ein Mittelwert})$$

$$|r'' - r'| < \delta, \quad \frac{r'}{t} \leq 3,$$

$$\left| \int_{\tau - \tau' - \tau''} (\lg r'' - \lg r') dF \right| \leq 3 \delta \int_{\tau} \frac{dF}{r'} \leq C \cdot \delta^{1+\alpha}.$$

Nun.

$$|J| = \int_{T-\tau} \left( \frac{\lg r'' - \lg r'}{\delta} - \frac{\partial \lg r'}{\partial x} \right) dF.$$

Nach Dini (l. c., S. 195) ist

$$(19) \quad \left| \frac{\lg r'' - \lg r'}{\delta} - \frac{\partial \lg r'}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial \lg r'}{\partial x} - \frac{\partial \lg r'}{\partial x} \right| \leq \frac{3\delta}{r'} \leq \frac{3\delta}{r' r''^{1+\alpha}}$$

Wir können annehmen ( $K \supset T$  ein Kreis vom Radius  $R$ )

$$r', r'' \geq \varrho/2,$$

$$|J| \leq C \cdot \delta \int_{K-\tau} \frac{dF}{r'^2} \leq C \cdot \delta \int_{\varrho}^R \frac{d/(r)}{r^3} \leq C \cdot \delta^{\alpha}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \lg r dF = \int_{\tau} \frac{\partial \lg r}{\partial x} dF.$$

Die Abschätzung von  $\int_{\tau} \left( \frac{\partial \lg r''}{\partial x} - \frac{\partial \lg r'}{\partial x} \right) dF$ , wo jetzt  $P'$  und  $P''$  beliebig liegen mögen, erhält man in ähnlicher Weise unter Benutzung von (19), indem man wieder in  $\tau', \tau'', \tau - \tau' - \tau'', T - \tau$  besonders abschätzt. Damit ist der Beweis erbracht.

Nun der Beweis von Hilfssatz 5. Wir können  $F(\omega)$  als positiv monoton annehmen. Die Funktion

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \lg \frac{1}{r} dF$$

besitzt nach Hilfssatz 4 stetige erste Ableitungen und es gilt

$$(20) \quad F(\omega) = - \int_{\partial} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

für Gebiete  $\omega$  mit stückweise glattem Rande  $s$ . Wir setzen

$$U_k(P) = \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k(P)} u d\omega$$

Nach Gunther [l. c. 8)] gilt für irgendeine Richtung  $L$

$$(21) \quad \frac{\partial U_k}{\partial L} = \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k(P)} \frac{\partial u}{\partial L} d\omega,$$

und  $\frac{\partial U_k}{\partial L}$  ist daher stetig. Außerdem folgt aus der Stetigkeit von  $\frac{\partial u}{\partial L}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial U_k}{\partial L} = \frac{\partial u}{\partial L}.$$

Setzen wir daher

$$- \int_{\partial} \frac{\partial U_k}{\partial n} ds = F_k(\omega),$$

so gilt

$$(22) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(\omega) = F(\omega) \text{ }^{12)}$$

z. B. für alle Rechtecke. Aus (21) und der Stetigkeit von  $\frac{\partial u}{\partial L}$  folgt nach Gunther (l. c.) die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen von  $U_k$ , und es gilt

$$\Delta U_k = - \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k(P)} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Nach (20) ist also

$$(23) \quad \int_{\omega} \frac{F(\omega_k(P))}{|\omega_k|} d\omega = \int_{\omega} \Delta U_k d\omega = - \int_{\partial} \frac{\partial U_k}{\partial n} ds = F_k(\omega) \geq 0.$$

<sup>12)</sup> Und zwar gleichmäßig für alle Gebiete  $\omega$  mit stückweise glatten Randkurven von gleichmäßig beschränkter Länge, wie man unmittelbar aus den drei vorangehenden Beziehungen folgert.

Also ist auch  $F_k(\omega)$  positiv monoton. (22) ergibt speziell

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(T) = F(T),$$

und es gibt eine Konstante  $M$  derart, daß für alle Indizes  $k$

$$(24) \quad F_k(\omega) \leq F_k(T) < M$$

ist. Nun folgt aus (22) für eine Treppenfunktion  $t(P)$  in einem Netz von Rechtecken

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}} t(P) dF_k = \int_{\mathcal{F}} t(P) dF,$$

und mit Benutzung von (24) folgt das gleiche Resultat für jede stetige Funktion

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}} f(P) dF_k = \int_{\mathcal{F}} f(P) dF,$$

wie behauptet.

(Eingegangen am 25. 9. 1940.)

# **Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen\*).**

Von

Karl Stein in Münster (Westf.).

## **Inhaltsübersicht.**

	Seite
Einleitung . . . . .	727
§ 1. Topologische Eigenschaften analytischer Flächen in vorgegebenen Bereichen . . . . .	729
§ 2. Ein Kriterium für die Lösbarkeit des Cousinschen Problems in Regularitätsbereichen . . . . .	734
§ 3. Die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen . . . . .	740
§ 4. Die Probleme von Cousin und Poincaré in Zylinderbereichen . . . . .	743
§ 5. Regularitätsbereiche, in denen der Rungesche Satz nicht gilt. . . . .	755
Literaturverzeichnis . . . . .	757

## **Einleitung.**

Gibt man in einem schlichten Bereich  $G$  der  $z$ -Ebene beliebig Polstellen mit Hauptteilen bzw. Nullstellen vor, so existiert auf Grund des Mittag-Lefflerschen Satzes bzw. des Weierstraßschen Produktsatzes stets eine in  $G$  analytische Funktion, die genau die vorgeschriebenen Pole mit den zugehörigen Hauptteilen bzw. die vorgegebenen Nullstellen besitzt. Eines der ersten Probleme, die in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen behandelt worden sind, ist die Frage nach der Möglichkeit einer Übertragung dieser Aussage auf Funktionen mehrerer Veränderlichen. Als erster hat P. Cousin 1895 Untersuchungen hierüber angestellt. Cousin zeigte, daß in der Tat im offenen  $R^{2n}$ , dem Raum der komplexen Veränderlichen  $z_1, \dots, z_n$ , und in speziellen Bereichen des  $R^{2n}$  Aussagen gelten, die den Sätzen von Mittag-Leffler und Weierstraß entsprechen. Andererseits ist seit längerem bekannt, daß sich diese Aussagen von Cousin keineswegs auf beliebige Bereiche im  $R^{2n}$  verallgemeinern lassen. Nach Sätzen von H. Cartan und P. Thullen werden

\*) Habilitationsschrift, angenommen von der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster. — Einen Teil der Resultate der vorliegenden Arbeit habe ich schon früher veröffentlicht. Siehe [10].

sie sicher falsch in allen Bereichen des  $R^4$ , die sich von ihrer Regularitätshülle um ein volles vierdimensionales Stück unterscheiden.

Nun könnte es sein, daß die Cousinschen Aussagen wenigstens in allen Regularitätsbereichen des  $R^{2n}$  Gültigkeit besitzen. Für die erste Cousinsche Aussage betreffend die Existenz analytischer Funktionen zu vorgegebenen Polstellen mit Hauptteilen trifft dies auch zu. Das nachzuweisen, ist vor kurzem K. Oka gelungen. Anders aber steht es um die zweite Cousinsche Aussage betreffend die Existenz analytischer Funktionen zu vorgeschriebenen Nullstellen. Schon 1917 zeigte T. H. Gronwall an einem Beispiel, daß diese Aussage sicher falsch wird für Zylinderbereiche, von deren Projektionen mindestens zwei mehrfach zusammenhängend sind. In solchen Bereichen versagt das von Cousin benutzte Verfahren zur Konstruktion einer gesuchten Funktion infolge der besonderen topologischen Struktur der Bereiche und der vorgegebenen Nullstellenflächen.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat nun ebenfalls K. Oka gezeigt, daß in allen Regularitätsbereichen  $B^{2n}$  des  $R^{2n}$  stets dann zu vorgegebenen Nullstellenflächen eine analytische Funktion existiert, wenn es wenigstens eine stetige Funktion mit diesen Nullstellen gibt. Es fragt sich also, unter welchen Bedingungen eine stetige Abbildung von  $B^{2n}$  in die Ebene der komplexen Zahlen existiert, die genau die vorgeschriebenen Nullstellenflächen in den Nullpunkt überführt. Zur Beantwortung dieser Frage sind topologische Untersuchungen durchzuführen. Damit tritt ein enger Zusammenhang zwischen Topologie und Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen auf, den die klassische Theorie an dieser Stelle nicht kennt. Die vorliegende Arbeit ist nun der Aufklärung dieses Zusammenhanges gewidmet.

In § 1 ordnen wir einer Menge  $M^{2n-2}$  von mit ganzzahligen Ordnungen versehenen analytischen Flächen in  $B^{2n}$  ihre Schnittzahlen mit geschlossenen zweidimensionalen Ketten (in bezug auf beliebige Koeffizientenbereiche) in  $B^{2n}$  zu. Höchstens dann, wenn diese Schnittzahlen alle Null sind, gibt es eine gesuchte stetige Abbildung von  $B^{2n}$ . Andererseits zeigt sich in § 2, daß diese Bedingung auch hinreicht, damit in jedem ganz in  $B^{2n}$  gelegenen Bereich eine gesuchte stetige Abbildung und nach Oka also eine analytische Lösungsfunktion des zugehörigen Cousinschen Problems existiert. Erfüllt  $B^{2n}$  gewisse topologische Bedingungen, so läßt sich auch eine Lösungsfunktion für ganz  $B^{2n}$  finden. Sonst aber gibt es stets eine analytische Funktion in  $B^{2n}$  die auf  $M^{2n-2}$  und eventuell noch auf weiteren analytischen Flächen verschwindet. Diese Aussage beweisen wir auch für nichtechlichte endlichblättrige Regularitätsbereiche über dem  $R^{2n}$ .

Mit der zweiten Cousinschen Aussage hängt aufs engste die Frage zusammen, wann sich eine im Bereiche  $B^{2n}$  meromorphe Funktion dort als Quotient regulärer teilerfremder Funktionen darstellen läßt. Hierfür ergeben

sich unmittelbar, falls  $B^{2n}$  Regularitätsbereich ist, aus dem vorher Bewiesenen Bedingungen. Diese formulieren wir in § 3.

In § 4 untersuchen wir eingehend die mit dem zweiten Cousinschen Problem zusammenhängenden Fragen in Zylinderbereichen. Läßt sich hier auch nicht in allen Fällen zu vorgegebenen Mengen  $M^{2n-2}$  von analytischen Flächen stets eine gesuchte Cousinsche Funktion finden, so existiert doch stets eine in bestimmter Weise mehrdeutige Lösungsfunktion, und zwar steht deren Mehrdeutigkeit in enger Beziehung zu den  $M^{2n-2}$  zugeordneten Schnittzahlen. Wir zeigen weiter, daß sich  $M^{2n-2}$  immer zu einer Menge  $M_1^{2n-2}$  von analytischen Flächen ergänzen läßt, die eine eindeutige Lösungsfunktion gestattet. Daraus folgt, daß jede in einem Zylinderbereich meromorphe Funktion dort eine Quotientendarstellung durch reguläre Funktionen besitzt, die allerdings nicht teilerfremd zu sein brauchen.

Im § 5 wenden wir unsere Überlegungen an zur Konstruktion schlichter Regularitätsbereiche, in denen der Rungesche Satz über die Approximierbarkeit analytischer Funktionen durch rationale nicht gilt. Als Beispiele solcher sogenannten nicht-Rungescher Bereiche waren bisher nur die Bereiche mit nichtschlichter Regularitätshülle, also Nichtregularitätsbereiche, bekannt.

## § 1.

### Topologische Eigenschaften analytischer Flächen in vorgegebenen Bereichen.

Es sei  $B^{2n}$  ein endlicher Bereich über dem Raum der komplexen Veränderlichen  $z_1, \dots, z_n$ . Jedem Punkt  $P$  von  $B^{2n}$  sei eine Umgebung  $U(P)$  und eine dort reguläre Funktion  $f_P(z_1, \dots, z_n)$  so zugeordnet, daß im Durchschnitt  $D(U(P), U(Q))$  der Umgebungen zweier Punkte  $P$  und  $Q$  die Funktion  $\frac{f_P}{f_Q}$  regulär und ungleich Null ist. Gesucht wird eine in  $B^{2n}$  reguläre eindeutige Funktion  $F(z_1, \dots, z_n)$ , so daß in  $U(P)$  jeweils  $\frac{F}{f_P}$  regulär und ungleich Null ist. Trifft für einen Bereich  $B^{2n}$  die Aussage, daß es zu jeder so zulässigen Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen  $f_P$  und Umgebungen  $U(P)$  eine gesuchte Funktion  $F$  gibt, zu, so sagen wir, in  $B^{2n}$  gelte die *zweite Aussage von Cousin*.

Sind zwei Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  im Bereich  $D^{2n}$  definiert und dort stetig, gibt es ferner eine in  $D^{2n}$  stetige, nichtverschwindende Funktion  $\lambda(z_1, \dots, z_n)$ , so daß in  $D^{2n}$  gilt.  $F_1 = \lambda \cdot F_2$ , so heißen  $F_1$  und  $F_2$  in  $D^{2n}$  äquivalent in bezug auf Division. Die zu  $V$  gesuchte Lösungsfunktion  $F$  soll also die Eigenschaft haben, mit allen Ortsfunktionen  $f_P$  jeweils in  $U(P)$  äquivalent in bezug auf Division zu sein.

Durch eine Cousinsche Verteilung  $V$  im Bereich  $B^{2n}$  ist dort eine Menge  $M^{2n-2}$  von irreduziblen analytischen Flächenstücken  $\mathfrak{F}^{2n-2}$ , die sich im Innern von  $B^{2n}$  nicht häufen, als Nullstellenmannigfaltigkeit der gesuchten Funktion  $F$  vorgeschrieben.  $M^{2n-2}$  läßt sich im Innern von  $B^{2n}$  triangulieren, d. h.: Ist  $M_1^{2n-2}$  eine ganz in  $B^{2n}$  liegende Teilmenge von  $M^{2n-2}$ , so gibt es eine weitere  $M_1^{2n-2}$  umfassende Teilmenge  $M_2^{2n-2}$  von  $M^{2n-2}$ , die ein endlicher simplizialer Komplex ist<sup>1)</sup>. Jede simpliziale Zerlegung von  $M_2^{2n-2}$  hat die Eigenschaft, daß an jedes  $(2n-3)$ -Simplex höchstens zwei  $(2n-2)$ -Simplexe anstoßen. Denn die Menge der „nichtgewöhnlichen“ Punkte von  $M^{2n-2}$  füllt höchstens ein analytisches Gebilde von  $(2n-4)$  Dimensionen aus. Alle  $(2n-2)$ -Simplexe von  $M_2^{2n-2}$ , die sich mit einem festen  $(2n-2)$ -Simplex durch eine Kette von abwechselnd inzidenten  $(2n-3)$ - und  $(2n-2)$ -Simplexen verbinden lassen, bedecken einen irreduziblen Bestandteil  $\mathfrak{F}_2^{2n-2}$  von  $M_2^{2n-2}$ .  $\mathfrak{F}_2^{2n-2}$  ist also eine berandete Pseudomannigfaltigkeit.

$M^{2n-2}$  ist ferner orientierbar. Wir zeichnen in folgender Weise eine der beiden möglichen Orientierungen aus: Zunächst wird in den Ebenen  $\mathfrak{E}_j^2$  der Veränderlichen  $z_j, j = 1, \dots, k$ , eine Orientierung festgesetzt, und zwar wird wie üblich die Linksdrehung als positiv ausgezeichnet. Dadurch ist auch dem  $R^{2k}$  als dem topologischen Produkt  $\mathfrak{E}_1^2 \times \mathfrak{E}_2^2 \times \dots \times \mathfrak{E}_k^2$  eine Orientierung zugeordnet; diese hängt überdies nicht ab von der Reihenfolge der  $z_j$ . In jedem gewöhnlichen Punkt  $P$  gestattet nun  $M^{2n-2}$ , nötigenfalls nach einer nichtsingulären linearen Koordinatentransformation, eine Darstellung

$$(1) \quad z_n = f(z_1, \dots, z_{n-1}),$$

dabei ist  $f$  in einer Umgebung  $U(P)$  von  $P$  regulär. Durch (1) wird die Orientierung des  $(z_1, \dots, z_{n-1})$ -Raums auf  $M^{2n-2}$  übertragen. Geht man durch eine umkehrbare eindeutige analytische Transformation zu neuen Veränderlichen  $z_1^*, \dots, z_n^*$  über, so erhält man die gleiche Orientierung auf  $M^{2n-2}$ , da jede analytische Abbildung im  $R^{2k}$  mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante orientierungstreu ist. Jedem irreduziblen Bestandteil von  $M^{2n-2}$  und damit ganz  $M^{2n-2}$  ist also in der angegebenen Weise eindeutig eine Orientierung zugeordnet. Wir nennen sie die *natürliche Orientierung* von  $M^{2n-2}$ .

Jedem irreduziblen Bestandteil  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  von  $M^{2n-2}$  ist auch eine positiv-ganzzahlige Ordnung zugewiesen, nämlich die Ordnung, die für  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  als Nullstellenfläche durch  $V$  vorgeschrieben wird. Wir denken uns in Zukunft  $M^{2n-2}$  stets in natürlicher Weise orientiert und seine irreduziblen Bestandteile

<sup>1)</sup> Siehe B. O. Koopman and A. B. Brown, On the covering of analytic loci by complexes. Transact. of the Amer. Math. Soc. 34, S. 231–251. — In bezug auf die topologische Terminologie schließen wir uns dem Lehrbuch der Topologie von Seifert-Threlfall an.

mit den richtigen Ordnungen versehen. Dadurch wird aus einer simplizial zerlegten Teilmenge  $M_2^{2n-2}$  von  $M^{2n-2}$  ein algebraischer Komplex<sup>2)</sup>, falls man noch die  $i$ -Simplexe von  $M_2^{2n-2}$ ,  $i \leq 2n-3$ , irgendwie mit Orientierungen und Ordnungen versieht.

Wir betrachten im folgenden auch zellenmäßige Zerlegungen von Teilbereichen von  $B^{2n}$ . Jeder Teilbereich  $B_0^{2n}$  von  $B^{2n}$  läßt sich in einen zweiten abgeschlossenen Teilbereich  $B^{*2n}$  einbetten, der zellenmäßig zerlegt ist. Bei solchen Zerlegungen können wir uns auf Teilkomplexe von Würfelteilungen des  $R^{2n}$  oder auf Überlagerungen solcher Teilungen (bei nichtschlichten Bereichen) beschränken. Eine Würfelteilung  $W$  des  $R^{2n}$  heißt zu einem ganz im Innern von  $B^{2n}$  gelegenen Teilkomplex  $M_2^{2n-2}$  von  $M^{2n-2}$  in *allgemeiner Lage* befindlich, wenn jede 2-Zelle von  $W$  höchstens einen inneren Punkt mit  $M_2^{2n-2}$  gemeinsam hat, der seinerseits gewöhnlicher Punkt von  $M^{2n-2}$  ist. Hat eine Würfelteilung  $W$  noch nicht diese Eigenschaft, so gelangt man durch genügend feine Unterteilung von  $W$  und nach einer kleinen Drehung und Verschiebung zu einer zu  $M_2^{2n-2}$  in allgemeiner Lage befindlichen Würfelteilung  $W^*$ .

Es sei  $K^2$  eine singuläre mod  $m$  geschlossene 2-Kette in  $B^{2n}$ . Wir wählen einen Teilbereich  $B_0^{2n}$  von  $B^{2n}$ ,  $B_0^{2n} \subset B^{2n}$ , so daß  $K^2$  ganz im Innern von  $B_0^{2n}$  liegt, ferner eine simplizial zerlegte Teilmenge  $M_2^{2n-2}$  von  $M^{2n-2}$ , die alle die Punkte von  $M^{2n-2}$  umfaßt, welche zu  $B_0^{2n}$  gehören. Dann ist die Schnitzzahl  $S(M_2^{2n-2}, K^2) = S(M^{2n-2}, K^2) \pmod{m}$  wohlbestimmt. (Als Orientierung des  $R^{2n}$  legen wir seine natürliche Orientierung zugrunde.) Sie hängt nur ab von  $M^{2n-2}$  und  $K^2$ , nicht aber von der speziellen Wahl von  $M_2^{2n-2}$  und seiner simplizialen Zerlegung, auch nicht von der Reihenfolge von  $M_2^{2n-2}$  und  $K^2$ . Seien nun  $K_1^2$  und  $K_2^2$  zwei singuläre, mod  $m$  geschlossene homologe Ketten in  $B^{2n}$ :

$$K_1^2 \sim K_2^2 \pmod{m}.$$

Wir behaupten:

$$S(M^{2n-2}, K_1^2) = S(M^{2n-2}, K_2^2) \pmod{m}.$$

Beweis. Wegen  $K_1^2 \sim K_2^2 \pmod{m}$  gibt es eine Kette  $K^3$  mit

$$Rd K^3 = K_1^2 - K_2^2 \pmod{m}.$$

Wir wählen den Teilkomplex  $M_2^{2n-2}$  von  $M^{2n-2}$  derart, daß  $Rd M_2^{2n-2}$  fremd zu  $K^3$  ist. Dann ist mod  $m$ :

$$S(M_2^{2n-2}, K_1^2 - K_2^2) = \pm S(Rd M_2^{2n-2}, K^3) = 0.$$

<sup>2)</sup> Als Koeffizientenbereiche lassen wir allgemein alle Restklassenringe  $\mathbb{G}_m$  mod  $m$  zu ( $m$  jede ganze Zahl; speziell ist  $\mathbb{G}_0 = \mathbb{G}$  der Ring der ganzen Zahlen).

Also

$$S(M^{2n-2}, K_1^2) = S(M^{2n-2}, K_2^2) \pmod{m}.$$

Die Schnittzahl  $S(M^{2n-2}, K^2)$  ( $K^2$  eine singuläre, mod  $m$  geschlossene Kette in  $B^{2n}$ ) hängt daher nur ab von der Homologiekategorie mod  $m$  von  $K^2$ , also von dem Element der zweidimensionalen Homologieguppe mod  $m$  von  $B^{2n}$ , zu dem die Klasse von  $K^2$  gehört. Wir denken uns die Schnittzahlen der Elemente aller zweidimensionalen Homologieguppen mod  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) mit  $M^{2n-2}$  gebildet. Diese Schnittzahlen mögen die charakteristischen Schnittzahlen der Verteilung  $V$  in  $B^{2n}$  heißen.

Wir benötigen für später einen Hilfssatz über mit  $M^{2n-2}$  verschlungene 1-Ketten. Es sei  $\mathfrak{R}(P)$  eine Hyperkugel um den auf  $M^{2n-2}$  gelegenen Punkt  $P$ .  $\mathfrak{R}(P)$  liege ganz in  $B^{2n}$ . Ferner sei  $K^1$  eine in  $\mathfrak{R}(P) - M^{2n-2}$  gelegene mod  $m$  geschlossene singuläre 1-Kette. Ist dann  $K^2$  mit  $Rd K^2 = K^1 \pmod{m}$  eine in  $\mathfrak{R}(P)$  gelegene singuläre 2-Kette, so sei die Verschlingungszahl  $\mathfrak{B}(M^{2n-2}, K^1)$  definiert durch

$$\mathfrak{B}(M^{2n-2}, K^1) = S(M^{2n-2}, K^2) \pmod{m}.$$

$\mathfrak{B}(M^{2n-2}, K^1)$  hängt von der speziellen Wahl von  $K^2$  in  $\mathfrak{R}(P)$  nicht ab, das zeigt man ähnlich wie oben.

Es gilt nun

Hilfssatz 1. Es sei  $f(z_1, \dots, z_n)$  eine in  $\mathfrak{R}(P)$  analytische Funktion, die dort mit den durch eine Cousinsche Verteilung  $V$  vorgegebenen Ortsfunktionen äquivalent in bezug auf Division ist. Die Abbildung

$$\tau = f(z_1, \dots, z_n)$$

führt  $K^1$  über in eine mod  $m$  geschlossen singuläre Kette  $\bar{K}^1$  der komplexen  $\tau$ -Ebene. Dann gilt

$$\mathfrak{B}(M^{2n-2}, K^1) = \mathfrak{B}(0, \bar{K}^1) \pmod{m}.$$

Dabei bedeute  $\mathfrak{B}(0, \bar{K}^1)$  die Verschlingungszahl von  $\bar{K}^1$  mit dem Nullpunkt der (in üblicher Weise orientierten)  $\tau$ -Ebene.

Beweis. Wir betten  $\mathfrak{R}(P)$  in eine Würfelteilung  $W$  eines Teilbereiches  $B_0^{2n}$  von  $B^{2n}$  ein, die sich zu  $M^{2n-2}$  in allgemeiner Lage befindet. Ist  $W$  genügend fein, so läßt sich  $K^1$  innerhalb  $\mathfrak{R}(P) - M^{2n-2}$  zellenmäßig approximieren durch eine 1-Kette  $K_1^1$  von  $W$ :

$$K_1^1 \sim K^1 \pmod{m} \text{ in } \mathfrak{R}(P) - M^{2n-2}.$$

$K_1^1$  ist in  $\mathfrak{R}(P)$  mod  $m$  nullhomolog, es gibt also eine 2-Kette  $K_1^2$  in  $W$ , so daß  $Rd K_1^2 = K_1^1 \pmod{m}$ . Es seien  $X_i^2$  die orientierten Dreiecke von  $K_1^2$ , die

$M^{2n-2}$  schneiden, und  $a_i$  die Vielfachheiten, mit denen sie in  $K_1^2$  vorkommen. Wir bilden

$$K_2^2 = \sum a_i X_i^2.$$

Dann ist

$$Rd K_2^2 \sim Rd K_1^2 \pmod{m} \text{ in } \mathfrak{R}(P) - M^{2n-2},$$

denn  $K_1^2 - \sum a_i X_i^2$  ist fremd zu  $M^{2n-2}$ . Also

$$Rd K_2^2 = \sum a_i Rd X_i^2 \sim K_1^1 \pmod{m} \text{ in } \mathfrak{R}(P) - M^{2n-2}.$$

Es gilt ferner

$$\mathfrak{B}(M^{2n-2}, K_1^1) = \mathfrak{B}(M^{2n-2}, K_1^1) = \mathfrak{B}(M^{2n-2}, Rd K_2^2) \pmod{m},$$

denn es ist

$$\mathfrak{B}(M^{2n-2}, K_1^1 - Rd K_2^2) = S(M^{2n-2}, K_1^1 - K_2^1) = 0 \pmod{m},$$

weil  $M^{2n-2}$  und  $K_1^1 - K_2^1$  fremd sind. Seien nun  $\bar{K}_1^1, \bar{K}_1^2, \bar{K}_2^2$ , die durch  $f$  vermittelten Bilder von  $K_1^1 = Rd K_2^2, K_1^2, K_2^2$  in der  $\tau$ -Ebene. Dann gilt auch

$$\mathfrak{B}(0, \bar{K}_1^1) = \mathfrak{B}(0, \bar{K}_2^1) \pmod{m},$$

denn es ist mod  $m$ :

$$\mathfrak{B}(0, \bar{K}_1^1 - \bar{K}_2^1) = S(0, \bar{K}_1^1 - \bar{K}_2^1) = 0,$$

weil  $\bar{K}_1^1 - \bar{K}_2^1$  den Nullpunkt der  $\tau$ -Ebene nicht überdeckt.

Es genügt daher, den Hilfssatz für den Rand jedes  $X_i^2$  zu beweisen. Es sei  $Q_i$  der Punkt von  $X_i^2$ , den  $X_i^2$  mit  $M^{2n-2}$  gemeinsam hat. Man drehe die Ebene von  $X_i^2$  so, daß sie in eine analytische Ebene  $\mathfrak{E}^2$  übergeht, ohne daß dabei  $Rd X_i^2$  von  $M^{2n-2}$  getroffen wird. Das ist stets möglich, wenn die Würfelteilung  $W$  fein genug gewählt ist.  $X_i^2$  gehe in  $X_i^{2'}$  über. Die betrachteten Verschlingungszahlen ändern sich bei der Drehung nicht. Fällt nun die Orientierung von  $X_i^{2'}$  mit der natürlichen Orientierung von  $\mathfrak{E}^2$  zusammen, so ist die Behauptung des Hilfssatzes klar. Denn dann ist

$$\mathfrak{B}(M^{2n-2}, Rd X_i^{2'}) = k,$$

wo  $k$  die Ordnung von  $M^{2n-2}$  im Punkte  $Q_i$  ist. Die Funktion  $f$  wird auf  $\mathfrak{E}^2$  zu einer analytischen Funktion einer Veränderlichen, die in  $Q_i$  eine Nullstelle  $k$ -ter Ordnung hat. Also ist das durch  $\tau = f(z_1, \dots, z_n)$  vermittelte Bild von  $Rd X_i^{2'}$  in der  $\tau$ -Ebene  $k$ -fach mit dem Nullpunkt verschlungen.

Ist die Orientierung von  $X_i^{2'}$  der natürlichen Orientierung von  $\mathfrak{E}^2$  entgegengesetzt, so läßt sich entsprechend schließen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

## § 2.

**Ein Kriterium für die Lösbarkeit des Cousinschen Problems  
in Regularitätsbereichen.**

Wir beweisen

**Satz 1.** Zu einer Cousinschen Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen im schlichten oder endlichblättrigen<sup>3)</sup> endlichen Regularitätsbereich  $B^{2n}$  über dem Raume der  $n$  komplexen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  existiert höchstens dann eine Lösungsfunktion  $F(z_1, \dots, z_n)$ , wenn die charakteristischen Zahlen von  $V$  sämtlich Null sind.

**Beweis.** Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es zu  $V$  eine Lösungsfunktion  $F(z_1, \dots, z_n)$  sowie ein  $m$  und eine in  $B^{2n} \bmod m$  geschlossene 2-Kette  $K^2$ , so daß gälte

$$S(M^{2n-2}, K^2) = k \not\equiv 0 \pmod{m}.$$

Dabei ist  $M^{2n-2}$  wie im § 1 die Menge der mit richtigen Ordnungen und Orientierungen versehenen durch vorgeschriebenen Nullstellenflächen. Wir denken uns  $K^2$  als 2-Kette in einer zu  $M^{2n-2}$  in allgemeiner Lage befindlichen Würfelteilung eines Teilbereiches  $B_0^{2n}$  von  $B^{2n}$  gewählt, der  $K^2$  ganz umfaßt. Es seien  $X_i^2$  ( $i = 1, \dots, r$ ) die orientierten 2-Zellen von  $K^2$ , die  $M^{2n-2}$  schneiden, und  $a_i$  die Vielfachheiten, mit denen sie in  $K^2$  vorkommen. Die Kette

$$K_1^2 = K^2 - \sum a_i X_i^2$$

ist dann zu  $M^{2n-2}$  fremd. Wir bezeichnen nun das durch die Abbildung

$$\tau = F(z_1, \dots, z_n)$$

von  $K_1^2$  in der  $\tau$ -Ebene vermittelte Bild mit  $\bar{K}_1^2$ . Dann folgt aus Hilfssatz 1

$$S(M^{2n-2}, K^2) = -\mathfrak{B}(\mathfrak{C} \, Rd \, \bar{K}_1^2) = k \pmod{m}.$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{B}(0, Rd \, \bar{K}_1^2) = S(0, \bar{K}_1^2) \pmod{m}.$$

Es ist aber

$$S(0, \bar{K}_1^2) = 0,$$

denn  $K_1^2$  überdeckt den Nullpunkt nicht, da  $K_1^2$  zu  $M^{2n-2}$  fremd ist. Also wäre  $k = 0$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.

<sup>3)</sup> Siehe H. Behnke, Über die Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen und den Zusammenhang der Singularitäten. Math. Ann. 117 (1939), S. 89 ff.

Die in Satz 1 angegebene Bedingung für die Existenz einer Lösungsfunktion zu einer Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen ist unter gewissen Voraussetzungen auch hinreichend. Zunächst gilt:

**Satz 2.** Sind die zu einer Cousinschen Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen im schlichten oder endlichblättrigen Regularitätsbereich  $B^{2n}$  gehörigen charakteristischen Zahlen sämtlich Null, so existiert in jedem ganz in  $B^{2n}$  gelegenen Teilbereich eine Lösungsfunktion.

**Beweis.** Wir zeigen zunächst: Zu jedem ganz im Innern von  $B^{2n}$  gelegenen Teilbereich  $B_0^{2n}$  läßt sich eine stetige Funktion finden, die dort mit den vorgegebenen Ortsfunktionen äquivalent in bezug auf Division ist. Dazu betten wir  $B_0^{2n}$  in einen umfassenden weiteren Teilbereich  $B^{2n}$  ein, der durch eine Würfelteilung  $W$  zellenmäßig zerlegt ist.  $M^{2n-2}$  (die durch  $V$  bestimmte Nullstellenmannigfaltigkeit) befinde sich zu  $W$  in allgemeiner Lage. Die Teilung sei überdies so fein, daß jede Zelle von  $W$  von einer der durch  $V$  bestimmten Umgebungen  $U(P)$  ganz überdeckt wird. Wir entfernen aus  $W$  alle  $k$ -Zellen,  $k \geq 3$ , die Punkte mit  $M^{2n-2}$  gemeinsam haben; der Restkomplex heiße  $W_1$ . Es seien weiter  $X_i^2$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ , die 2-Zellen von  $W_1$ , die  $M^{2n-2}$  schneiden. Die Schnittpunkte  $P_i$  sind innere Punkte von  $X_i^2$ . Wir schneiden aus den  $X_i^2$  kleine Kreise  $C_i^2$  mit  $P_i$  als Mittelpunkten heraus. Der Komplex  $W_1 - \sum C_i^2 = W_2$  ist dann gleichfalls ein Zellenkomplex. Die  $C_i^2$  denken wir uns in bestimmter Weise orientiert, außerdem setzen wir noch  $Rd C_i^2 = C_i^1$ . Jedes  $C_i^2$  wird von einer Umgebung  $U(Q_i)$  des durch  $V$  bestimmten Umgebungssystems überdeckt. Durch die zugehörigen Ortsfunktionen  $f_{Q_i}$  geben wir nun auf den  $C_i^1$  Funktionswerte vor. Dadurch ist eine stetige Abbildung  $A$  der  $C_i^1$  in die im Nullpunkt punktierte Ebene  $\mathbb{C}^2 - 0$  der komplexen Zahlen definiert. Wir behaupten, daß sich diese Abbildung zu einer stetigen Abbildung von ganz  $W_2$  in  $\mathbb{C}^2 - 0$  erweitern läßt. Bezeichnen wir den genau alle  $C_i^1$  umfassenden eindimensionalen Teilkomplex von  $W_2$  mit  $W_3$ , so ist für die Möglichkeit einer solchen Erweiterung notwendig und hinreichend, daß jeder ganzzahlige 1-Zyklus von  $W_3$ , der in  $W_2$  mod  $m$  nullhomolog ist ( $m = 2, 3, \dots$ ), durch  $A$  so abgebildet wird, daß sein Bild in  $\mathbb{C}^2 - 0$  mit dem Nullpunkt die Verschlingungszahl Null (mod  $m$ ) hat<sup>4)</sup>. Diese Bedingung ist aber sicher erfüllt. Es sei nämlich

$$C^1 = \sum a_i C_i^1$$

ein 1-Zyklus der angegebenen Art, also etwa

$$C^1 = Rd K^2 \pmod{m}, \quad K^2 \text{ aus } W_2.$$

Dann ist,

$$K_1^2 = K^2 - \sum a_i C_i^2$$

<sup>4)</sup> Siehe Alexandroff-Hopf, Topologie, S. 499 ff.

ein 2-Zyklus mod  $m$  in  $W_1$ , und es ist

$$(1) \quad S(M^{2n-2}, K_1^2) = -\sum \mathfrak{B}(M^{2n-2}, a_i C_i^1) \pmod{m}.$$

Die Schnitzzahl  $S(M^{2n-2}, K_1^2)$  ist aber nach Voraussetzung Null. Andererseits ist  $\mathfrak{B}(M^{2n-2}, C_i^1)$  nach Hilfssatz 1 gleich  $\mathfrak{B}(0, C_i^1)$ , wenn  $\bar{C}_i^1$  das durch  $f_{Q_i}$  vermittelte Bild von  $C_i^1$  in  $\mathbb{C}^2 - 0$  ist. Also folgt aus (1), daß  $\bar{C}_i^1$ , das Bild von  $C_i^1$ , in der Tat mit dem Nullpunkt mod  $m$  nicht verschlungen ist.

Wir denken uns die Abbildung  $A$  nun auf ganz  $W_2$  ausgedehnt.  $G(z_1, \dots, z_n)$  sei die  $A$  vermittelnde komplexwertige stetige Funktion. Wir setzen  $G$  über ganz  $W_1$  stetig fort durch die Festsetzung

$$G \equiv f_{Q_i} \text{ in } C_i^2.$$

Dann ist  $G$  jedenfalls mit den Ortsfunktionen von  $V$  äquivalent in bezug auf Division. Es bleibt noch übrig, eine solche Fortsetzung auch noch über die aus  $W$  fortgelassenen Zellen anzugeben. Angenommen, dies sei schon für alle  $k$ -Zellen,  $2 \leq k < 2n$ , geschehen. Sei  $X_j^{k+1}$  eine  $M^{2n-2}$  schneidende  $(k+1)$ -Zelle und  $f_{Q_j}$  eine in ganz  $X_j^{k+1}$  reguläre Ortsfunktion von  $V$ .  $G$  und  $f_{Q_j}$  sind auf dem Rande von  $X_j^{k+1}$  äquivalent in bezug auf Division, also vermittelt

$$G_j^* = \frac{G}{f_{Q_j}}$$

eine Abbildung der Randsphäre  $S_j^k$  von  $X_j^{k+1}$  in  $\mathbb{C}^2 - 0$ . Diese Abbildung ist aber für  $k \geq 2$  auf das Innere von  $X_j^{k+1}$  erweiterbar; wir bezeichnen die Abbildungsfunktion wieder mit  $G_j^*$ . Dann stellt  $G_j^* \cdot f_{Q_j}$  eine gesuchte Fortsetzung von  $G$  ins Innere von  $X_j^{k+1}$  dar.

Unter unserer Voraussetzung existiert also in  $B_0^{2n}$  in der Tat eine stetige Lösungsfunktion zu  $V$ .

Nunmehr folgt auch die Existenz einer analytischen Lösungsfunktion in jedem ganz im Innern von  $B^{2n}$  gelegenen Teilbereich. Da  $B^{2n}$  ein schlichter oder endlichblättriger Regularitätsbereich ist, läßt er sich approximieren durch „analytische Polyeder“

$$\begin{aligned} (\Delta_k^{2n}): \quad & |z_i| \leq r_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ & |f_j^{(k)}(z_1, \dots, z_n)| \leq 1, \quad j = 1, \dots, r_k. \end{aligned}$$

In jedem  $\Delta_k^{2n}$  gibt es zu  $V$  eine stetige Lösungsfunktion  $G_k$ . Ist nun  $\Delta_k^{2n}$  schlicht, so existiert nach Oka dort auch eine analytische Lösungsfunktion  $F^k$ . Aber auch wenn  $\Delta_k^{2n}$  nicht schlicht ist, trifft dies zu. In diesem Falle gibt es in  $\Delta_k^{2n}$  endlich viele reguläre Funktionen  $\Phi_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \Phi_r(z_1, \dots, z_n)$ ,

<sup>5)</sup> Siehe [9].

die in einander überlagerten Punkten von  $\Delta_k^{2n}$  nicht alle zugleich dieselben Werte annehmen. Wir ordnen nun  $\Delta_k^{2n}$  den Regularitätsbereich

$$(\bar{\Delta}_k^{2(n+p)}): \quad \begin{aligned} & (z_1, \dots, z_n) \text{ in } \Delta_k^{2n}, \\ & |z_{n+i} - \Phi_i(z_1, \dots, z_n)| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

im  $R_k^{2(n+p)}$  zu. Für genügend kleines  $\varepsilon$  ist  $\bar{\Delta}_k^{2(n+p)}$  schlicht. Die Verteilung  $V$  in  $\Delta_k^{2n}$  läßt sich zugleich als zulässige Verteilung in  $\bar{\Delta}_k^{2(n+p)}$ , und  $G_k$  dort als stetige Lösungsfunktion auffassen. Demnach gibt es zu  $V$  in  $\bar{\Delta}_k^{2(n+p)}$  auch eine analytische Lösung  $\Psi_k(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+p})$ . Dann ist

$$F_k = \Psi_k(z_1, \dots, z_n, \Phi_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \Phi_p(z_1, \dots, z_n))$$

eine analytische Lösung in  $\Delta_k^{2n}$ . Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wollte man versuchen, nach dem üblichen Verfahren aus den Funktionen  $F_k$  des vorstehenden Beweises eine Lösungsfunktion für den ganzen Bereich  $B^{2n}$  zu gewinnen, so hätte man formal das unendliche Produkt

$$F_1 \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \dots \cdot \frac{F_{k+1}}{F_k} \cdot \dots$$

zu bilden und seine gleichmäßige Konvergenz im Innern von  $B^{2n}$  durch Hinzufügen von in  $B^{2n}$  regulären nichtverschwindenden Faktoren zu erzwingen. Um aber solche konvergenzerzeugenden Faktoren konstruieren zu können, müßte man wissen, daß  $\log \frac{F_{k+1}}{F_k}$  in  $\Delta_k^{2n}$  eindeutig ist. Das aber braucht natürlich nicht allgemein der Fall zu sein. Verzichtet man jedoch darauf, daß die konvergenzerzeugenden Faktoren in  $B^{2n}$  nicht verschwinden sollen, so kann man in folgender Weise das unendliche Produkt konvergent machen: Man wähle eine Folge positiver Zahlen  $\varepsilon_k$  mit konvergenter Summe. Es sei dann  $R_k(z_1, \dots, z_n)$  eine in  $B^{2n}$  reguläre Funktion, für die in  $\Delta_k^{2n}$  gilt:

$$e^{-\varepsilon_k} < \left| \frac{F_{k+1}}{F_k} \cdot R_k \right| < e^{\varepsilon_k}.$$

Eine solche Funktion läßt sich stets finden, da jede in  $\Delta_k^{2n}$  reguläre Funktion nach Oka beliebig gut durch Funktionen aus  $B^{2n}$  approximierbar ist. Das unendliche Produkt

$$F_1 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{F_{k+1}}{F_k} \cdot R_k \right)$$

konvergiert nun in jedem ganz im Innern von  $B^{2n}$  gelegenen Teilbereich nach Abtrennung jeweils endlich vieler Glieder gleichmäßig, stellt also in  $B^{2n}$  eine analytische Funktion dar. Diese verschwindet auf den durch  $V$  bestimmten Nullstellenflächen mindestens in der vorgeschriebenen Ordnung,

hat aber eventuell noch weitere Nullstellen, nämlich die Nullstellen der  $R_k(z_1, \dots, z_n)$ . Wir haben also bewiesen:

**Satz 3.** Sind die zu einer Cousinschen Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen im schlichten oder endlichblättrigen Regularitätsbereich  $B^{2n}$  gehörigen charakteristischen Zahlen sämtlich Null, so gibt es in  $B^{2n}$  eine analytische Funktion, die auf den durch  $V$  bestimmten Nullstellenflächen mindestens in der vorgeschriebenen Ordnung verschwindet, eventuell aber noch weitere Nullstellen hat.

Unter einer besonderen Voraussetzung über  $B^{2n}$  läßt sich jedoch die Existenz einer eigentlichen Cousinschen Lösungsfunktion zu  $V$  in  $B^{2n}$  nachweisen. Es gilt:

**Satz 4.** Es sei  $B^{2n}$  ( $n \geq 2$ ) ein schlichter oder endlichblättriger, endlicher Regularitätsbereich über dem  $R^{2n}$ . Die eindimensionale Bettische Gruppe von  $B^{2n}$  besitze eine Basis<sup>6)</sup>. Sind dann die zu einer Cousinschen Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen in  $B^{2n}$  gehörigen charakteristischen Zahlen sämtlich Null, so gibt es zu  $V$  in  $B^{2n}$  eine Lösungsfunktion.

**Anmerkung.** Ist  $n = 1$ , so gibt es zu einer Cousinschen Verteilung in einem endlichen, endlichblättrigen Bereiche ohne Verzweigungspunkte im Innern stets eine Lösungsfunktion. Man vergleiche hierzu die im Fueter-Festband der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (1940) erschienene Arbeit von H. Behnke und K. Stein, Die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler auf Riemannschen Flächen.

**Beweis.** Wir approximieren  $B^{2n}$  durch analytische Polyeder  $\Delta_k^{2n}$ ,  $\Delta_k^{2n} \subset \Delta_{k+1}^{2n}$ . Zu jedem  $\Delta_k^{2n}$  gibt es nach unserer Voraussetzung über  $B^{2n}$  endlich viele Basisketten  $K_{k_1}^1, \dots, K_{k_p}^1$  der eindimensionalen Bettischen Gruppe  $\mathfrak{B}^1$  von  $B^{2n}$  derart, daß jede singuläre ganzzahlige geschlossene 1-Kette  $K^1$  aus  $\Delta_k^{2n}$  einer Linearkombination der  $K_{k_1}^1, \dots, K_{k_p}^1$  divisionshomolog in  $B^{2n}$  ist:

$$(2) \quad K^1 \approx \alpha_1 K_{k_1}^1 + \dots + \alpha_p K_{k_p}^1 \text{ in } B^{2n}, \alpha_i \text{ ganz.}$$

Diese Darstellung von  $K^1$  durch Basiselemente von  $\mathfrak{B}^1$  ist auch eindeutig. Wir ordnen jedem  $\Delta_k^{2n}$  einen simplizial zerlegten Teilbereich  $B_k^{2n}$  von  $B^{2n}$  zu, der die Ketten  $K_{k_1}^1, \dots, K_{k_p}^1$  ganz enthält, so daß (2) schon in  $B_k^{2n}$  gilt, und für den gilt  $\Delta_k^{2n} \subset B_k^{2n} \subset \Delta_{k+1}^{2n}$ . Die Ketten  $K_{k_1}^1, \dots, K_{k_p}^1$  können als doppel-punktfreie, orientierte, einfach geschlossene Kantenzüge, die einander nicht schneiden, auf einer geeigneten Unterteilung der simplizialen Zerlegung von  $B_k^{2n}$  gewählt werden. (Man kann dies stets durch eine Deformation der Ketten erreichen.)

<sup>6)</sup> Eine solche Basis ist dann stets höchstens abzählbar.

Es sei nun  $F_k(z_1, \dots, z_n)$  eine im abgeschlossenen Bereich  $B_k^{2n}$  analytische Funktion, die dort zu  $V$  eine Cousinsche Lösungsfunktion darstellt. (Eine solche existiert nach Satz 2 sicher.). Die Funktion

$$Q_k(z_1, \dots, z_n) = \frac{F_{k+1}(z_1, \dots, z_n)}{F_k(z_1, \dots, z_n)}$$

ist nun in  $B_k^{2n}$  regulär und ungleich Null, sie vermittelt also eine stetige Abbildung von  $B_k^{2n}$  in die im Nullpunkt punktierte Ebene  $\mathbb{C}^2 - 0$  der komplexen Zahlen. Wir betrachten diese Abbildung nur auf den Ketten  $K_{k_1}^1, \dots, K_{k_n}^1$  und nennen sie hier  $A^{6a)}$ . Nach dem oben zitierten Erweiterungssatz von H. Hopf ist nun  $A$  auf jeden Bereich  $B_{k+\mu_k}^{2n}$  fortsetzbar. Denn jeder ganzzahlige Zyklus  $\sum \beta_i K_{k_i}^1$ , der mod  $m$  nullhomolog in  $B^{2n}$  ist, hat, weil die  $K_{k_i}^1$  Basiselemente von  $\mathfrak{B}^1$  sind, notwendig die Gestalt  $\sum \gamma_i (m K_{k_i}^1)$ , wird also durch  $A$  so abgebildet, daß sein Bild in  $\mathbb{C}^2 - 0$  die Verschlingungszahl Null mod  $m$  mit dem Nullpunkt hat. Es sei  $G_k$  die stetige Funktion, die die auf  $B_{k+\mu_k}^{2n}$  fortgesetzte Abbildung  $A$  vermittelt. Dabei sei  $\mu_k$  so groß gewählt, daß für ein  $\nu_k$  gilt:  $B_{k+1}^{2n} \subset \subset \Delta_{k+\nu_k}^{2n} \subset \subset B_{k+\mu_k}^{2n}$ . Dann hat  $\log G_k$  dieselben Mehrdeutigkeiten in  $\Delta_{k+1}^{2n}$  wie  $\log Q_k$ . Um auch eine in  $B_{k+1}^{2n}$  analytische Funktion  $S_{k+1}(z_1, \dots, z_n)$  mit dieser Eigenschaft zu finden, ziehen wir wieder den schon vorher benutzten Satz von Oka heran, von dem wir folgenden Spezialfall benötigen:

Es sei  $a(z_1, \dots, z_n)$  eine im analytischen Polyeder  $\Delta^{2n}$  stetige nichtverschwindende Funktion. Dann existieren zwei Funktionen  $S(z_1, \dots, z_n, t)$  und  $\lambda(z_1, \dots, z_n, t)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $S$  und  $\lambda$  sind stetig für  $(z_1, \dots, z_n)$  aus  $\Delta^{2n}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ferner ist  $\lambda \neq 0$ ,  $S(z_1, \dots, z_n, 1) \equiv \lambda(z_1, \dots, z_n, 1) \equiv 1$ .
2.  $S(z_1, \dots, z_n, 0)$  ist analytisch.
3. Es ist

$$(1-t) \cdot a(z_1, \dots, z_n) + t \equiv \lambda(z_1, \dots, z_n, t) \cdot S(z_1, \dots, z_n, t).$$

Setzt man nun  $\Delta^{2n} = \Delta_{k+\nu_k}^{2n}$  und  $a(z_1, \dots, z_n) \equiv G_k(z_1, \dots, z_n)$ , so folgt die Existenz einer in  $\Delta_{k+1}^{2n}$ , d. h. auch in  $B_{k+1}^{2n}$  analytischen nichtverschwindenden Funktion  $S_{k+1}$ , für die  $\log \frac{Q_k}{S_{k+1}}$  in  $\Delta_{k+1}^{2n}$  eindeutig ist.

Wir ändern nun die Funktionen  $F_k$  sukzessive ab. Zunächst wählen wir eine in  $B_2^{2n}$  analytische nichtverschwindende Funktion  $S_2$ , so daß  $\log \left( \frac{F_2}{F_1} \cdot S_2 \right)$  in  $\Delta_1^{2n}$  eindeutig ist. Wir setzen  $F_2 \cdot S_2 \equiv F_2^*$ . Weiter sei  $S_3$  eine in  $B_3^{2n}$  analytische nichtverschwindende Funktion, für die  $\log \left( \frac{F_3}{F_2^*} \cdot S_3 \right)$  in  $\Delta_2^{2n}$  ein-

<sup>6a)</sup> Enthält  $B_k^{2n}$  von den Basisketten von  $\mathfrak{B}^1$  nur die Nullkette, so sei  $A$  die durch  $Q_k$  vermittelte Abbildung von ganz  $B_k^{2n}$ . In diesem Falle ist  $\log Q_k$  in  $B_k^{2n}$  eindeutig.

deutig ist. Wir setzen  $F_3 \cdot S_3 \equiv F_3^*$ . Allgemein lassen sich so Funktionen  $F_k^*$  gewinnen, die in  $B_k^{2n}$  regulär sind, dort eine Lösungsfunktion zu  $V$  darstellen und für die  $\log \frac{F_{k+1}^*}{F_k^*}$  in  $\Delta_k^{2n}$  eindeutig ist. (Wir setzen dazu noch  $F_1 \equiv F_1^*$ .)

Sei nun  $\varepsilon_k$  eine Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe. Es gibt dann nach Oka eine in  $B^{2n}$  analytische Funktion  $h_k(z_1, \dots, z_n)$ , für die in  $\Delta_k^{2n}$  gilt:

$$\left| \log \frac{F_{k+1}^*}{F_k^*} - h_k \right| < \varepsilon_k.$$

(Es ist natürlich ein bestimmter Zweig des Logarithmus gemeint!). Das unendliche Produkt

$$F_1^* \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{F_{k+1}^*}{F_k^*} \cdot e^{-h_k} \right)$$

konvergiert in jedem ganz im Innern von  $B^{2n}$  gelegenen Teilbereich nach Abtrennung von jeweils endlich vielen Gliedern gleichmäßig, es stellt daher in  $B^{2n}$  eine gesuchte analytische Lösungsfunktion zu  $V$  dar.

### § 3.

#### Die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen.

Es sei  $B^{2n}$  wieder ein Bereich über dem  $R^{2n}$  und  $\Phi(z_1, \dots, z_n)$  eine in  $B^{2n}$  definierte meromorphe Funktion. Gibt es dann zwei in  $B^{2n}$  reguläre teilerfremde Funktionen  $g(z_1, \dots, z_n)$  und  $h(z_1, \dots, z_n)$ , so daß in  $B^{2n}$  gilt

$$\Phi = \frac{g}{h},$$

so sagen wir — wie in der Literatur üblich — in  $B^{2n}$  gelte die Aussage von Poincaré.

Die Aussage von Poincaré steht in enger Beziehung zum zweiten Cousin-schen Problem. Das ist leicht zu sehen:  $\Phi$  gestattet in der Umgebung  $U(P)$  jedes Punktes  $P$  von  $B^{2n}$  eine Darstellung

$$\Phi = \frac{g_P}{h_P}.$$

Dabei sind  $g_P$  und  $h_P$  in  $U(P)$  regulär und teilerfremd. Die Funktionen  $h_P$  bilden in  $B^{2n}$  eine zulässige Cousinsche Verteilung  $V$ . Existiert zu  $V$  eine Lösungsfunktion  $H(z_1, \dots, z_n)$ , so ist

$$G = \Phi \cdot H$$

in  $B^{2n}$  regulär und zu  $H$  teilerfremd. Daher ist

$$\Phi = \frac{G}{H}$$

eine gesuchte Darstellung von  $\Phi$  in  $B^{2n}$ .

Aus den Überlegungen des § 2 ergeben sich also Bedingungen dafür, daß in einem Bereich  $B^{2n}$  die Aussage von Poincaré gilt. Bevor wir diese Bedingungen formulieren, führen wir noch eine Bezeichnung ein. Es sei  $M_\infty^{2n-2}$  die Menge der orientierten, mit den richtigen Ordnungen versehenen Polstellenflächen von  $\Phi$ . Wir denken uns nun die Schnittzahlen mod  $m$  von  $M_\infty^{2n-2}$  mit den Elementen aller zweidimensionalen Homologiegruppen mod  $m$  von  $B^{2n}$  gebildet. Diese Schnittzahlen sollen die *charakteristischen Zahlen* von  $\Phi$  in  $B^{2n}$  heißen.

Die charakteristischen Zahlen von  $\Phi$  hängen nicht davon ab, daß wir in der Menge aller  $\alpha$ -Stellenflächen von  $\Phi$  speziell die Polflächen ausgezeichnet haben. Vielmehr gilt, wenn  $M_\alpha^{2n-2}$  die Menge der mit richtigen Ordnungen und Orientierungen versehenen  $\alpha$ -Stellenflächen und  $H_i^2$  ein Element der Homologiegruppe mod  $m$  von  $B^{2n}$  ist:

$$S(M_\alpha^{2n-2}, H_i^2) = S(M_\infty^{2n-2}, H_i^2) \pmod{m}.$$

Beweis. Es sei zunächst  $\alpha = 0$ . Wir approximieren  $H_i^2$  durch eine mod  $m$  geschlossene Kette  $K_i^2$  in einer Zellteilung eines Teilbereichs von  $B^{2n}$ , die sich zugleich zu  $M_0^{2n-2}$  und  $M_\infty^{2n-2}$  in allgemeiner Lage befindet. Dann sind die Schnittpunkte  $P_\nu$  von  $M_0^{2n-2}$  und  $K_i^2$  verschieden von den Schnittpunkten  $Q_\mu$  von  $M_\infty^{2n-2}$  und  $K_i^2$ . Wir entfernen aus  $K_i^2$  kleine (orientierte) Kreise  $C_\nu^2$  um  $P_\nu$  und Kreise  $D_\mu^2$  um  $Q_\mu$ . So entsteht aus  $K_i^2$  eine berandete Kette  $K_i^{*2}$ , und es gilt

$$Rd K_i^{*2} = \sum_\nu a_\nu C_\nu^1 + \sum_\mu b_\mu D_\mu^1.$$

Dabei ist

$$C_\nu^1 = Rd C_\nu^2 \text{ und } D_\mu^1 = Rd D_\mu^2.$$

Es seien  $\bar{C}_\nu^1, \bar{D}_\mu^1, \bar{K}_i^{*2}$  die durch  $\tau = \Phi(z_1, \dots, z_n)$  in der  $\tau$ -Ebene vermittelten Bilder von  $C_\nu^1, D_\mu^1, K_i^{*2}$ . Dann ist nach Hilfssatz 1:

$$S(M_0^{2n-2}, K_i^2) = -\mathfrak{B}(0, \sum_\nu a_\nu \bar{C}_\nu^1) \pmod{m}.$$

Weiter ist mod  $m$ :

$$\begin{aligned} S(M_\infty^{2n-2}, K_i^2) &= -\mathfrak{B}(\infty, \sum_\mu b_\mu \bar{D}_\mu^1) \\ &= +\mathfrak{B}(0, \sum_\mu b_\mu \bar{D}_\mu^1) \end{aligned}$$

Also

$$(1) \quad S(M_0^{2n-2} - M_\infty^{2n-2}, K_i^2) = -\mathfrak{B}(0, \sum_\nu a_\nu \bar{C}_\nu^1 + \sum_\mu b_\mu \bar{D}_\mu^1).$$

Nun ist aber

$$(2) \quad \mathfrak{B}(0, \sum_\nu a_\nu \bar{C}_\nu^1 + \sum_\mu b_\mu \bar{D}_\mu^1) = S(0, \bar{K}_i^{*2}) = 0,$$

denn  $\bar{K}_i^{*2}$  bedeckt den Nullpunkt nicht. Aus (1) und (2) folgt

$$S(M_0^{2n-2}, K_i^2) = S(M_\infty^{2n-2}, K_i^2).$$

also

$$S(M_0^{2^n-2}, H_i^2) = S(M_\infty^{2^n-2}, H_i^2) \pmod{m}.$$

Betrachtet man statt  $\Phi$  die Funktion  $\Phi - a$ , so ergibt sich ebenso

$$S(M_a^{2^n-2}, H_i^2) = S(M_\infty^{2^n-2}, H_i^2) \pmod{m}.$$

Aus den Ergebnissen des § 2 folgt nun unmittelbar:

**Satz 5.** Eine im endlichen, endlichblättrigen Regularitätsbereich  $B^{2^n}$  über dem  $R^{2^n}$  meromorphe Funktion  $\Phi(z_1, \dots, z_n)$  besitzt in  $B^{2^n}$  nur dann eine teilerfremde Quotientendarstellung, wenn die charakteristischen Zahlen von  $\Phi$  in  $B^{2^n}$  sämtlich Null sind. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so läßt sich  $\Phi$  in jedem ganz im Innern gelegenen Teilbereich von  $B^{2^n}$  als Quotient teilerfremder regulärer Funktionen darstellen. Hat  $B^{2^n}$  die Eigenschaft, daß die eindimensionale Bettische Gruppe von  $B^{2^n}$  eine Basis besitzt, so gestattet  $\Phi$  eine solche Darstellung in ganz  $B^{2^n}$ .

Verzichtet man auf die Forderung, daß eine gesuchte Quotientendarstellung von  $\Phi$  teilerfremd sein soll, so läßt sich  $\Phi$  in einem endlichen endlichblättrigen Regularitätsbereich  $B^{2^n}$ , falls die charakteristischen Zahlen von  $\Phi$  in  $B^{2^n}$  sämtlich Null sind, stets als Quotient von in  $B^{2^n}$  regulären Funktionen darstellen. Denn ist in  $U(P)$

$$\Phi = \frac{f_P}{g_P},$$

so gibt es nach Satz 3 zu der durch die  $g_P$  bestimmten Cousinschen Verteilung  $V$  eine in  $B^{2^n}$  reguläre Funktion  $G(z_1, \dots, z_n)$ , die auf den durch  $V$  gegebenen Nullstellenflächen mindestens in der vorgeschriebenen Ordnung verschwindet. Also ist

$$F = \Phi \cdot G$$

in  $B^{2^n}$  regulär und

$$\Phi = \frac{F}{G}$$

eine Quotientendarstellung von  $\Phi$  in  $B^{2^n}$ . Es gilt also

**Satz 6.** Ist die Funktion  $\Phi$  im endlichen, endlichblättrigen Regularitätsbereich  $B^{2^n}$  meromorph und sind die charakteristischen Zahlen von  $\Phi$  in  $B^{2^n}$  sämtlich Null, so gestattet  $\Phi$  in  $B^{2^n}$  eine Darstellung als Quotient regulärer Funktionen.

Sind die charakteristischen Zahlen von  $\Phi$  in  $B^{2^n}$  nicht sämtlich Null, so gestattet  $\Phi$  in  $B^{2^n}$  unter Umständen auch noch eine Quotientendarstellung. In diesem Falle besitzen aber nach Satz 5 die Zähler- und Nennerfunktion notwendig gemeinsame Teiler. Beispiele hierfür werden sich aus den Untersuchungen des nächsten Paragraphen ergeben.

## § 4.

## Die Probleme von Cousin und Poincaré in Zylinderbereichen.

Wir geben zunächst im  $R^4$  einen Bereich an, in dem die zweite Cousinsche Aussage nicht gilt. Es sei  $D^4$  der Bereich

$$D^4: \quad (0 < |w| < \infty, \quad 0 < |z| < \infty).$$

In  $D^4$  betrachten wir die analytische Fläche

$$\mathfrak{F}^2: \quad z = w^i = e^{i \log w}.$$

Sie liegt singularitätenfrei in  $D^4$  und besitzt dort keine Verzweigungsstellen und Doppelpunkte. Wir denken sie uns durch eine Cousinsche Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen als Nullstellenfläche erster Ordnung vorgeschrieben. Eine solche Verteilung  $V$  erhält man folgendermaßen: Liegt der Punkt  $P$  nicht auf  $\mathfrak{F}^2$ , so sei  $f_P \equiv 1$  und die Umgebung  $U(P)$  so klein, daß sie  $\mathfrak{F}^2$  nicht trifft. Liegt dagegen  $P$  auf  $\mathfrak{F}^2$ , so sei  $f_P \equiv z - w^i$  und  $U(P)$  so klein, daß  $f_P$  dort eindeutig bleibt. (Es ist natürlich der auf  $\mathfrak{F}^2$  verschwindende Zweig von  $z - w^i$  gemeint!)

Wir behaupten nun, daß zu  $V$  keine Lösungsfunktion existiert. In der Tat! Sind  $L_w^1, L_z^1$  die positiv durchlaufenen Einheitskreise der  $w$ - und  $z$ -Ebene, so ist  $T^2 = L_w^1 \times L_z^1 \not\subset 0$  in  $D^4$  (in bezug auf den Ring  $\mathfrak{G}_0$  der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich)<sup>7)</sup>. Man erkennt in einfacher Weise, daß die Schnittzahl

$$S(\mathfrak{F}^2, T^2) = +1$$

ist. Nach Satz 1 kann es daher zu  $V$  keine Lösungsfunktion geben.

Andererseits läßt sich leicht eine mehrdeutige Funktion  $H(w, z)$  konstruieren, die genau auf  $\mathfrak{F}^2$  in der verlangten Ordnung verschwindet. Wir setzen

$$H_1(w, z) = \prod_{r=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{e^{i \log w + r \cdot 2\pi}} \right),$$

$$H_2(w, z) = \prod_{\mu=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{z \cdot e^{-i \log w + \mu \cdot 2\pi}} \right).$$

Die unendlichen Produkte konvergieren absolut und gleichmäßig für  $0 < \varrho_1 < |z| < \varrho_2 < \infty$ ;  $w$  in einem einfach zusammenhängenden, den Nullpunkt nicht enthaltenden Bereich; sie stellen also in  $D^4$  reguläre mehrdeutige Funktionen dar. (Für  $\log w$  soll in allen Faktoren derselbe Zweig des Logarithmus genommen werden.) Sei nun

$$H(w, z) = e^{\frac{\log^2 w}{4\pi} + \frac{\log w}{1-i}} \cdot H_1(w, z) \cdot H_2(w, z).$$

<sup>7)</sup> Wir beschränken uns in diesem Paragraphen durchweg auf den Ring  $\mathfrak{G}_0$  der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich.

Die Funktion  $H(w, z)$  ist nun von der verlangten Art: sie verschwindet genau auf  $\tilde{\mathcal{F}}^2$  in erster Ordnung. Außerdem bleibt sie bei festem  $w$  und variablem  $z$  eindeutig, und bei festem  $z$  und positivem Umlauf von  $w$  um den Nullpunkt erhält sie den Faktor  $z$ . Wir deuten diese Eigenschaften in folgender Weise symbolisch an:

$$L_w^1 \{H(w, z)\} = z \cdot H(w, z),$$

$$L_z^1 \{H(w, z)\} = H(w, z).$$

Setzt man

$$\tilde{H}(w, z) = H\left(\frac{1}{w}, z\right),$$

so hat man eine Funktion, die auf der Fläche

$$\tilde{\mathcal{F}}^2: \quad z = w^{-1}$$

genau in erster Ordnung verschwindet.  $\tilde{H}(w, z)$  hat folgende Mehrdeutigkeits-eigenschaften:

$$L_w^1 \{\tilde{H}(w, z)\} = \frac{1}{z} \cdot \tilde{H}(w, z),$$

$$L_z^1 \{\tilde{H}(w, z)\} = \tilde{H}(w, z).$$

Man überlegt sich auch leicht, daß

$$S(\tilde{\mathcal{F}}^2, T^2) = -1$$

ist.

Ähnliche Beispiele von Cousinschen Verteilungen, zu denen keine eindeutigen Lösungen existieren, lassen sich in allen Zylinderbereichen mit mindestens zwei mehrfach zusammenhängenden Projektionen konstruieren. Andererseits wird sich im folgenden herausstellen, daß sich in jedem Zylinderbereich  $Z^{2n}$  zu jeder Cousinschen Verteilung  $V$  eine in bestimmter Weise mehrdeutige Lösungsfunktion angeben läßt, und zwar hängt diese Mehrdeutigkeit eng mit den charakteristischen Zahlen von  $V$  in  $Z^{2n}$  zusammen. Um das zeigen zu können, benötigen wir einen Hilfssatz.

**Hilfssatz 2.** *Es seien  $K_w^1$  und  $K_z^1$  zwei einfach geschlossene Jordankurven in der  $w$ - und  $z$ -Ebene; sie seien so orientiert, daß die umschlossenen Gebiete zur Linken bleiben.  $K_w^1$  und  $K_z^1$  seien eingebettet in schmale Streifengebiete  $G_w^2$  und  $G_z^2$ . Sei weiter  $\Phi(w, z)$  eine in  $G_w^2 \times G_z^2$  definierte reguläre Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

1. Bei festem  $w$  und variablem  $z$  bleibt  $\Phi$  eindeutig, symbolisch:

$$K_z^1 \{\Phi\} = \Phi.$$

2. Wird  $z$  festgehalten und durchläuft  $w$  die Kurve  $K_w^1$ , so erhält  $\Phi$  einen Faktor  $f(z)$ , symbolisch:

$$K_w^1 \{\Phi\} = f(z) \cdot \Phi(w, z).$$

Dabei sei  $f(z)$  in  $G_z^2$  regulär, eindeutig und ungleich Null. Wir bezeichnen das durch die Abbildung

$$\tau = f(z)$$

in der  $\tau$ -Ebene vermittelte Bild von  $K_w^1$  mit  $\bar{K}^1$ , und mit  $M^2$  die Nullstellenmannigfaltigkeit von  $\Phi(w, z)$ . Dann gilt

$$S(M^2, K_w^1 \times K_z^1) = \mathfrak{B}(0, \bar{K}^1).$$

Ist also  $\mathfrak{B}(0, K^1) \neq 0$ , so besitzt  $\Phi$  in  $G_w^2 \times G_z^2$  Nullstellen.

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß die von  $K_w^1$  und  $K_z^1$  umschlossenen Gebiete die Nullpunkte der  $w$ - und  $z$ -Ebene enthalten und daß diese Punkte nicht in  $G_w^2$  bzw.  $G_z^2$  liegen; anderenfalls führen wir zunächst lineare Transformationen in  $w$  und  $z$  aus. Sei nun

$$\mathfrak{B}(0, \bar{K}^1) = \nu$$

und etwa  $\nu \leq 0$ . Wir betrachten die Funktion

$$\Psi(w, z) = \Phi(w, z) \cdot (H(w, z))^{-\nu} \cdot e^{\frac{1}{2\pi i} \log w \cdot \log \frac{z^p}{f(z)}}.$$

( $H$  die oben definierte Funktion).  $\Psi(w, z)$  ist in  $G_w^2 \times G_z^2$  eindeutig; ihre Nullstellenmannigfaltigkeit  $M_1^2$  setzt sich zusammen aus  $M^2$  und der mit der Ordnung  $-\nu$  versehenen Fläche  $\mathfrak{F}^2$  (wir bezeichnen diese mit  $-\nu \cdot \mathfrak{F}^2$ ). Nach Satz 1 ist also

$$\begin{aligned} 0 &= S(M_1^2, K_w^1 \times K_z^1) = S(M^2 - \nu \cdot \mathfrak{F}^2, K_w^1 \times K_z^1), \\ &= S(M^2, K_w^1 \times K_z^1) - \nu \cdot S(\mathfrak{F}^2, K_w^1 \times K_z^1). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$S(\mathfrak{F}^2, K_w^1 \times K_z^1) = 1,$$

also

$$S(M^2, K_w^1 \times K_z^1) = \nu.$$

Ist  $\nu > 0$ , so multipliziere man  $\Phi(w, z)$  mit  $(\bar{H}(w, z))^\nu \cdot e^{\frac{1}{2\pi i} \log w \cdot \log \frac{z^p}{f(z)}}$  und schließe entsprechend.

Wir können nun beweisen

Satz 7. Es sei  $Z^4$  ein Zylinderbereich  $R^4$  mit den Projektionen  $\mathfrak{G}^{(w)}$  und  $\mathfrak{G}^{(z)}$ . In  $Z^4$  sei eine Cousinsche Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen vorgegeben. Dann gibt es eine in  $Z^4$  unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion  $F(w, z)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $F(w, z)$  verschwindet genau auf der durch  $V$  bestimmten Nullstellenmannigfaltigkeit in der richtigen Ordnung.
2. Bei festem  $w$  und variablem  $z$  bleibt  $F(w, z)$  eindeutig.
3. Wird  $z$  festgehalten und durchläuft  $w$  eine geschlossene orientierte Kurve  $K_w^1$  in  $\mathfrak{G}^{(w)}$ , so erhält  $F$  einen nur von  $z$  und der Homologieklassse von  $K_w^1$  in  $\mathfrak{G}^{(w)}$

abhängenden Faktor  $f(z)$ , dabei ist  $f(z)$  in  $\mathfrak{G}^{(1)}$  regulär, eindeutig und ungleich Null, symbolisch:

$$K_w^1 \{F(w, z)\} = f(z) \cdot F(w, z).$$

Sei weiter  $K_z^1$  eine orientierte geschlossene Kurve in  $\mathfrak{G}^{(2)}$  und  $\bar{K}^1$  das durch die Abbildung  $\tau = f(z)$  erzeugte Bild von  $K_z^1$  in der  $\tau$ -Ebene. Dann ist

$$S(M^2, K_w^1 \times K_z^1) = \mathfrak{B}(0, \bar{K}^1).$$

Dabei ist  $M^2$  die durch  $V$  bestimmte Nullstellenmannigfaltigkeit.

Beweis. Der letzte Teil der Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 2. Wir haben also nur zu zeigen, daß eine Funktion  $F(w, z)$  der angegebenen Art existiert. Hierzu approximieren wir  $\mathfrak{G}^{(w)}$  und  $\mathfrak{G}^{(z)}$  durch Bereiche  $\mathfrak{G}_r^{(w)}$  bzw.  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$ , derart daß

$$\mathfrak{G}_r^{(w)} \subset \mathfrak{G}_{r+1}^{(w)} \subset \mathfrak{G}^{(w)}, \text{ bzw. } \mathfrak{G}_\mu^{(z)} \subset \mathfrak{G}_{\mu+1}^{(z)} \subset \mathfrak{G}^{(z)}.$$

$\mathfrak{G}_r^{(w)}$  und  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$  sollen außerdem jeweils von endlich vielen stückweise glatten Jordankurven

$$\mathfrak{C}_{r,1}^{(w)}, \mathfrak{C}_{r,2}^{(w)}, \dots, \mathfrak{C}_{r,r_k}^{(w)}, \text{ bzw. } \mathfrak{C}_{\mu,1}^{(z)}, \dots, \mathfrak{C}_{\mu,\mu_i}^{(z)}$$

berandet werden. Dabei seien  $\mathfrak{C}_{r,r_k}^{(w)}$  bzw.  $\mathfrak{C}_{\mu,\mu_i}^{(z)}$  die äußeren Ränder von  $\mathfrak{G}_r^{(w)}$  bzw.  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$ . Wir verbinden  $\mathfrak{C}_{r,1}^{(w)}$  mit  $\mathfrak{C}_{r,2}^{(w)}$  durch eine ganz in  $\mathfrak{G}_r^{(w)}$  verlaufende Jordankurve, ebenso  $\mathfrak{C}_{r,2}^{(w)}$  mit  $\mathfrak{C}_{r,3}^{(w)}$  usw., und schließlich  $\mathfrak{C}_{r,r_k-1}^{(w)}$  mit  $\mathfrak{C}_{r,r_k}^{(w)}$ . Diese Kurven seien  $\mathfrak{J}_1^{(r)}, \dots, \mathfrak{J}_{r_k-1}^{(r)}$ . Sie seien so gelegt, daß sie weder sich selbst noch einander schneiden. Nimmt man die Punkte von  $\mathfrak{J}_1^{(r)}, \dots, \mathfrak{J}_{r_k-1}^{(r)}$  aus  $\mathfrak{G}_r^{(w)}$  heraus, so erhält man einen einfach zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{G}_r^{*(w)}$ , dessen Rand aus den Kurven  $\mathfrak{C}_{r,1}^{(w)}, \dots, \mathfrak{C}_{r,r_k}^{(w)}, \mathfrak{J}_1^{(r)}, \dots, \mathfrak{J}_{r_k-1}^{(r)}$  besteht. In  $\mathfrak{G}_r^{*(w)} \times \mathfrak{G}_\mu^{(z)}$  läßt sich zu der gegebenen Cousinschen Verteilung  $V$  nun eine eindeutige Lösungsfunktion  $f_1(w, z)$  finden. Diese kann insbesondere so konstruiert werden, daß sie bei beiderseitiger Annäherung von  $w$  an die Kurven  $\mathfrak{J}_1^{(r)}, \dots, \mathfrak{J}_{r_k-1}^{(r)}$  noch regulär bleibt. Es seien  $f_1^+$  und  $f_1^-$  die beiden

Zweige von  $f_1$  bei Annäherung an  $\mathfrak{J}_1^{(r)}$ . Dann ist der Quotient  $\frac{f_1^-}{f_1^+}$  regulär und

ungleich Null für  $w$  auf  $\mathfrak{J}_1^{(r)}$ ,  $z$  in  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$ . Wir wählen eine rationale Funktion  $R_{r,\mu}^{(1)}(z)$  mit Polen und Nullstellen außerhalb  $\mathfrak{G}^{(z)}$ , so daß für solche  $w, z$  die

Funktion  $\log\left(\frac{f_1^-}{f_1^+} \cdot R_{r,\mu}^{(1)}(z)\right)$  eindeutig und regulär ist. Dann bilden wir

$$J_1(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{J}_1^{(r)}} \frac{\log\left(\frac{f_1^-}{f_1^+} \cdot R_{r,\mu}^{(1)}(z)\right)}{\eta - w} d\eta$$

und setzen

$$f_2(w, z) = f_1(w, z) \cdot e^{J_1(w, z)}.$$

$f_2(w, z)$  ist auch eine Lösungsfunktion zu  $V$  in  $\mathfrak{G}_r^{*(w)} \times \mathfrak{G}_\mu^{(z)}$ . Sie hat außerdem die Eigenschaft, daß sie sich, wenn man in der  $w$ -Ebene  $\mathfrak{Z}_1^{(r)}$  vom negativen zum positiven Ufer überschreitet, mit dem Faktor  $R_{r,\mu}^{(1)}(z)$  multipliziert.

Wir verfahren nun mit  $f_2$  und  $\mathfrak{Z}_2^{(r)}$  wie soeben mit  $f_1$  und  $\mathfrak{Z}_1^{(r)}$  und erhalten so eine Funktion  $f_3$ . Auf diese und  $\mathfrak{Z}_3^{(r)}$  wenden wir das gleiche Verfahren an, und so fahren wir fort. Zum Schluß gelangen wir zu einer Funktion  $f_{r,\mu-1} = F_{r,\mu}$ . Diese ist wiederum eine Lösungsfunktion zu  $V$  in  $\mathfrak{G}_r^{*(w)} \times \mathfrak{G}_\mu^{(z)}$ . Sie ist ferner in  $\mathfrak{G}_r^{(w)} \times \mathfrak{G}_\mu^{(z)}$  unbeschränkt regulär fortsetzbar. Ihre Mehrdeutigkeit läßt sich, wenn  $K_w^1$  irgendeine orientierte geschlossene Kurve in  $\mathfrak{G}_r^{(w)}$  ist, symbolisch durch

$$K_w^1 [F_{r,\mu}(w, z)] = R(z) \cdot F_{r,\mu}(w, z)$$

charakterisieren, dabei ist  $R(z)$  eine rationale Funktion, deren Null- und Polstellen außerhalb  $\mathfrak{G}^{(z)}$  liegen und die nur von der Homologieklassse von  $K_w^1$  in  $\mathfrak{G}_r^{(w)}$  abhängt.

Die Funktionen  $F_{r,\mu}(w, z)$  werden nun geeignet abgeändert, und sodann wird mittels eines unendlichen Produktes eine Lösungsfunktion für den Gesamtbereich  $Z^4 = \mathfrak{G}^{(w)} \times \mathfrak{G}^{(z)}$  konstruiert. Hierzu betrachten wir die „Sprungfunktionen“  $R_{r,\mu}^{(1)}(z), \dots, R_{r,\mu}^{(r-1)}(z)$ . Der Quotient

$$\frac{R_{r,\mu+1}^{(r)}(z)}{R_{r,\mu}^{(r)}(z)}$$

besitzt Null- und Polstellen höchstens außerhalb  $\mathfrak{G}^{(z)}$ . Außerdem ist sein Logarithmus in  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$  eindeutig, denn die Mehrdeutigkeiten von  $\log R_{r,\mu+1}^{(r)}(z)$  und  $\log R_{r,\mu}^{(r)}(z)$  charakterisieren nach Hilfssatz 2 die gleichen Schnitzzahlen gewisser geschlossener 2-Ketten mit den durch  $V$  vorgeschriebenen Nullstellenmannigfaltigkeiten. Wir suchen zunächst eine in  $\mathfrak{G}^{(z)}$  reguläre, nicht verschwindende Funktion  $H_r^{(r)}(z)$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $\mu$  der Quotient

$$\frac{H_r^{(r)}(z)}{R_{r,\mu}^{(r)}(z)}$$

einen eindeutigen Logarithmus in  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$  hat. Eine solche Funktion läßt sich aus den  $R_{r,\mu}^{(r)}(z)$  in folgender Weise gewinnen: Man wähle eine Folge  $\varepsilon_k$  von positiven Zahlen mit konvergenter Summe. Dann approximiere man  $\log \frac{R_{r,\mu+1}^{(r)}(z)}{R_{r,\mu}^{(r)}(z)}$  durch eine rationale Funktion  $r_\mu^{(r)}(z)$ , deren Null- und Polstellen außerhalb von  $\mathfrak{G}^{(z)}$  liegen, so daß in  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$  gilt

$$\left| \log \frac{R_{r,\mu+1}^{(r)}(z)}{R_{r,\mu}^{(r)}(z)} - r_\mu^{(r)}(z) \right| < \varepsilon_\mu.$$

(Es ist natürlich ein bestimmter Zweig des Logarithmus gemeint!) Eine solche Funktion  $r_\mu^{(v)}(z)$  existiert sicher nach dem Rungeschen Satz. Das unendliche Produkt

$$R_{r,1}^{(v)} \cdot \left( \frac{R_{r,2}^{(v)}}{R_{r,1}^{(v)}} \cdot e^{-r_1^{(v)}} \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{R_{r,\mu}^{(v)}}{R_{r,\mu-1}^{(v)}} \cdot e^{-r_\mu^{(v)}} \right) \cdot \dots$$

konvergiert, jeweils nach Abtrennung endlich vieler Glieder, in jedem  $\mathfrak{G}_\mu^{(v)}$  gleichmäßig, es stellt also eine in  $\mathfrak{G}^{(v)}$  reguläre Funktion dar. Diese hat die geforderte Eigenschaft, wir nennen sie  $H_r^{(v)}(z)$ .

Wir ändern nun die Funktionen  $F_{r,\mu}$  ab: Es seien  $w = w_{r,j}$ ,  $j = 1, \dots, v_r - 1$ , Punkte der  $w$ -Ebene innerhalb  $\mathfrak{G}_{r,j}^{(w)}$  und außerhalb  $\mathfrak{G}^{(w)}$ . Wir setzen

$$F_{r,\mu}^* = \prod_{j=1}^{v_r-1} e^{\frac{1}{2\pi i} \log(w - w_{r,j}) \cdot \log \frac{H_r^{(j)}(z)}{R_{r,\mu}^{(j)}}} \cdot F_{r,\mu}.$$

Das Mehrdeutigkeitsverhalten von  $F_{r,\mu}^*$  läßt sich durch

$$\mathfrak{G}_{r,j}^{(w)}(F_{r,\mu}^*) = H_r^{(j)}(z) \cdot F_{r,\mu}^*$$

beschreiben; der Faktor  $H_r^{(j)}(z)$  hängt dabei von  $\mu$  nicht mehr ab, ist also für alle  $\mu$  derselbe.

Aus den  $F_{r,\mu}^*$  werden durch eine weitere Abänderung Funktionen  $\tilde{F}_{r,\mu}$  gewonnen, so daß die Quotienten

$$\frac{\tilde{F}_{r,\mu}}{\tilde{F}_{r-1,\mu-1}},$$

in  $\mathfrak{G}_r^{(w)} \times \mathfrak{G}_\mu^{(v)}$  eindeutig bleiben. Angenommen, dies sei für  $v' < v$  schon geschehen. Ist dann etwa  $\mathfrak{G}_{r,j'}^{(w)}$  homolog abhängig von den  $\mathfrak{G}_{r-1,j}^{(w)}$ :

$$\mathfrak{G}_{r,j'}^{(w)} \sim \sum_{j=1}^{(v-1)_k} \alpha_j^{j'} \mathfrak{G}_{r-1,j}^{(w)}, \text{ in } \mathfrak{G}_r^{(w)},$$

so bilden wir

$$\tilde{F}_{r,\mu} = \prod_{j'} e^{\frac{1}{2\pi i} \log(w - w_{r,j'}) \cdot \frac{\sum_j \alpha_j^{j'} \log \tilde{H}_{r-1,j}^{(j)}(z)}{\log H_r^{(j')}(z)}} \cdot F_{r,\mu}^*.$$

Dabei seien  $\tilde{H}_{r-1,j}^{(j)}$  die den  $\mathfrak{G}_{r-1,j}^{(w)}$  zugeordneten (evtl. schon abgeänderten) „Sprungfunktionen“, und es ist zu multiplizieren über alle  $j'$ , für die  $\mathfrak{G}_{r,j'}^{(w)}$  homolog abhängig von den  $\mathfrak{G}_{r-1,j}^{(w)}$  ist.

Schließlich werden die Funktionen  $\tilde{F}_{r,\mu}$  zu Funktionen  $F'_{r,\mu}$  so abgeändert, daß das unendliche Produkt

$$F'_{1,1} \cdot \prod_{r=1}^{\infty} \frac{F'_{r+1,v+1}}{F'_{r,v}}$$

in jedem Bereich  $\mathfrak{G}_r^{(w)} \times \mathfrak{G}_r^{(z)}$  jeweils nach Abtrennung endlich vieler Glieder gleichmäßig konvergiert. Wir setzen

$$F'_{00} = \bar{F}_{11}, \quad F'_{11} = \bar{F}_{11}.$$

Es sei  $\delta_k$  eine Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe. Angenommen, die  $F'_{r,r}$  seien für  $r \leq k$  schon so bestimmt, daß

$$e^{-\delta_r} < \left| \frac{F'_{r,r}}{F'_{r-1,r-1}} \right| < e^{+\delta_r} \text{ in } \mathfrak{G}_{r-2}^{(w)} \times \mathfrak{G}_{r-2}^{(z)}.$$

Wir wählen eine in  $Z^4 = \mathfrak{G}^{(w)} \times \mathfrak{G}^{(z)}$  reguläre nichtverschwindende Funktion  $G_k(w, z)$ , so daß in  $\mathfrak{G}_{k-1}^{(w)} \times \mathfrak{G}_{k-1}^{(z)}$  gilt:

$$e^{-\delta_{k+1}} < \left| \frac{\bar{F}_{k+1,k+1}}{F'_{k,k}} \cdot G_k(w, z) \right| < e^{+\delta_{k+1}}.$$

( $G_k(w, z)$  existiert sicher, denn  $\mathfrak{G}_{k-1}^{(w)} \times \mathfrak{G}_{k-1}^{(z)}$  ist regulär ausdehnbar auf  $Z^4$ .)

Außerdem hat man zu berücksichtigen, daß  $\log \frac{\bar{F}_{k+1,k+1}}{F'_{k,k}}$  durch Multiplikation von  $\frac{\bar{F}_{k+1,k+1}}{F'_{k,k}}$  mit einer in  $Z^4$  regulären, nichtverschwindenden rationalen Funktion eindeutig gemacht werden kann!) Wir setzen dann

$$F'_{k+1,k+1}(w, z) = \bar{F}_{k+1,k+1} \cdot G_k(w, z).$$

Die Funktion

$$F(w, z) = F'_{11} \cdot \prod_{r=1}^{\infty} \frac{F'_{r+1,r+1}}{F'_{r,r}}$$

ist nun eine Lösungsfunktion mit den im Satz 7 angegebenen Eigenschaften.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

Wir wenden Satz 7 insbesondere auf den zu Anfang betrachteten Bereich  $D^4$  an. Zu jeder Cousinschen Verteilung  $V$  in  $D^4$  gibt es also eine Lösungsfunktion  $F(w, z)$ , die bei festem  $w$  und variablem  $z$  eindeutig bleibt und bei positivem Umlauf von  $w$  in der  $w$ -Ebene einen in der punktierten  $z$ -Ebene regulären eindeutigen und nichtverschwindenden Faktor  $f(z)$  erhält.  $\log f(z)$  erleide bei positivem Umlauf von  $z$  um den Nullpunkt — etwa längs des Einheitskreises  $L_z^1$  — eine Veränderung vom Werte  $k \cdot 2\pi i$ . [Das durch  $f(z)$  vermittelte Bild von  $L_z^1$  hat also mit dem Nullpunkt die Verschlingungszahl  $k$ .] Wir gewinnen nun, indem wir setzen

$$F^*(w, z) = e^{\frac{1}{2\pi i} \log w \cdot \log \frac{z^k}{f(z)}} \cdot F(w, z),$$

eine neue Lösungsfunktion  $F^*(w, z)$  zu  $V$  in  $D^4$ , die bei positivem Umlauf von  $w$  um den Nullpunkt den Faktor  $z^k$  erhält und sonst eindeutig bleibt. So folgt:

<sup>\*)</sup> Siehe [4].

**Satz 7a.** Zu jeder Cousinschen Verteilung  $V$  in  $D^4$  gibt es eine analytische Lösung  $F(w, z)$  mit den Eigenschaften

$$L_w^1 \{F(w, z)\} = z^k \cdot F(w, z), \quad k \text{ ganz}, \quad L_z^1 \{F(w, z)\} = F(w, z).$$

Dabei ist  $k$  die zur Bettischen Basis  $B^2 = L_w^1 \times L_z^1$  gehörige charakteristische Zahl von  $V$  in  $D^4$  (in bezug auf den Koeffizientenbereich  $\mathbb{G}_0$ ).

Umgekehrt besitzt nach Hilfssatz 2 jede Funktion mit diesen Eigenschaften, falls  $k \neq 0$  ist, Nullstellenflächen, deren charakteristische Zahl in bezug auf  $B^2$  und  $\mathbb{G}_0$  gleich  $k$  ist.

Satz 7 läßt sich unmittelbar auf Zylinderbereiche im  $R^{2n}$  übertragen. Wir begnügen uns damit, die entsprechende Aussage zu formulieren, und verzichten hier auf die Durchführung des Beweises, der analog wie im Falle zweier Veränderlichen verläuft und keine neuen Gesichtspunkte liefert.

**Satz 7b.** Es sei  $Z^{2n} = \mathbb{G}^{(z_1)} \times \dots \times \mathbb{G}^{(z_n)}$  ein Zylinderbereich im  $R^{2n}$ . In  $Z^{2n}$  sei eine Cousinsche Verteilung  $V$  von Ortsfunktionen vorgegeben. Dann gibt es eine in  $Z^{2n}$  unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion  $F(z_1, \dots, z_n)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $F$  verschwindet genau auf der durch  $V$  bestimmten Nullstellenmannigfaltigkeit  $M^{2n-2}$  in der richtigen Ordnung,
2. bei festem  $z_i$ ,  $i > 1$ , und variablem  $z_1$  bleibt  $F$  eindeutig,
3. werden die  $z_k$ ,  $k \neq i$ ,  $i > 1$ , festgehalten und durchläuft  $z_i$  eine orientierte geschlossene Kurve  $K_{z_i}^1$  in  $\mathbb{G}^{(z_i)}$ , so erhält  $F$  einen Faktor  $\prod_{r < i} R_r(z_r)$ ; dabei ist  $R_r(z_r)$  in  $\mathbb{G}^{(z_r)}$  regulär, eindeutig und ungleich Null, symbolisch

$$K_{z_i}^1 \{F\} = \left( \prod_{r < i} R_r(z_r) \right) \cdot F.$$

Sei weiter  $K_{z_r}^1$ , ( $r < i$ ), eine geschlossene orientierte Kurve in  $\mathbb{G}^{(z_r)}$  und  $\tilde{K}_{z_r}^1$  das durch die Abbildung  $\tau = R_r(z_r)$  erzeugte Bild von  $K_{z_r}^1$  in der  $\tau$ -Ebene. Dann ist

$$S(M^{2n-2}, K_{z_i}^1 \times K_{z_r}^1) = -\mathfrak{B}(0, \tilde{K}_{z_r}^1).$$

Jeder Cousinschen Verteilung  $V$  in einem Zylinderbereich ist so in allen Fällen wenigstens eine multiplikativ mehrdeutige Lösungsfunktion zugeordnet, und die charakteristischen Zahlen von  $V$  sind durch die „Multiplikatoren“ eindeutig bestimmt. Es taucht nun die Frage auf, ob sich umgekehrt zu willkürlich vorgegebenen charakteristischen Zahlen stets eine zugehörige Cousinsche Verteilung konstruieren läßt. Für Zylinderbereiche können wir dies in der Tat beweisen. Es gilt

**Satz 8.** Es sei  $Z^{2n}$  ein Zylinderbereich im  $R^{2n}$ , ferner  $B_1^2, \dots, B_r^2, \dots$  eine zweidimensionale Homologiebasis in  $Z^{2n}$  und  $a_1, \dots, a_r, \dots$  eine beliebige

*Folge ganzer Zahlen. Dann gibt es in  $Z^{2n}$  eine Cousinsche Verteilung  $V$ , so daß für die durch  $V$  bestimmte Nullstellenmannigfaltigkeit  $M^{2n-2}$  gilt*

$$S(M^{2n-2}, B_1^2) = a_k, \quad k = 1, \dots, \nu, \dots$$

Wir beweisen den Satz zunächst für  $n = 2$ . Dazu benötigen wir

**Hilfssatz 3.** *Es seien  $w_0, w_1$  zwei Punkte in der  $w$ -Ebene und  $z_0, z_1$  zwei Punkte in der  $z$ -Ebene.  $\mathfrak{H}$  sei ein die Strecke  $\overline{z_0 z_1}$  ganz im Innern enthaltendes Streifengebiet der  $z$ -Ebene, ferner  $k$  eine ganze Zahl. Dann gibt es eine analytische Fläche  $\mathfrak{F}^2$  mit folgenden Eigenschaften:*

1.  $\mathfrak{F}^2$  wird lediglich singular auf den 4 Ebenen  $w = w_0, w = w_1, z = z_0, z = z_1$ .
2. Für  $w$  mit  $|w - w_0| > \varepsilon, |w - w_1| > \varepsilon$  hat  $\mathfrak{F}^2$  nur Punkte  $w, z$  mit  $z$  in  $\mathfrak{H}$ .
3. Sei  $K_w^1$  ein die Punkte  $w_0, w_1$  trennender Kreis der  $w$ -Ebene und  $K_z^1$  ein die Punkte  $z_0, z_1$  trennender Kreis der  $z$ -Ebene. Weist man dann  $\mathfrak{F}^2$  die Ordnung  $|k|$  zu, so gilt

$$S(\mathfrak{F}^2, K_w^1 \times K_z^1) = k.$$

**Beweis.** Wir nehmen an,  $w_0$  bzw.  $z_0$  liege im Innern von  $K_w^1$  bzw.  $K_z^1$ . Dann bringen wir durch eine  $K_w^1$  bzw.  $K_z^1$  festlassende lineare Transformation in  $w$  bzw.  $z$  die Punkte  $w_1, z_1$  ins Unendliche;  $w_0$  bzw.  $z_0$  mögen dabei übergehen in  $w'_0$  bzw.  $z'_0$ . Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß  $K_w^1$  bzw.  $K_z^1$  mit  $w_0$  bzw.  $z_0$  die Verschlingungszahl  $+1$  hat. Das Bild  $\mathfrak{H}'$  von  $\mathfrak{H}$  umfaßt ganz einen Winkelraum  $W_{z'_0, \delta}^2$  der Öffnung  $\delta$  in bezug auf den Punkt  $z'_0$ , ferner liegt das Bild des  $w$ -Bereiches  $|w - w_0| > \varepsilon, |w - w_1| > \varepsilon$  ganz im Innern eines Kreisringes  $\mathfrak{G}^{(w')}$ :  $r_1 < |w' - w'_0| < r_2$ . Wir wählen nun eine positive Zahl  $C$ , so daß

$$\frac{1}{\delta} \cdot \log \frac{r_2}{r_1} \cdot |k| < C$$

ist.

Dann hat die Fläche

$$\mathfrak{F}^{2'}: z' - z'_0 = (w' - w'_0)^{\frac{k}{C}}$$

für  $w'$  aus  $\mathfrak{G}^{(w')}$  lediglich Punkte  $w', z'$  mit  $z'$  aus  $W_{z'_0, \delta}^2$ . Machen wir die vorgenommenen linearen Transformationen wieder rückgängig, so erhalten wir aus  $\mathfrak{F}^{2'}$  eine Fläche  $\mathfrak{F}^2$  der gesuchten Art.

Nun zum Beweise von Satz 3 für den Fall  $n = 2$ . Es seien  $\mathfrak{G}^{(w)}$  und  $\mathfrak{G}^{(z)}$  die Projektionen von  $Z^4$ , also  $Z^4 = \mathfrak{G}^{(w)} \times \mathfrak{G}^{(z)}$ . Wir dürfen annehmen, daß die Punkte  $z = \infty$  bzw.  $w = \infty$  innere Punkte von  $\mathfrak{G}^{(z)}$  bzw.  $\mathfrak{G}^{(w)}$  sind, sonst führen wir lineare Transformationen in  $w$  und  $z$  durch. Sodann approximieren wir  $\mathfrak{G}^{(z)}$  und  $\mathfrak{G}^{(w)}$  durch Bereiche  $\mathfrak{G}_\mu^{(z)}$  bzw.  $\mathfrak{G}_\mu^{(w)}$  mit folgenden Eigen-

schaften (wir formulieren diese nur für die  $\mathfrak{G}_r^{(s)}$ , entsprechendes soll gelten für die  $\mathfrak{G}_r^{(u)}$ ):

1.  $\mathfrak{G}_r^{(s)} \subset \mathfrak{G}_{r+1}^{(s)} \subset \mathfrak{G}^{(s)}$ .
2.  $\mathfrak{G}_r^{(s)}$  wird berandet durch endlich viele stückweise glatte Jordankurven; insbesondere besitze  $\mathfrak{G}_0^{(s)}$  eine einzige Randkurve  $\mathfrak{G}_0^{(s)}$ .
3.  $\mathfrak{G}_{r+1}^{(s)}$  gehe aus  $\mathfrak{G}_r^{(s)}$  dadurch hervor, daß innerhalb des von einer Randkurve von  $\mathfrak{G}_r^{(s)}$  eingeschlossenen Gebietes mindestens eine aber höchstens zwei Randkurven von  $\mathfrak{G}_{r+1}^{(s)}$  neu auftreten. Innerhalb jeder Randkurve von  $\mathfrak{G}_r^{(s)}$  liegt also mindestens ein Randpunkt von  $\mathfrak{G}^{(s)}$ .

Für die Randkurven der  $\mathfrak{G}_r^{(s)}$  führen wir folgende Bezeichnungen ein:  $\mathfrak{G}_0^{(s)}$  besitzt höchstens zwei Randkurven im Innern von  $\mathfrak{G}_0^{(s)}$ , wir nennen sie  $\mathfrak{G}_{00}^{(s)}$  und (falls existierend)  $\mathfrak{G}_{01}^{(s)}$ . Die Randkurven von  $\mathfrak{G}_2^{(s)}$  liegen im Innern von  $\mathfrak{G}_{00}^{(s)}$  und  $\mathfrak{G}_{01}^{(s)}$ ; sie mögen bezeichnet sein mit  $\mathfrak{G}_{000}^{(s)}$ ,  $\mathfrak{G}_{001}^{(s)}$ ,  $\mathfrak{G}_{010}^{(s)}$ ,  $\mathfrak{G}_{011}^{(s)}$  (falls sie alle existieren). Allgemein sei durch  $\mathfrak{G}_{i_1, \dots, i_r}$  eine Randkurve von  $\mathfrak{G}_r^{(s)}$  gekennzeichnet, diese liegt im Innern von  $\mathfrak{G}_{i_1, \dots, i_{r-1}}^{(s)}$ . Dabei ist  $i_r$  gleich Null oder Eins. Das von  $\mathfrak{G}_{i_1, \dots, i_r}^{(s)}$  umschlossene Gebiet heiße  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_r}^{(s)}$ .

Innerhalb jedes  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_r}^{(s)}$  liegt mindestens ein Randpunkt von  $\mathfrak{G}^{(s)}$ . Zwischen solchen Randpunkten werden in folgender Weise Verbindungsstrecken konstruiert: Es sei für  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_r}^{(s)}$  der Index  $i_r = 1$ , also  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_r}^{(s)} = \mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1}^{(s)}$ . Man wähle in  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{r-1}, 0}^{(s)}$  und  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1}^{(s)}$  je einen Randpunkt von  $\mathfrak{G}^{(s)}$ , so daß deren Entfernung möglichst klein ist, und verbinde sie durch eine Strecke. In dieser Weise ist jedem Gebiet  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_r}^{(s)}$  mit letztem Index 1 eine Strecke  $S_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1}^{(s)}$  zugeordnet.

Wir behaupten, daß die Länge der  $S_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1}^{(s)}$  mit wachsender Indexzahl  $r$  gegen Null geht. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge von Strecken, die gegen eine Grenzstrecke  $\overline{P_0 P_1}$  der Länge  $L \neq 0$  konvergierten. Diese Folge kann so gewählt werden, daß die Anfangs- und Endpunkte der zugehörigen Strecken sämtlich in einer Folge ineinandergeschachtelter Gebiete  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_r}^{(s)}$  liegen;  $P_0$  und  $P_1$  gehören somit zu demselben Randkontinuum  $\mathfrak{R}$  von  $\mathfrak{G}^{(s)}$ . Sei nun  $\overline{P'_\mu P''_\mu}$  eine der gegen  $\overline{P_0 P_1}$  konvergierenden Strecken; sie sei so gewählt, daß  $\overline{P'_\mu P_0} < \overline{P'_\mu P''_\mu}$  und  $\overline{P''_\mu P_1} < \overline{P'_\mu P''_\mu}$ .  $P'_\mu$  bzw.  $P''_\mu$  liegt innerhalb  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{\mu-1}, 0}^{(s)}$  bzw.  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{\mu-1}, 1}^{(s)}$ . Genau eines dieser Gebiete, etwa  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{\mu-1}, 0}^{(s)}$ , umfaßt das Kontinuum  $\mathfrak{R}$ . Dann aber könnten  $P'$ ,  $P''$  nicht zwei Randpunkte von  $\mathfrak{G}^{(s)}$  innerhalb von  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{\mu-1}, 0}^{(s)}$  und  $\mathfrak{B}_{i_1, \dots, i_{\mu-1}, 1}^{(s)}$  mit minimaler Entfernung sein, denn es ist ja  $\overline{P''_\mu P_1} < \overline{P'_\mu P''_\mu}$ , dabei liegen  $P_1$  und  $P'_\mu$  beide innerhalb  $\mathfrak{B}_{i_1, i_2, \dots, i_{\mu-1}, 0}^{(s)}$ .

Wir umgeben nun die Strecken  $S_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1}^{(s)}$  mit schmalen Streifen-gebieten  $\mathfrak{S}_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1}^{(z)}$ , die mit wachsendem  $v$  gleichfalls zusammenschrumpfen sollen. Dann kann jeder Punkt aus  $\mathfrak{G}_v^{(s)}$  höchstens in endlich vielen  $\mathfrak{S}_{i_1, \dots, i_{r-1}, 1}^{(s)}$  liegen und auch nicht Häufungspunkt von Punkten aus unendlich vielen solcher Gebiete sein.

Als eindimensionale Homologiebasis in  $\mathfrak{G}_v^{(s)}$  können wir sämtliche orientierten Kurven  $\mathfrak{C}_{i_1, \dots, i_{r-1}, i_r}^{(z)}$  nehmen, deren letzter Index  $i_r = 1$  ist. Sie sind durch ihre Indizes in natürlicher Weise angeordnet; diese Folge bezeichnen wir zur Abkürzung mit  $\mathfrak{C}_v^{*(z)}$ ; die zugeordneten Streifengebiete heißen  $\mathfrak{S}_v^{*(s)}$ . Entsprechend definieren wir  $\mathfrak{C}_v^{*(w)}$  und  $\mathfrak{S}_v^{*(w)}$ . Dann stellen alle topologischen Produkte  $\mathfrak{C}_v^{*(w)} \times \mathfrak{C}_v^{*(s)}$  eine zweidimensionale Homologiebasis in  $Z^4$  dar.

Jedem  $\mathfrak{C}_v^{*(w)} \times \mathfrak{C}_v^{*(s)}$  ist nach Voraussetzung eine ganze Zahl  $a_{\varrho\sigma}$  als charakteristische Zahl der gesuchten Verteilung  $V$  zugeordnet. Wir zerlegen die Matrix  $(a_{\varrho\sigma})$  in zwei Teile  $(a'_{\varrho\sigma})$  und  $(a''_{\varrho\sigma})$  derart, daß

$$(a'_{\varrho\sigma}) + (a''_{\varrho\sigma}) = (a_{\varrho\sigma})$$

und

$$a'_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\sigma} \quad \text{für } \varrho \leq \sigma, \quad a'_{\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } \varrho > \sigma,$$

$$a''_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\sigma} \quad \text{für } \varrho > \sigma, \quad a''_{\varrho\sigma} = 0 \quad \text{für } \varrho \leq \sigma.$$

Wir konstruieren nun zunächst eine Verteilung  $V'$ , die zur Matrix  $(a'_{\varrho\sigma})$  gehört. Dazu ordnen wir die  $\mathfrak{C}_v^{*(w)} \times \mathfrak{C}_v^{*(s)}$  mit  $\varrho \leq \sigma$  lexikographisch, wobei  $\sigma$  als erster und  $\varrho$  als zweiter Index betrachtet werden soll, und erhalten so eine Folge  $B_m^2$ . Jedem  $B_m^2$  wird nun in folgender Weise eine Fläche  $\mathfrak{F}_m^2$  zugeordnet:

1. Der 2-Kette  $\mathfrak{C}_1^{*(w)} \times \mathfrak{C}_1^{*(s)} = B_1^2$  ordnen wir eine Fläche  $\mathfrak{F}_1^2$  gemäß Hilfssatz 3 zu, deren singuläre Punkte lediglich in den Endpunktebenen der Kurven  $\mathfrak{C}_1^{*(w)}$  und  $\mathfrak{C}_1^{*(s)}$  zugeordneten Strecken liegen, die ferner keine Punkte in  $\mathfrak{G}_1^{(w)} \times (E_z^2 - \mathfrak{S}_1^{*(s)})$  ( $E_z^2$  die  $z$ -Ebene!) hat, und für die gilt

$$S(\mathfrak{F}_1^2, \mathfrak{C}_1^{*(w)} \times \mathfrak{C}_1^{*(s)}) = \text{sign } a_{11}.$$

Auf  $\mathfrak{F}_1^2$  schreiben wir die Ordnung  $|a_{11}|$  vor.

2. Angenommen, es seien schon allen  $B_m^2$  für  $m < m_0$  Flächen  $\mathfrak{F}_m^2$  mit zugehörigen Ordnungen  $k_m$  zugewiesen, so daß gilt

$$S\left(\sum_{j=1}^m k_j \mathfrak{F}_j^2, B_m^2\right) = b_m$$

( $b_m$  die  $B_m^2$  zugeordnete charakteristische Zahl!). Sei  $B_{m_0}^2 = \mathfrak{C}_{v_0}^{*(w)} \times \mathfrak{C}_{v_0}^{*(s)}$ . Wir wählen gemäß Hilfssatz 3 eine Fläche  $\mathfrak{F}_{m_0}^2$ , deren singuläre Punkte lediglich in den Endpunktebenen der Kurven  $\mathfrak{C}_{v_0}^{*(w)}$  und  $\mathfrak{C}_{v_0}^{*(s)}$  zugeordneten Strecken liegen; die ferner keine Punkte außerhalb  $\mathfrak{G}_{v_0}^{(w)} \times (E_z^2 - \mathfrak{S}_{v_0}^{*(s)})$  hat und der eine solche Ordnung  $k_{m_0}$  zugewiesen ist, daß gilt

$$S\left(\sum_{j=1}^{m_0} k_j \mathfrak{F}_j^2, B_{m_0}^2\right) = b_{m_0}.$$

Man überlegt sich leicht, daß für  $m < m_0$  stets gilt

$$S(k_{m_0}, \mathfrak{F}_{m_0}^2, B_m^2) = 0.$$

Also haben wir

$$(1) \quad S\left(\sum_j k_j \mathfrak{F}_j^2, B_m^2\right) = b_m.$$

Die mit den Ordnungen  $k_m$  versehenen Flächen  $\mathfrak{F}_m^2$  lassen sich in  $Z^4 = \mathfrak{G}^{(w)} \times \mathfrak{G}^{(z)}$  durch eine Cousinsche Verteilung  $V'$  vorgeben, denn in der Nachbarschaft jedes Punktes von  $Z^4$  treten gemäß ihrer Konstruktion nur endlich viele  $\mathfrak{F}_m^2$  auf. Die zur Basis  $\mathfrak{G}_\sigma^{*(w)} \times \mathfrak{G}_\sigma^{*(z)}$  gehörigen charakteristischen Zahlen von  $V'$  sind nach (1) gleich  $a'_{\sigma\rho}$ , ( $\rho \leq \sigma$ ).

Man erhält nun eine zweite Verteilung  $V''$ , die zur Matrix  $(a''_{\sigma\sigma})$  gehört, dadurch daß man die Rollen der  $w$ - und  $z$ -Ebene vertauscht und entsprechend verfährt. (Man hat nur zu beachten, daß bei der Vertauschung von  $w$  und  $z$  die Vorzeichen der  $a''_{\sigma\sigma}$  geändert werden müssen.) Bezeichnet man die zu  $V'$  bzw.  $V''$  gehörigen Ortsfunktionen und Umgebungen mit  $f'_P$ ,  $U'(P)$  bzw.  $f''_P$ ,  $U''(P)$ , so definieren wir durch

$$f_P = f'_P \cdot f''_P, \quad U(P) = D(U'(P), U''(P))$$

eine Cousinsche Verteilung  $V = V' + V''$  in  $Z^4$ . Diese hat nun die im Satz 8 für den Fall  $n = 2$  angegebenen Eigenschaften.

Es ist jetzt leicht, den Satz 8 auch für allgemeines  $n$  zu beweisen. Es sei  $Z^{2n} = \mathfrak{G}^{(z_1)} \times \dots \times \mathfrak{G}^{(z_n)}$ . Wir fassen die  $\mathfrak{G}^{(z_i)}$  auf alle möglichen Arten paarweise zu Zylinderbereichen  $Z_{ik}^2 = \mathfrak{G}^{(z_i)} \times \mathfrak{G}^{(z_k)}$  ( $i < k$ ) zusammen. Alle Homologiebasen  $B_{ik}^2$  der  $Z_{ik}^2$  bilden zusammen eine Homologiebasis von  $Z^{2n}$ . Der Basis  $B_{ik}^2$  von  $Z_{ik}^2$  ist also eine Menge  $a'_{ik}$  von natürlichen Zahlen als Menge der zugehörigen charakteristischen Zahlen zugeordnet. Wir konstruieren hierzu eine Verteilung  $V_{ik}$  wie oben. Die in  $V_{ik}$  vorkommenden Funktionen  $f_P^{(i,k)}$  und Umgebungen  $U_{ik}(P)$  von  $P$  hängen zwar explizit nur von den Veränderlichen  $z_i$  und  $z_k$  ab, wir können sie aber auch als Funktionen und Umgebungen in  $Z^{2n}$  auffassen. Dann hat die Verteilung

$$V = \sum_{i < k} V_{ik}$$

die im Satz 8 geforderten Eigenschaften.

Damit ist Satz 8 bewiesen.

**Folgerung.** Jede in einem Zylinderbereiche  $Z^{2n}$  vorgegebene Cousinsche Verteilung  $V$  läßt sich zu einer Verteilung  $V'$  ergänzen, die eine eindeutige Lösungsfunktion gestattet.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich nun auch, daß jede in einem Zylinderbereich  $Z^{2n}$  meromorphe Funktion  $\Phi(z_1, \dots, z_n)$  dort eine Quotienten-

darstellung durch reguläre Funktionen besitzt. In einer Umgebung  $U(P)$  jedes Punktes  $P$  von  $Z^{2n}$  gestattet nämlich  $\Phi$  eine Darstellung

$$\Phi = \frac{f_P}{g_P}, \quad f_P \text{ und } g_P \text{ teilerfremd.}$$

Die  $g_P$  bilden mit den  $U(P)$  eine Cousinsche Verteilung  $V$ . Ergänzen wir  $V$  zu einer Verteilung  $V'$ , die eine eindeutige Lösung  $G(z_1, \dots, z_n)$  besitzt, so ist

$$\Phi(z_1, \dots, z_n) \cdot G(z_1, \dots, z_n) = F(z_1, \dots, z_n)$$

eine in ganz  $Z^{2n}$  reguläre Funktion. Also haben wir in  $Z^{2n}$

$$\Phi = \frac{F}{G}.$$

Somit gilt

**Satz 9.** Jede in einem Zylinderbereich  $Z^{2n}$  meromorphe Funktion läßt sich dort als Quotient von regulären, allerdings nicht notwendig teilerfremden Funktionen darstellen.

### § 5.

#### Regularitätsbereiche, in denen der Rungesche Satz nicht gilt.

Für alle schlichten Bereiche  $\mathfrak{G}$  der klassischen Theorie besteht bekanntlich der Satz von Runge, daß sich jede in  $\mathfrak{G}$  reguläre Funktion im Innern von  $\mathfrak{G}$  gleichmäßig durch rationale Funktionen approximieren läßt. Es ist seit längerem bekannt, daß in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen eine entsprechende allgemeine Aussage sicher nicht gilt: Gegenbeispiele liefern die schlichten Bereiche mit nicht-schlichter Regularitätshülle. Aber es war bis jetzt völlig offen, ob nicht wenigstens in allen *schlichten* Regularitätsbereichen  $B^{2n}$  eine dem Rungeschen Satz entsprechende Aussage Gültigkeit hat. Unsere Überlegungen setzen uns in den Stand zu zeigen, daß auch dies nicht zutrifft<sup>9)</sup>. Es gilt:

**Satz 10.** Es sei  $B^{2n}$  ein schlichter Regularitätsbereich im  $R^{2n}$  und  $K^2$  eine geschlossene<sup>10)</sup> singuläre Kette in  $B^{2n}$ . Ferner sei  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  eine analytische Fläche in  $B^{2n}$  derart, daß  $S(\mathfrak{F}^{2n-2}, K^2) \neq 0$  ist und die Schnittzahlen in den einzelnen Schnittpunkten von  $K^2$  und  $\mathfrak{F}^{2n-2}$ , aus denen sich die algebraische Summe  $S(\mathfrak{F}^{2n-2}, K^2)$  zusammensetzt, sämtlich dasselbe Vorzeichen haben.

<sup>9)</sup> Es ist zugelassen, daß die approximierenden rationalen Funktionen  $R_\nu(z_1, \dots, z_n)$  im Bereich  $B^{2n}$  Polstellen besitzen; diese müssen dann allerdings mit wachsendem  $\nu$  gegen den Rand von  $B^{2n}$  gehen.

<sup>10)</sup> Wir beschränken uns auf den Koeffizientenbereich  $\mathfrak{G}_0$ .

Entfernt man  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  aus  $B^{2n}$ , so erhält man einen Regularitätsbereich  $B^{2n*}$ . Dann gibt es in  $B^{2n*}$  eine reguläre Funktion, die sich im Innern von  $B^{2n*}$  nicht durch rationale Funktionen approximieren läßt.

Beweis. Wir konstruieren in  $B^{2n}$  eine Funktion  $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ , die  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  als Polfläche erster Ordnung besitzt und sich sonst in  $B^{2n}$  überall regulär verhält. Eine solche Funktion existiert sicher, da nach K. Oka in allen schlichten Regularitätsbereichen die erste Aussage von Cousin gilt. Wir behaupten, daß  $\Phi$  die im Satz geforderte Eigenschaft hat.

Um das zu zeigen, approximieren wir  $K^2$  durch eine Zellenkette  $K^2$  in einer Zellenzerlegung  $W$  eines Teilbereiches von  $B^{2n}$ , die sich zugleich zu  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  und den Nullstellenflächen von  $\Phi$  in allgemeiner Lage befindet derart, daß  $K^2$  auch noch die über  $K^2$  gemachten Voraussetzungen erfüllt. Es seien  $P_i, i = 1, \dots, r$ , die Schnittpunkte von  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  und  $K^2$ . Wir schneiden aus  $K^2$  kleine Kreise  $C_i^2$  mit den  $P_i$  als Mittelpunkten heraus. Die Ebenen von  $C_i^2$  drehen wir um  $P_i$  so, daß sie in analytische Ebenen  $\mathbb{C}_i^2$  übergehen und bei der Drehung zu  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  in allgemeiner Lage bleiben.  $C_i^2$  werde übergeführt in  $\bar{C}_i^2$ . Dann gilt

$$(1) \quad S(\mathfrak{F}^{2n-2}, C_i^2) = S(\mathfrak{F}^{2n-2}, \bar{C}_i^2).$$

Wir nehmen an, daß  $C_i^2$  so orientiert war, daß das Vorzeichen von  $S(\mathfrak{F}^{2n-2}, C_i^2)$  mit dem Vorzeichen der Schnitzzahl von  $K^2$  und  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  in  $P_i$  übereinstimmt. Angenommen, es wäre nun  $\Phi$  durch rationale Funktionen im Innern von  $B^{2n*}$  approximierbar. Wir legen um  $\mathfrak{F}^{2n-2}$  einen Schlauch  $S^{2n}$ , der so dünn ist, daß er die Ränder weder der  $C_i^2$  noch ihrer Bilder enthält, in die diese bei der Drehung von  $C_i^2$  in  $\bar{C}_i^2$  übergehen. Wir wählen nun eine rationale Funktion  $R(z_1, \dots, z_n)$ , die in  $B^{2n} - S^{2n}$  regulär ist und  $\Phi$  so gut approximiert, daß sie im Innern der  $C_i^2$  Polstellen besitzt. (Solche Polstellen müssen bei genügend guter Approximation stets auftreten!) Sei nun  $M_\infty^{2n-2}$  die Menge der Polstellenflächen von  $R(z_1, \dots, z_n)$ . Wir behaupten, daß  $S(M_\infty^{2n-2}, K^2) \neq 0$  sein muß. In der Tat! Zunächst ist

$$\text{sign } S(M_\infty^{2n-2}, \bar{C}_i^2) = \text{sign } S(\mathfrak{F}^{2n-2}, \bar{C}_i^2),$$

denn  $\bar{C}_i^2$  liegt in der analytischen Ebene  $\mathbb{C}_i^2$ , und zwei in natürlicher Weise orientierte Mannigfaltigkeiten  $M_\infty^{2n-2}$  und  $M^2$  haben stets eine positive Schnitzzahl. Wegen (1) und der Voraussetzung unseres Satzes haben daher alle Schnitzzahlen  $S(M_\infty^{2n-2}, \bar{C}_i^2)$  dasselbe Vorzeichen und keine von ihnen ist Null. Demnach ist auch  $S(M_\infty^{2n-2}, K^2) \neq 0$ .

Dann aber könnte nach Satz 5  $R(z_1, \dots, z_n)$  in  $B^{2n}$  keine teilerfremde Quotientendarstellung besitzen. Eine solche existiert aber sicher, denn  $R(z_1, \dots, z_n)$  ist ja im ganzen Raum meromorph. Damit haben wir einen Widerspruch und Satz 10 ist bewiesen.

Ein konkretes Beispiel im  $R^4$  erhält man, wenn man aus dem Bereich  $D^4$  in § 4 die Fläche  $\mathfrak{F}^2: z = w^4$  herausnimmt. Der entstehende Bereich  $D^{4*}$  ist also durch folgende Bedingungen festgelegt:

$$D^{4*}: \quad (0 < |w| < \infty; \quad 0 < |z| < \infty; \quad z \neq w^4).$$

Eine nicht in  $D^{4*}$  rational-approximierbare Funktion ist z. B.

$$\phi = \frac{H(-w, z)}{H(w, z)}.$$

Dabei ist  $H(w, z)$  die zu  $\mathfrak{F}^2$  gehörige, in § 4 konstruierte Nullstellenfunktion,

### Literaturverzeichnis.

- [1] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. *Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb.* III, S. 3.
- [2] H. Behnke und P. Thullen, Über die Verallgemeinerung des Weierstraßschen Produktsatzes. *Math. Annalen* 109 (1934).
- [3] H. Behnke und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. *Jahresber. d. D.M.V.* 47 (1937).
- [4] H. Behnke und K. Stein, Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von  $n$  komplexen Veränderlichen. *Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, Fachgr. I, Neue Folge*, Bd. 1, S. 15.
- [5] H. Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. *C. R. Acad. Sci.* 199 (1934), S. 1284—1287.
- [6] H. Cartan, Sur le premier problème de Cousin. *C. R. Acad. Sci.* 207 (1938), S. 558—560.
- [7] P. Cousin, Sur les fonctions de  $n$  variables complexes. *Acta math.* 19 (1895).
- [8] T. H. Gronwall, On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character. *Amer. Math. Soc. Transact.* 18 (1917).
- [9] K. Oka, I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, Ser. A, Vol. 6, Nr. 3; II. Domaines d'holomorphie, Ser. A, Vol. 7, Nr. 2; III. Deuxième problème de Cousin, Ser. A, Vol. Nr. 1 (1939) in: *Journal of Science of the Hiroshima University*.
- [10] K. Stein, Über das zweite Cousinsche Problem und die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen. *Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Naturw. Abt., Jahrg.* 1939, S. 139—149.
- [11] P. Thullen, Sur le deuxième problème de Cousin. *C. R. Acad. Sc.* 200 (1935), S. 720—721.

(Eingegangen am 16. 5. 1940.)

# Über die Zerlegungsgesetze der rationalen Zahlen in Quaternionen-Körpern.

Von

H. Brandt in Halle.

(Aus einem Briefe an Herrn E. Hecke<sup>1)</sup>.)

... Die Hauptpunkte, welche zum Beweise des von Ihnen gebrauchten Hilfssatzes<sup>2)</sup> führen, will ich Ihnen kurz auseinandersetzen. Wenn Sie zunächst den Satz auch nur für Stammformen<sup>3)</sup> bzw. für maximale Ordnungen<sup>4)</sup> brauchen, so gilt er doch allgemeiner, und der Beweis ist derselbe. Nur beschränke ich mich auf solche primitive Formen<sup>5)</sup>, welche nicht nur eine

<sup>1)</sup> Mit Hilfe der Theorie der elliptischen Modulfunktionen hatte ich 1935 für gewisse Systeme quadratischer Formen von vier Variablen über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl durch dieses System einen einfachen arithmetischen Satz gefunden, der eine überraschende Analogie zu den bekannten Verhältnissen bei binären Formen bedeutet. Man kann ihn dahin aussprechen, daß für das System der Dirichletreihen zu diesen Formen nach Adjunktion eines kommutativen Matrizenringes ein Euler-Produkt von einfacher Bauart besteht, wie bei den Zetafunktionen binärer Formen. Da ein allgemeiner Beweis mit den heutigen Mitteln der Funktionentheorie nicht zu erbringen ist, habe ich Herrn Brandt den vermuteten Satz mitgeteilt, in der Meinung, daß er mit arithmetischen Methoden den Beweis führen könne. Das ist ihm in der Tat gelungen, wie er in dem obigen Brief zeigt. — Ein Zahlbeispiel zu diesem Satz habe ich in einem Vortrag auf dem Internat. Mathem.-Kongr. Oslo 1936 veröffentlicht. Die Stellung dieses Satzes in der Funktionentheorie und seine Verallgemeinerung auf positive Formen mit beliebiger gerader Variablenzahl habe ich im Zusammenhang in einer eben erscheinenden Arbeit dargestellt (Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mathem.-fys. Meddelelser XVII, 12 (1940)).

E. Hecke.

<sup>2)</sup> Von der Vertauschbarkeit der Matrizen  $\lambda(m)$  (siehe unten).

<sup>3)</sup> Formen sind hier positiv definite quaternäre quadratische Formen

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = a_0 x_0^2 + a_{01} x_0 x_1 + \dots,$$

bei denen die Koeffizienten, d. h. die der Variablenquadrate  $\frac{1}{2} a_{ii} = a_i$  und die der Variablenprodukte  $a_{ik}$  ( $i < k$ ) ganz rational sind. Ihre Diskriminante ist  $\Delta = |a_{ik}| = d^2$ . Die Form ist primitiv, wenn die Koeffizienten  $a_i$  und  $a_{ik}$  ( $i < k$ ) keinen gemeinsamen Teiler haben. Stammformen sind solche primitive Formen, die nicht rational in andere ganzzahlige Formen mit kleinerer Diskriminante transformiert werden können.

<sup>4)</sup> Wegen des Zusammenhangs mit Quaternionenordnungen und wegen des Ausdrucks Normenform wird auf die Abhandlung des Verf. verwiesen: Idealtheorie in Quaternionenalgebren. Math. Annalen 99 (1928), S. 1–29. Man vgl. auch die weiteren hier zitierten Abhandlungen des Verf.

ganzzahlige, sondern auch eine primitive Reziproke<sup>5)</sup> besitzen. Die übrigen Formen zeigen nämlich ein irreguläres Verhalten, sie entsprechen genau den Moduln, deren Komplement (im Dedekindschen Sinne) nicht umkehrbar ist.

Wenn man eine Form  $G$  als Grundform fest auswählt, so kann man die sämtlichen Substitutionen  $S$  von positiver Determinante betrachten, welche  $G$  in  $mF$  transformieren, wo  $m$ , die Norm der Substitution ein positiver Zahlfaktor und  $F$  eine primitive Form mit derselben Diskriminante wie  $G$  ist. Diese Substitutionen  $S$ , deren Determinante offenbar das Quadrat der Norm sein muß, werden erzeugende Substitutionen zur Grundform  $G$  oder kurz Erzeugende genannt, und  $F$  heißt die erzeugte Form. Es ist zweckmäßig und wird im folgenden angenommen, daß man bei den sämtlichen auftretenden Formen ein bestimmtes Repräsentantensystem ( $F$ ) von einander inäquivalenten auswählt und festhält.

Bei fester Grundform  $G$  sollen die sämtlichen Erzeugenden auf Klassen verteilt werden, die ich Idealklassen nennen will, einerseits, um den Zusammenhang mit Quaternionenidealen zu betonen, andererseits, um Verwechslungen mit rechtsseitigen Substitutionsklassen  $SU$ , wo  $U$  alle unimodularen Substitutionen durchläuft, zu vermeiden. Dabei werden immer alle Erzeugenden, welche sich nur durch rechtsseitige Zusammensetzung mit einer unimodularen Substitution oder durch Multiplikation mit einem rationalen Faktor unterscheiden, zu einer Idealklasse gerechnet.

Man braucht daher die Klassenverteilung nur für primitive Erzeugende anzugeben, d. h. für solche, deren Koeffizienten ganzrationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Überdies soll aber vorläufig die Norm  $m$  prim zur Formendiskriminante  $\Delta$  vorausgesetzt werden.

Nimmt man zunächst die Elementarteiler paarweise gleich, also zu  $1, 1, m, m$  an, so zeigt sich, daß jede solche Substitution  $S$  zusammen mit allen  $SU$  eindeutig einen Kongruenzwert  $k$ ,  $(2m)$  bestimmt, welcher der Kongruenz  $\Delta \equiv k^2$ ,  $(4m)$  genügt. Bei den kompositionsfähigen Formen ist  $\Delta = d^2$  ein Quadrat. Für jede in  $m$  enthaltene Primzahlpotenz  $p^\pi$  gilt also entweder  $k \equiv +d$  oder  $k \equiv -d$ ,  $(2p^\pi)$ . Im ersten Fall schreiben wir der erzeugenden Substitution in bezug auf  $p$  einen positiven, im zweiten Fall einen negativen Charakter zu. Verhalten sich alle Primzahlen aus  $m$  gleichartig, so heißt  $S$  von positivem bzw. negativem Charakter.

Hat man nun eine beliebige primitive Erzeugende  $S$ , mögen die Elementarteiler paarweise gleich sein oder nicht, so kann man sie in eindeutiger Weise (abgesehen von beliebigem rechts zugefügten unimodularen Substitutionen) in

<sup>5)</sup> Als Reziproke der Form  $F$  wird die Form  $\tilde{F}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$  bezeichnet, für die  $a_{ik} = \frac{1}{d} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}}$ . Die Diskriminante ist ebenfalls  $\Delta = d^2$ .

eine Erzeugende  $S_1$  mit der Norm  $m_1$  mit positivem Charakter und eine Erzeugende  $S_2$  mit der Norm  $m_2$  mit negativem Charakter aufspalten. Dabei ist  $m_1 m_2 = m$  die Norm von  $S$ . Die Substitutionen  $S_1$  und  $S_2$  sind teilerfremd, d. h. die Determinanten der rechteckigen Matrix  $S_1 | S_2$ , die durch Nebeneinandersetzen von  $S_1$  und  $S_2$  entsteht, haben keinen gemeinsamen Teiler, dagegen können die Normen  $m_1$  und  $m_2$  beliebige gemeinsame Teiler haben.  $S$  ist kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $S_1$  und  $S_2$ .

Sind umgekehrt die primitiven Erzeugenden  $S_1$  und  $S_2$  mit den zu  $\Delta$  primen Normen  $m_1$  und  $m_2$  beliebig vorgegeben, nur  $S_1$  von positivem,  $S_2$  von negativem Charakter, so sind  $S_1$  und  $S_2$  von selbst teilerfremd, und es gibt eine eindeutig bis auf rechtsseitige unimodulare Substitutionen bestimmte Erzeugende  $S$  mit der Norm  $m = m_1 m_2$ , so daß  $S$  kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $S_1$  und  $S_2$  ist und wieder in die Komponenten  $S_1$  und  $S_2$  gespalten werden kann.

Ist  $G$  Normenform einer Ordnung  $\mathfrak{o}$ , so sind die Erzeugenden zur Grundform  $G$  identisch mit den Basismatrizen derjenigen Moduln, deren in bezug auf  $\mathfrak{o}$  gebildete Determinante das Quadrat der Norm ist<sup>4)</sup>. Sie können zweckmäßig als Ideale von  $\mathfrak{o}$  bezeichnet werden. Den primitiven Erzeugenden entsprechen die in  $\mathfrak{o}$  liegenden primitiven Ideale. Sie sind dadurch charakterisiert, daß in  $\mathfrak{o}$  kein ganzrationaler Faktor abgespalten werden kann. Im besonderen entsprechen den Erzeugenden  $S_1$  von positivem Charakter die primitiven zur Diskriminante primen Rechtsideale  $\mathfrak{a}_1$  von  $\mathfrak{o}$ , für die  $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1$  gilt, und den Erzeugenden  $S_2$  von negativem Charakter entsprechen die primitiven zur Diskriminante primen Linksideale  $\mathfrak{a}_2$  von  $\mathfrak{o}$ , für die  $\mathfrak{o} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2$  gilt. Die Aufspaltung beliebiger primitiver Erzeugender mit zur Diskriminante primen Norm besagt, daß ein beliebiges primitives zur Diskriminante primes in  $\mathfrak{o}$  liegendes Ideal  $\mathfrak{a}$  in eindeutiger Weise als Produkt  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$  eines Rechtsideals  $\mathfrak{a}_1$  aus  $\mathfrak{o}$  mit einem Linksideal  $\mathfrak{a}_2$  aus  $\mathfrak{o}$  dargestellt werden kann.

Diese Deutung ist aber, wie gesagt, nur möglich, wenn  $G$  Normenform einer Ordnung ist<sup>4)</sup>, was nicht der Fall zu sein braucht. Die allgemeinere Betrachtungsweise kann aber nicht entbehrt werden, selbst wenn man nur Idealtheorie treiben will. Im besonderen ist sie für den zu beweisenden Satz erforderlich.

Um nun auf die Idealklasseneinteilung zurückzukommen, so zeigt die Aufspaltung, daß es genügt, nur die Erzeugenden von positivem und negativem Charakter auf Idealklassen zu verteilen. Für diese ergibt sich nun eine endliche Anzahl von je  $h$  einseitigen Idealklassen, somit für die sämtlichen Erzeugenden durch Überschneidung eine Einteilung auf  $h^2$  Idealklassen.

Dieser Einteilung entspricht eine Verteilung der erzeugten Formen auf ebenfalls  $h^2$  Formenklassen oder was dasselbe besagt, eine bestimmte Bezeichnung der Formen des Systems ( $F$ ) durch  $F_{ik}$ , wobei im allgemeinen

dieselbe Form  $F$  mehrfach auftreten kann. Diese Einteilung ist im ganzen genommen unabhängig von der Auswahl der Grundform<sup>6)</sup>. Nimmt man eine Hauptform  $H$  als Grundform, d. h. eine solche, welche Normenform einer Ordnung ist, und wählt die Bezeichnung so, daß  $F_{i1}$  Hauptformen,  $F_{i2}$  und  $F_{i3}$  Paare entgegengesetzter Formen sind, was dadurch bewirkt wird, daß man die beiden Arten von einseitigen Idealklassen der Erzeugenden in naturgemäßer Weise paarweise zusammenfaßt und gleich numeriert, so gibt das Schema der  $F_{ik}$  gleichzeitig die sämtlichen möglichen Kompositionen an, es sind das nämlich alle und nur die in der Formel  $F_{i1}F_{jk} = F_{ik}$  enthaltenen.

Ich komme jetzt zu einer anderen Zerlegung der Erzeugenden, bei der es sich einfach um Produkte im Sinne der Matrixmultiplikation handelt. Wir betrachten alle ganzzahligen Erzeugenden, deren primitiver Bestandteil positiven Charakter hat und die sämtlich zu einer einseitigen Idealklasse gehören. Da die erzeugten Formen dann zu einer Formenklasse gehören und die Formen aus dem System ( $F$ ) genommen werden sollen, so ist die erzeugte Form fest. Dann zeigen Betrachtungen, die denen in Math. Ann. 99, S. 24 analog sind<sup>7)</sup>, daß man für diese Erzeugenden  $S$  eine Parameterdarstellung angeben kann  $s_{ik} = s_{i0k}x_0 + s_{i1k}x_1 + s_{i2k}x_2 + s_{i3k}x_3$ , die für ganzzahlige Parameterwerte  $x_j$  und nur für diese ganzzahlige Substitutionen und auch diese sämtlich und jede nur einmal liefert. (Allerdings sind darunter auch solche, deren Norm nicht prim zur Diskriminante ist.)

Die Norm der allgemeinen Substitution  $S$  stellt selbst eine quadratische Form  $Q$  vor, deren Darstellungen  $Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = m$  im besonderen die sämtlichen Erzeugenden der Norm  $m$  liefern. Für diese Form  $Q$  besteht überdies die Komposition  $QF = G$ . Wenn auch alle durch die Parameterdarstellung gegebenen Substitutionen verschieden sind, so kann es doch vorkommen, daß zwei sich nur durch eine rechtsseitige unimodulare Substitution unterscheiden, die natürlich automorph für die erzeugte Form  $F$  sein muß. Man erkennt, daß das gerade so oft eintritt, wie die Hauptform  $H'$ , welche rechts zu  $Q$  und links zu  $F$  gehört, Einsdarstellungen besitzt. Bezeichnet man die Anzahl der eigentlichen und uneigentlichen Darstellungen  $Q = m$  durch  $Q(m)$ , so gibt also der Quotient  $Q(m)/H'(1)$  an, wieviel inäquivalente Erzeugende der Norm  $m$  in einer Idealklasse liegen<sup>8)</sup>.

Diese Beziehungen werden noch durchsichtiger, wenn man die Formen nach ihrer Stellung in dem erwähnten quadratischen Schema bezeichnet.

<sup>6)</sup> D. h. verschiedene Einteilungen können durch Permutation der Indizes ineinander übergeführt werden.

<sup>7)</sup> Aus der unter <sup>4)</sup> genannten Abhandlung.

<sup>8)</sup> Vom Formenstandpunkt aus wird man diese Anzahl, d. h. die Anzahl der Darstellungen einer Zahl  $m$  durch eine vorgelegte Form dividiert durch die Anzahl der Einsdarstellungen der rechts zugehörigen Hauptform als reduzierte Darstellungszahl bezeichnen.

Wegen der Komposition  $QF = G$  kann man  $Q$  und  $G$  gleiche vordere,  $F$  und  $G$  gleiche hintere Indizes geben, so daß man  $G$  durch  $F_{ii}$ ,  $Q$  durch  $F_{jk}$  und  $F$  durch  $F_{ki}$  bezeichnen kann. Die Hauptform  $H$ , der  $F$  und  $G$  rechts angehören, ist dann  $F_{ii}$ , und die Hauptform  $H'$ , der  $Q$  und  $H$  links zugehören, ist dann  $F_{jk}$ .

Somit wird die oben bestimmte Anzahl  $F_{jk}(m)/F_{kk}(1)$ . Nimmt man statt der Grundform  $G = F_{ii}$  die Hauptform  $H = F_{ii}$ , so ergibt sich ebenso  $F_{jk}(m)/F_{kk}(1)$ .

Unter dieser letzten Annahme soll jetzt die Norm  $m$  in zwei teilerfremde Faktoren  $m_1$  und  $m_2$  zerlegt werden, so daß also  $m = m_1 m_2$ . Entsprechend ist dann  $S = T_1 T_2$ , wo  $T_1, T_2$  erzeugende Substitutionen mit den Normen  $m_1$  und  $m_2$  sind (natürlich zu verschiedenen Grundformen), und ihre primitiven Bestandteile haben positiven Charakter<sup>9)</sup>.  $T_1$  ist bis auf rechtsseitige unimodulare Substitutionen eindeutig bestimmt und soll so gewählt werden, daß die erzeugte Form dem System  $(F)$  angehört. Da die Grundform  $F_{ii}$  ist, kann sie durch  $F_{ii}$  bezeichnet werden. Ist umgekehrt  $T_1$  eine beliebige ganzzahlige Erzeugende zur Grundform  $F_{ii}$  mit der Norm  $m_1$  und der erzeugten Form  $F_{ji}$  und  $T_2$  mit der Norm  $m_2$  eine ganzzahlige Erzeugende zur Grundform  $F_{ji}$  und der erzeugten Form  $F_{ki}$ , so wird  $S = T_1 T_2$  eine Erzeugende zur Grundform  $F_{ii}$  mit der Norm  $m = m_1 m_2$  und der erzeugten Form  $F_{ki}$ , und der primitive Bestandteil von  $S$  wird positiven Charakter haben, wenn das für die primitiven Bestandteile von  $T_1$  und  $T_2$  gilt.

Um in der Form  $S = T_1 T_2$  Repräsentanten aller verschiedenen Rechtsklassen zu erhalten, ist es offenbar unnötig, neben  $T_2$  auch  $T_2 U_2$  zu betrachten, wo  $U_2$  eine Automorphe der durch  $T_2$  erzeugten Form ist. Somit braucht  $T_2$  nur untereinander inäquivalente Substitutionen zu durchlaufen. Dasselbe gilt aber für  $T_1$ , denn wenn man  $T_1$  durch  $T_1 U_1$  ersetzt, wo  $U_1$  eine Automorphe der durch  $T_1$  erzeugten Form ist, so kann man  $U_1$  auch zu  $T_2$  ziehen. Die Substitution  $U_1 T_2$  gehört aber selbst zu den Substitutionen  $T_2$  und ist somit bereits berücksichtigt.

Beschränkt man  $T_1$  zunächst auf eine Idealklasse, so wird die Anzahl der inäquivalenten  $T_1$ , wie oben gezeigt, durch die Formel  $F_{ji}(m)/F_{jj}(1)$  gegeben. Wenn  $S$  und  $T_1$  auf je eine Idealklasse beschränkt bleiben, so gilt das aber notwendig auch von  $T_2$ . Die Anzahl der rechtsseitig inäquivalenten  $T_2$  wird aber durch  $F_{jk}(m)/F_{kk}(1)$  gegeben. Läßt man  $T_1$  alle möglichen Idealklassen durchlaufen, so erhält man für die rechtsseitig inäquivalenten  $S$  eine zweite Abzählung und somit die Formel

$$\frac{F_{ik}(m)}{F_{kk}(1)} = \sum_j \frac{F_{ji}(m_1)}{F_{jj}(1)} \cdot \frac{F_{jk}(m_2)}{F_{kk}(1)}.$$

<sup>9)</sup> Vgl. die Abhandlung des Verf.: Über die Komponierbarkeit quaternärer quadratischer Formen. Math. Annalen 94 (1925), S. 182.

Diese Formel besagt, daß die aus den reduzierten Darstellungszahlen  $F_{ik}(m)/F_{kk}(1)$  gebildeten Matrizen  $\lambda(m)^{10)}$  der Bedingung genügen  $\lambda(m_1)\lambda(m_2) = \lambda(m_1m_2)$ , wenn  $m_1$  und  $m_2$  zur Diskriminante und auch untereinander prim sind. Deswegen ist gleichzeitig unter denselben Bedingungen  $\lambda(m_1)\lambda(m_2) = \lambda(m_2)\lambda(m_1)$ .

Die Formeln behalten ihre Gültigkeit, wenn  $m_1$  und  $m_2$  nur untereinander, aber nicht notwendig zur Diskriminante prim sind. Das beruht darauf, daß die Parameterdarstellung für die Erzeugenden einer einseitigen Idealklasse ohne jede Einschränkung gilt. Darauf beruhen aber die Abzählungsformeln und die darauf gegründeten Betrachtungen.

Läßt man dagegen die andere Voraussetzung fallen, daß  $m_1$  und  $m_2$  untereinander prim sein sollen, so ergeben weitere Untersuchungen die Gültigkeit der Formel

$$\lambda(m_1)\lambda(m_2) = \sum_t \lambda\left(\frac{m_1m_2}{t}\right) \cdot t,$$

wo über alle gemeinsamen Teiler  $t$  von  $m_1$  und  $m_2$  summiert wird.

Endlich sind  $\lambda(m_1)$ ,  $\lambda(m_2)$  gewiß vertauschbar, wenn  $m_1$ ,  $m_2$  allein Primfaktoren aus der Diskriminante enthalten, weil derartige Zahlen nur durch ambige Formen ( $F_{ik} = F_{ki}$ ) dargestellt werden können.

Aus diesen gemeinsamen Überlegungen folgt endlich, daß die Matrizen  $\lambda(m)$  allgemein untereinander vertauschbar sind.

Was nun das Eulerprodukt anbetrifft, so ist dieses natürlich von der Struktur des betrachteten Formensystems abhängig. Für Stammformen oder für maximale Ordnungen ist es aber allein durch die in der Diskriminante enthaltenen Primzahlen bestimmt.

<sup>10)</sup> Es ist also das Element  $\lambda_{ik}(m)$  der Matrix  $\lambda(m)$  die reduzierte Darstellungszahl der Zahl  $m$  durch die Form  $F_{ik}$ . Man vergleiche dazu <sup>8)</sup>.

# Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik.

Von

Eberhard Hopf in Leipzig.

Im folgenden wird eine zähe inkompressible Flüssigkeit betrachtet. Sie wird, obwohl das nicht wesentlich ist, als homogen vorausgesetzt. Sie erfülle ein beschränktes Gebiet  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(t)$  des Raumes, dessen Rand  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(t)$  aus endlich vielen geschlossenen, in irgendwie vorgeschriebener Weise starr bewegten Flächen  $\mathfrak{R}$ , besteht (bewegte starre Körper in einem bewegten, flüssigkeitserfüllten Gefäß). Die verschiedenen  $\mathfrak{R}$ , sollen dabei eine positive Mindestdistanz  $\delta$  voneinander wahren. Die Flächen werden als viermal stetig differenzierbar angenommen. Auf  $\mathfrak{R}$  soll die Geschwindigkeit stetig in die des Randes übergehen (die Flüssigkeit haftet an der Wand). Wir setzen zunächst voraus, daß auf die Flüssigkeit keine äußere Massenkraft wirkt.

*Hauptvoraussetzung. Dreh- und Translationsgeschwindigkeit jeder der starr bewegten Randflächen sowie ihre ersten Zeitableitungen (Beschleunigungen) seien stetig und für alle Zeiten absolut unter einer festen Schranke  $\omega$  gelegen<sup>1)</sup>.*

Mit  $x = (x_1, x_2, x_3)$  sind im folgenden die Punkte in  $\mathfrak{G}$ , mit  $u = u(x, t)$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen bezeichnet. Wir machen von der Vereinbarung, über einen Term zu summieren, Gebrauch, wenn in demselben ein Index doppelt auftritt. Wir setzen

$$K(u) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathfrak{G}(t)} u_i u_i dV; \quad dV = dx_1 dx_2 dx_3,$$

für die kinetische Energie und

$$\tilde{I} = \int_t^{t+1} I dt, \quad I = I(u) = \iiint_{\mathfrak{G}(t)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV.$$

Unter den obigen Voraussetzungen wird in dieser Arbeit ein Endlichkeitssatz für die Flüssigkeitsbewegungen (§ 1) bewiesen. Eine Folgerung aus ihm ist der

**Satz.** *Es lassen sich zwei Schranken  $\kappa^*$ ,  $\varrho^*$  angeben, welche ausschließlich von der Beschaffenheit der Randflächen, von  $\delta$ ,  $\omega$  und vom Zähigkeitskoeffizienten*

<sup>1)</sup> Wir nehmen außerdem an, daß  $\mathfrak{G}(t)$  in einer festen Kugel des Raumes verbleibt.

$\mu > 0$  abhängen, derart, daß bei einer beliebigen Flüssigkeitsbewegung  $u(x, t)$  in  $\mathfrak{G}(t)$  von einem passenden Moment ab stets

$$K < \kappa^*, \quad I < \varrho^*$$

gilt.

Der Endlichkeitssatz ist ein universelles Theorem der Hydromechanik. Er muß mutatis mutandis auch bei anderen hydrodynamischen Problem- anordnungen gelten, wofern eine der obigen Hauptvoraussetzung analoge Voraussetzung erfüllt ist. Im folgenden (§ 4) wird er auch für die Strömung in einem unendlichen Kanal bewiesen, unter der Voraussetzung, daß der Querschnittsfluß  $Q(t)$  und  $dQ(t)/dt$  beschränkt sind. Der Satz bleibt bestehen, wenn auf die Flüssigkeitsteile eine äußere Massenkraft  $X(x, t)$ ,  $X = (X_1, X_2, X_3)$  wirkt, vorausgesetzt, daß

$$\iiint_{\mathfrak{G}} X^2 dV$$

für alle  $t$  beschränkt bleibt.

Die Bedeutung des Endlichkeitssatzes für die Hydrodynamik im Großen, die Lehre vom Strömungsverlauf für  $t \rightarrow \infty$ , liegt auf der Hand. Der Satz leistet hier Ähnliches wie das Energieintegral mit geschlossenen Energieflächen bei einem konservativen System. Im Gebiete  $K < \kappa$ ,  $I < \varrho$  des Phasenraumes muß sich schließlich das hydrodynamische Geschehen abspielen. In diesem Gebiete müssen insbesondere die stabilen Mannigfaltigkeiten von Zentralbewegungen enthalten sein, welche den in der Natur vorwiegend beobachteten Strömungen der Flüssigkeit entsprechen, und deren Bestimmung als wichtigstes Problem der Hydromechanik anzusehen ist.

Die durch den Beweis gelieferten Schranken  $\kappa$ ,  $\varrho$  wachsen, als Funktionen von  $\mu$  allein betrachtet, für  $\mu \rightarrow 0$  über alle Grenzen. Dies dürfte im Wesen der Sache liegen. Für die ideale Flüssigkeit ( $\mu = 0$ ) ist auch das Bestehen eines analogen Satzes nicht zu erwarten.

## § 1.

### Der Endlichkeitssatz. Erster Teil des Beweises.

Mit  $\mathfrak{h}(x, t)$ ,  $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, h_3)$ ,  $h_i = h_i(x_1, x_2, x_3, t)$ , sei ein Vektorfeld in  $\mathfrak{G}(t)$  mit folgenden Eigenschaften bezeichnet. Die  $t$ -Ableitungen erster und die  $x$ -Ableitungen erster und zweiter Ordnung seien stetige Funktionen von  $x, t$ , und zwar in dem von  $\mathfrak{G}(t)$  erzeugten Raumzeitgebiete  $t \geq 0$ , und auf seinem Rande.  $\mathfrak{h}$  soll dieselben linearen Bedingungen wie  $u$  befriedigen, d. h.

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0$$

in  $\mathfrak{G}$  und die Bedingung des Haftens auf  $\mathfrak{R}(t)$ .

**Endlichkeitssatz.** Es lassen sich ein Feld  $\mathfrak{h}(x, t)$  und zwei Schranken  $\kappa, \varrho$  mit folgenden Eigenschaften angeben.  $\mathfrak{h}, \kappa, \varrho$  hängen ausschließlich von der Beschaffenheit der Randflächen, von  $\delta, \omega$  und  $\mu$  ab.  $h_i, \partial h_i / \partial x_r, \partial h_i / \partial t$  sind beschränkte Funktionen von  $x, t$ . Für eine beliebige Flüssigkeitsströmung in  $\mathfrak{G}(t)$  gibt es einen Moment, von dem ab stets

$$(1.2) \quad K(u - \mathfrak{h}) < \kappa, \quad I(u - \mathfrak{h}) < \varrho$$

gilt. Gilt die erste dieser Ungleichungen in irgendeinem Zeitpunkt, so gelten sie und die zweite Ungleichung von ihm ab dauernd.

Der in der Einleitung formulierte schwächere Satz folgt hieraus, aus den Dreiecksungleichungen

$$(1.3) \quad \sqrt{K(u)} \leq \sqrt{K(\mathfrak{h})} + \sqrt{K(u - \mathfrak{h})}, \quad \sqrt{I(u)} \leq \sqrt{I(\mathfrak{h})} + \sqrt{I(u - \mathfrak{h})}$$

und aus der Beschränktheit der Zeitfunktionen  $K(\mathfrak{h})$  und  $I(\mathfrak{h})$ .

Erster Teil des Beweises<sup>2)</sup>. Die Geschwindigkeit  $u(x, t)$  genügt in  $\mathfrak{G}$  der Bedingung

$$(1.4) \quad \operatorname{div} u \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

und den Navier-Stokes-Gleichungen

$$(1.5) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_i}{\partial x_r} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i; \quad i = 1, 2, 3,$$

wo  $\mu > 0$  den kinematischen Zähigkeitskoeffizienten der Flüssigkeit bedeutet. Wir stellen an die Lösung  $u(x, t), t \geq 0$ , im folgenden dieselben Anforderungen hinsichtlich Differenzierbarkeit und Stetigkeit wie am Anfang dieses Paragraphen an  $\mathfrak{h}(x, t)$ <sup>3)</sup>. Der Druck  $p(x, t)$  sei in  $\mathfrak{G}$  eindeutig.

$v = u - \mathfrak{h}$  erfüllt dann die homogenen linearen Bedingungen, welche zu der für  $u$  (und  $\mathfrak{h}$ ) vorgeschriebenen linearen Bedingungen gehören,

$$(1.6) \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{in } \mathfrak{G}$$

und

$$(1.7) \quad v = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{R},$$

<sup>2)</sup> Die für den Beweis nötigen Überlegungen finden sich im wesentlichen schon in der folgenden Arbeit. J. Leray, *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique*. Journ. de Math. 12 (1933), S. 1–82. Vgl. insbesondere S. 21–47. Der Verf. verfolgt mit ihnen jedoch ein viel engeres Ziel, nämlich die Bestimmung von Schranken von  $K$  und  $I$  für stationäre Strömungen in einem festen Gebiet  $\mathfrak{G}$ , auf dessen Rand  $u = u(x)$  vorgeschrieben ist.

<sup>3)</sup> Der zweckmäßigste mathematische Begriff der Flüssigkeitsströmung muß, wie die Untersuchungen von Leray zeigen, zweifellos weiter gefaßt werden. Die Durchführung des Beweises auf Grund desselben kann aber erst dann geschehen, wenn diese wichtigen Arbeiten abgeschlossen sind.

und befriedigt in  $\mathfrak{G}$  die Gleichungen

$$(1.8) \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + u_r \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \\ = \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_r \frac{\partial h_i}{\partial x_r} + \mu \Delta v_i - \frac{\partial h_i}{\partial t} - h_r \frac{\partial h_i}{\partial x_r} + \mu \Delta h_i.$$

Die Zeitableitung von

$$K(v) = K(u - h) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathfrak{G}} v_i v_i dV$$

kann mit Rücksicht auf die Strömungsinvarianz von  $dV$  durch substantielles Differenzieren hinter dem Integralzeichen gebildet werden. Setzt man dann (1.8) ein und integriert man unter Beachtung von (1.7) und (1.6) in zwei Termen partiell, so ergibt sich die „Energiegleichung“

$$(1.9) \quad \frac{dK(v)}{dt} = Q(v) - \mu I(v) + L(v),$$

wo  $Q$  und  $I$  quadratische Formen in  $v$  sind,

$$(1.10) \quad Q(v) = - \iiint_{\mathfrak{G}} v_i v_r \frac{\partial h_i}{\partial x_r} dV$$

( $I$  siehe Einleitung), und

$$(1.11) \quad L(v) = - \iiint_{\mathfrak{G}} v_i \left( \frac{\partial h_i}{\partial t} + h_r \frac{\partial h_i}{\partial x_r} - \mu \Delta h_i \right) dV$$

eine Linearform in  $v$  darstellt.  $K$  und  $I$  sind positiv definit.

In dem Spezialfalle eines festen Gebietes  $\mathfrak{G}$ ,  $u = 0$  auf  $\mathfrak{G}$ , ist alles trivial. Die kinetische Energie wird allmählich durch die Reibung aufgezehrt. Man kann  $h = 0$ , also  $Q = L = 0$  wählen und man entnimmt dem Beweise am Schluß von § 2, daß  $\kappa$  und  $\varrho$  beliebig klein angesetzt werden können. Es ist aber ganz allgemein richtig, daß soviel von  $K$  durch Reibung aufgezehrt wird, daß nur ein a priori angebbarer Höchstteil übrigbleiben kann. In § 2 wird gezeigt, daß das Hilfsfeld  $h(x, t)$  so gewählt werden kann, daß  $h_i$ ,  $\partial h_i / \partial t$ ,  $\partial h_i / \partial x_r$ ,  $\Delta h_i$  beschränkte Funktionen von  $x, t$  sind, und daß die quadratische Form  $Q - \mu I$  negativ definit wird. Die Behauptung betreffs  $K$  wird sich dann aus (1.9) ergeben, und daraus, daß für großes  $K$  die Linearform  $L$  unwesentlich wird.

## § 2.

## Die Leraysche Ungleichung. Das Hilfsfeld.

Für eine beliebige, in  $\mathfrak{G}$  einmal stetig derivierbare, in  $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$  stetige und auf  $\mathfrak{R}$  verschwindende Funktion  $v(x)$  gilt die Leraysche Ungleichung<sup>4)</sup>

$$(2.1) \quad \iiint_{\mathfrak{G}} \left(\frac{v}{s}\right)^2 dV \leq C \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dV,$$

wo mit  $s = s(x)$  die Entfernung des Punktes  $x$  vom Rande  $\mathfrak{R}$  bezeichnet ist, und wo die Konstante  $C$  nur von der Beschaffenheit der Randflächen und von  $\delta$  abhängt (also nicht von  $t$ ).

Beweis. Für jede in  $0 \leq s \leq a$  stückweise stetig differenzierbare Funktion  $f(s)$  mit  $f(0) = 0$  gilt

$$(2.2) \quad \int_0^a \left(\frac{f(s)}{s}\right)^2 ds \leq 4 \int_0^a (f'(s))^2 ds.$$

Dies folgt durch partielle Integration links

$$-\frac{f^2(a)}{a} + 2 \int_0^a \frac{f(s)}{s} f'(s) ds$$

und durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf das neue Integral. An der Stelle  $s = 0$  ist die Existenz von  $f'(s)$  entbehrlich, und es genügt die Stetigkeit von  $f(s)$ . Man erkennt dies, wenn man links in (2.2) im Nenner  $s + \varepsilon$  statt  $s$  schreibt und nach Durchführung  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen läßt.

Hier und im folgenden sei mit  $\mathfrak{G}_a = \mathfrak{G}_a(t)$  die Menge derjenigen Punkte von  $\mathfrak{G}(t)$  bezeichnet, deren Entfernung  $s$  vom Rande  $\leq a$  ist. Wir rechnen alle Randpunkte zu  $\mathfrak{G}_a$  hinzu. Wegen der über den Rand gemachten Voraussetzungen kann  $a > 0$  für alle  $t$  so gewählt werden, daß jeder Punkt von  $\mathfrak{G}_a$  ein und nur ein Lot der Länge  $s \leq a$  auf  $\mathfrak{R}$  besitzt. Das Volumenelement in  $\mathfrak{G}_a$  kann in der Form

$$(2.3) \quad dV = k d\sigma ds$$

geschrieben werden, wo  $d\sigma$  das Flächenelement der Fußpunkte auf  $\mathfrak{R}$  bedeutet, und wo  $k$  zwischen positiven Grenzen  $\gamma$ ,  $\Gamma$  variiert. Die Ungleichung (2.1) ergibt sich nun für das Gebiet  $\mathfrak{G}_a$  leicht aus (2.2) mit Hilfe von (2.3),  $C = 4\Gamma/\gamma$ .

$\mathfrak{R}$  sei nun ein Kugelschalengebiet mit festen (von  $t$  unabhängigen) Abmessungen, welches  $\mathfrak{G}$  im Innern enthält und mit der äußeren Randfläche

<sup>4)</sup> Vgl. Leray, l. c. <sup>3)</sup>, S. 38.

von  $\mathfrak{G}$  starr verbunden ist. Man setze  $v$  durch  $v = 0$  in  $\mathfrak{R} - \mathfrak{G}$  hinein fort. Durch Anwendung von (2. 1) auf das Gebiet  $\mathfrak{R}$  ergibt sich leicht

$$(2. 4) \quad \iiint_{\mathfrak{G}} v^2 dV \leq C_1 \iiint_{\mathfrak{G}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dV,$$

wo die Konstante  $C_1$  nur vom Durchmesser der äußeren Randfläche, also des Gebietes  $\mathfrak{G}$ , abhängt. Aus (2. 4) folgt, was später von Nutzen ist,

$$(2. 5) \quad K(v) \leq C_1 I(v).$$

Durch Kombination von (2. 1), mit  $\mathfrak{G}_s$  statt  $\mathfrak{G}$ , und (2. 4) ergibt sich (2. 1) leicht für ganz  $\mathfrak{G}$ .

Konstruktion des Feldes  $h^s$ ). Für den Beweis des Endlichkeitssatzes ist es entscheidend, daß für beliebig vorgegebenes  $\varepsilon > 0$   $h(x, t)$  so gebildet werden kann, daß für alle  $x$  und  $t$

$$(2. 6) \quad \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \right| < \varepsilon s^{-2}$$

ausfällt;  $s$  ist wie oben der Abstand von  $x$  von  $\mathfrak{R}$ . Gleichzeitig bleiben

$$(2. 7) \quad |h_i|, \quad \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \right|, \quad |A h_i|, \quad \left| \frac{\partial h_i}{\partial t} \right|$$

unter festen, von  $x, t$  unabhängigen Schranken. Wir werden für diese Größen Schranken der Form

$$(2. 7') \quad (C_2 + \varepsilon C_3) \exp \frac{C_4}{\varepsilon}$$

erhalten, wo die  $C_i$  ausschließlich von der Beschaffenheit der Randflächen und von  $\delta, \omega$  abhängen (also nicht von  $\varepsilon$ ).

Beweis. Die auf  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(t)$  vorgeschriebene Geschwindigkeit der Wand läßt sich in der Form

$$(2. 8) \quad u = \text{rot } q \text{ auf } \mathfrak{R}$$

schreiben, wo  $q = q(x, t)$  ein in  $\mathfrak{G}_s(t)$  folgendermaßen definiertes Vektorfeld ist. Die Geschwindigkeit der starr bewegten Randfläche  $\mathfrak{R}_i$  ist

$$(2. 9) \quad u = x \times a_i + b_i,$$

( $x$  = Ortsvektor  $x$ ), wo  $a_i(t)$  die Dreh- und  $b_i(t)$  die Translationsgeschwindigkeit bedeuten. Man rechnet leicht aus, daß (2. 9) gleich rot von

$$(2. 10) \quad \frac{1}{2} (-x^2 a_i + x \times b_i)$$

ist. Definiert man  $q$  durch (2. 10) in dem an  $\mathfrak{R}_i$  angrenzenden Teile von  $\mathfrak{G}_s$ , so gilt (2. 8). Nach der Hauptvoraussetzung sind die Ableitungen der Kom-

<sup>\*)</sup> In dem von Leray, l. c. <sup>2)</sup>, S. 40, 43, 44 angestellten Betrachtungen ist der Grundgedanke bereits implizit enthalten.

ponenten  $q$ , nach  $x$  und  $t$ , nach  $t$  höchstens einmal genommen, absolut unter festen Schranken  $\text{const} \cdot \omega$  gelegen.

$\varphi(x, t)$  sei nun eine skalare Funktion in  $\mathfrak{G} + \mathfrak{H}$  derart, daß  $\varphi, \varphi'_s, \varphi''_{xx}, \varphi'''_{xxx}, \varphi'_t, \varphi'_{xt}$  in dem von  $\mathfrak{G}(t)$  erzeugten Raumzeitgebiete und auf seinem Rande stetig sind. Sie genüge den Bedingungen

$$\text{A)} \quad \varphi = 1, \quad \varphi'_s = 0 \text{ auf } \mathfrak{H},$$

$$\text{B)} \quad \varphi = 0 \text{ in } \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_a.$$

Das Feld

(2. 11)

$$\mathfrak{h} = \text{rot } \varphi q$$

erfüllt dann sämtliche, im ersten Absatz von § 1 an  $\mathfrak{h}$  gestellten Forderungen. Wegen  $\text{div rot} \equiv 0$  gilt (1. 1), und wegen A) genügt  $\mathfrak{h}$  auf  $\mathfrak{H}$  der Haftbedingung. Außerdem gilt  $\mathfrak{h} = 0$  in  $\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_a$ . Wir wählen  $\varphi$  in der Form  $\varphi(s)$ , wo  $s$  wie oben den Abstand des Punktes  $x$  von  $\mathfrak{H}$  bedeutet.  $\varphi(s)$  sei für alle  $s \geq 0$  mit stetigem  $\varphi'''$  versehen und erfülle die Bedingungen

$$\text{A')} \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0,$$

$$\text{B')} \quad \varphi(s) = 0, \quad s \geq a.$$

Um zu zeigen, daß  $\varphi(x, t) = \varphi(s(x, t))$  allen obigen Forderungen genügt, braucht man nur zu zeigen, daß  $s(x, t)$  die von  $\varphi$  verlangten Eigenschaften der stetigen Derivierbarkeit in dem von  $\mathfrak{G}_a(t)$  erzeugten Raumzeitgebiet und auf seinem Rand besitzt.

Nach Voraussetzung hängen auf  $\mathfrak{H}$  die  $x_i(\alpha, \beta)$  viermal stetig derivierbar von gewissen Parametern  $\alpha, \beta$  ab. Die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  eines Punktes in  $\mathfrak{G}_a$  sind also dreimal stetig nach  $\alpha, \beta, s$  derivierbar. Da nach (2) die Funktionaldeterminante  $k \sqrt{EG - F^2} \neq 0$  ist, gilt Analoges von den Umkehrfunktionen, also von  $s(x, t)$  bei festem  $t$ . In einem mit der betrachteten Randfläche  $\mathfrak{H}$  starr verbundenen  $y$ -Bezugssystem ist nun  $s = s(y)$ , wobei die  $x_i$  inhomogene lineare Funktionen der  $y$ , sind, deren Koeffizienten, nach  $t$  differenziert, Komponenten von  $a_j(t)$  und  $b_j(t)$  sind. Daraus folgt die Behauptung bezüglich  $s(x, t)$ . Gleichzeitig erkennt man mit Rücksicht auf die Hauptvoraussetzung, daß die Größen (2. 7) für alle  $x, t$  beschränkt sind.

Wir setzen nun

$$(2. 12) \quad \varphi(s) = \frac{\int_s^1 \frac{1}{p} \varphi\left(\frac{s}{p}\right) dp}{\int_s^1 \frac{1}{p} dp},$$

$0 < \vartheta < 1$ . Dabei sei  $\psi(s)$ ,  $s \geq 0$ , eine feste Funktion mit stetigem  $\psi''$  und mit den Eigenschaften A') und B'), z. B.

$$(2.13) \quad \psi(s) = \begin{cases} \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)^4, & s \leq a, \\ 0, & s \geq a. \end{cases}$$

$\varphi(s)$  besitzt dann offenbar dieselben Eigenschaften. Man findet ferner

$$\varphi''(s) = \frac{1}{\log \frac{1}{\vartheta}} \int_s^1 \frac{1}{p^3} \psi''\left(\frac{s}{p}\right) dp = \frac{s^{-3}}{\log \frac{1}{\vartheta}} \int_1^{s^{-1}} \sigma \psi''(\sigma) d\sigma,$$

also

$$(2.14) \quad |\varphi''(s)| < \varepsilon s^{-2},$$

wenn

$$(2.15) \quad \varepsilon = \frac{1}{\log \frac{1}{\vartheta}} \int_0^a \sigma |\psi''(\sigma)| d\sigma$$

gesetzt wird. Zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  wird durch (2.15) ein  $\vartheta < 1$  bestimmt. Aus (2.14) folgt  $|\varphi'| < \varepsilon s^{-1}$ . Außerdem ist  $0 \leq \varphi \leq 1$ . Wegen (2.11) ergibt sich hieraus (2.6) bis auf einen konstanten Faktor  $A(\omega, \delta)$ , den man beseitigen kann, wenn man ihn schon in (2.15) berücksichtigt.

Formt man die durch Differenzieren von (2.12) erhaltenen Integrale nicht um, so erhält man direkt die Abschätzungen

$$|\varphi'| < \frac{A_1}{\vartheta \log \frac{1}{\vartheta}}, \quad |\varphi''| < \frac{A_2}{\vartheta^2 \log \frac{1}{\vartheta}}, \quad |\varphi'''| < \frac{A_3}{\vartheta^3 \log \frac{1}{\vartheta}},$$

$s \geq 0$ , wo die  $A_i$  nur von  $a$ , d. h. nur von  $\delta$  abhängen können. Drückt man  $\vartheta$  vermöge (2.15) durch  $\varepsilon$  aus, so ergeben sich wegen (2.11) leicht Schranken der Form (2.7') für (2.7).

Anmerkung. Im Sonderfalle, wo das Gebiet  $G(t)$  dauernd sich selbst kongruent bleibt, kommt man viel leichter zu einem brauchbaren Felde  $\mathfrak{h}$ . Man betrachte etwa den Fall, wo ein Rotationskörper in einem festen Gefäß um eine feste Achse rotiert;  $\mathfrak{R}$  sei die Oberfläche des Körpers. Legt man den Nullpunkt auf die Achse, so ist die Geschwindigkeit auf  $\mathfrak{R}$  gleich  $\mathfrak{x} \times a$ , wo  $a(t)$  sich selbst parallel bleibt. Mit Hilfe einer mit stetigem  $\psi''$  versehenen festen Funktion  $\psi(s)$ ,  $s \geq 0$ , mit den Eigenschaften  $\psi(0) = 1$ ;  $\psi = 0$ ,  $s \geq 1$ , setze man

$$\mathfrak{h} = \psi(s/\varepsilon) \mathfrak{x} \times a,$$

$s$  = Abstand von  $\mathfrak{R}_i$ . Da für  $s < \varepsilon$  die Stromlinien des momentanen Feldes Rotationskreise sind und die Geschwindigkeit auf ihnen tangential und konstant ist, gilt  $\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0$ . Man findet

$$(2.16) \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{h}_i}{\partial x_i} \right| < C' \varepsilon^{-1}, \quad s < \varepsilon; \quad \mathfrak{h} = 0, \quad s \geq \varepsilon.$$

Außerdem ergibt sich für  $\varepsilon < 1$

$$(2.17) \quad |\mathfrak{h}_i| < C'_1, \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{h}_i}{\partial t} \right| < C'_2, \quad |\Delta \mathfrak{h}_i| < C'_3 \varepsilon^{-2}.$$

### § 3.

#### Schluß des Beweises.

Wegen  $\sum |v_i v_i| \leq 3 v_j v_j$  folgt aus der Lerayschen Ungleichung (2.1) aus (1.10) und (2.6)

$$(3.1) \quad |Q(v)| \leq 3 C \varepsilon \cdot I(v).$$

Aus (1.11) und (2.7) in Verbindung mit den Schranken (2.7') folgt wegen der Schwarzschen Ungleichung

$$(3.2) \quad |L(v)| \leq B \cdot \sqrt{K(v)}$$

mit

$$(3.3) \quad B = (C_5 + C_6 \varepsilon) \exp \frac{C_7}{\varepsilon},$$

wo von den Konstanten  $C_i$  gleiches gilt wie früher ( $i \leq 4$ ). Setzt man  $\varepsilon = \mu/6C$ , so ergibt sich aus (1.9) die *fundamentale Differentialungleichung*

$$(3.4) \quad \frac{dK(v)}{dt} < -\frac{\mu}{2} I(v) + B \sqrt{K(v)},$$

welcher jede mögliche Strömung der Flüssigkeit in (5) (t) genügen muß.

Aus (2.5) folgt

$$\frac{dK}{dt} < -\frac{\mu}{2C_1} K + B \sqrt{K}.$$

Bezeichnet man mit  $\kappa$  denjenigen Wert von  $K$ , für welchen der zweite Term gleich der Hälfte des ersten wird,

$$(3.5) \quad \kappa = \sqrt{\frac{4BC_1}{\mu}} = \sqrt{C_8 + C_9 \mu^{-1}} \exp \frac{C_{10}}{\mu},$$

so folgt, daß für  $K \geq \kappa$  stets

$$\frac{dK}{dt} < -\frac{\mu}{4C_1} K$$

gilt,  $K$  also exponentiell abnimmt. Damit ist der auf  $K$  bezügliche Teil des Endlichkeitssatzes bewiesen. Die Behauptung betreffs  $\bar{I} = \int_1^{t+1} I dt$  folgt dann sofort aus (3.4) durch Integration. Es ergibt sich

$$\varrho = \frac{1x + 2B \cdot \sqrt{x}}{\mu}.$$

Für kleine  $\mu$  sind  $\log x$ ,  $\log \varrho$  von der Größenordnung  $\mu^{-1}$ . Für große  $\mu$  bleiben  $x$ ,  $\varrho$  beschränkt<sup>6)</sup>.

Anmerkung. Für den in der Anmerkung von § 2 erwähnten Sonderfall findet man ein  $x$ , das für  $\mu \rightarrow 0$  nur algebraisch unendlich wird. Man wende (2.1) auf das Gebiet  $s \leq \varepsilon$  an und ersetze  $s$  durch  $\varepsilon$  links im Nenner. Dann ergibt sich aus (2.16) und (2.17) für  $\varepsilon = \mu/6 CC'$  ein  $x \sim \mu^{-6}$ . Schafft man in (1.11) durch partielle Integration die zweiten Ableitungen von  $h_i$  heraus, so erhält man sogar  $x \sim \mu^{-6}$ .

Genau dasselbe gilt von der in § 4 betrachteten Kanalströmung, wenn der Kanal durch eine kontinuierliche Gruppe von Bewegungen in sich übergeht (zylindrischer oder schraubenförmiger Kanal).

#### § 4.

##### Erweiterungen. Andere Probleme.

Äußere Kraft. Das Auftreten einer äußeren Massenkraft  $X(x, t)$ :  $X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ändert nichts am Schluß, wofern

$$\iiint_{\mathcal{R}} X^2 dV$$

für alle  $t$  unter einer festen Schranke bleibt. Sie liefert nur einen Beitrag zur Linearform  $L(v)$  in (1.9).

Kanalströmung. Die Flüssigkeit ströme durch einen unendlich langen ruhenden Kanal und hafte an der Wand ( $u = 0$  auf  $\mathcal{R}$ ). Wir nehmen an, daß die Randfläche in der Form  $r = r(\alpha, z)$  darstellbar ist, wo  $r > 0$ ,  $\alpha, z$  Zylinderkoordinaten bedeuten ( $r$  hat die Periode  $2\pi$  in  $\alpha$ ). Um ein Problem mit

<sup>6)</sup> Für hinreichend große  $\mu$  gibt es vermutlich nur eine Strömung in dem Sinne, daß für irgend zwei Strömungen  $u_1(x, t)$  und  $u_2(x, t)$  stets  $K(u_1 - u_2) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt. Im Falle der in § 4 betrachteten Kanalströmung, insbesondere im zylindrischen Kanal, ist das wohlbekannt und leicht aus der Energiegleichung herzuleiten, indem man für  $h$  die stationäre Lösung einsetzt.

Bei abnehmendem  $\mu$  treten kompliziertere mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten im Phasenraum auf, auf welche sich die Bewegungen für  $t \rightarrow \infty$  konzentrieren. Sie entsprechen den turbulenten Strömungen der Flüssigkeit.

endlichem Grundgebiet zu erhalten, setzen wir Kanal und Strömung als periodisch in der  $z$ -Richtung voraus,

$$r(\alpha, z + P) \equiv r(\alpha, z)$$

und

$$u(r, \alpha, z + P, t) \equiv u(r, \alpha, z, t).$$

Das Problem der Strömung bei vorgegebener Anfangs-Geschwindigkeitsverteilung wird erst dann ein bestimmtes, wenn auch der Querschnittsfluß

$$(4.1) \quad Q = Q(t) = \iint_{z=\text{const}} u_z d\sigma$$

als Funktion von  $t$  vorgeschrieben ist; denn der Periodizitätsmodul des Druckes (mittleres Druckgefälle in der  $z$ -Richtung) geht als Unbekannte ein.

Voraussetzung.  $Q, dQ/dt$  sind beschränkte Funktionen von  $t$ .

Zur Übertragung des Beweises muß man vom Hilfsfelde  $h$  außer der Erfüllung der Rand-, Periodizitäts- und Divergenzbedingung auch

$$(4.2) \quad Q(t) = \iint_{z=\text{const}} h_z d\sigma$$

verlangen. Bei der Herleitung von (1.9) verschwindet dann wegen

$$\iint_{z=\text{const}} v_z d\sigma = 0$$

wie vorher der Term

$$\iiint_{\mathfrak{G}} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dV,$$

wo  $\mathfrak{G}$  ein festes Periodenstück  $0 \leq z < P$  des Kanals bedeutet. (1.9) gilt also mit dieser Maßgabe unverändert.

Die Konstruktion von  $h(x, t)$  geht nun genau so von statten wie oben, nur daß diesmal

$$q = \frac{Q(t)}{2\pi} \text{grad } \alpha$$

mit der Zylinderkoordinate  $\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3)$  gewählt wird. Wieder wird

$$h(x, t) = \text{rot } \varphi q$$

mit genau so gebildetem  $\varphi = \varphi(s)$  gesetzt. Wegen  $\text{rot grad} \equiv 0$  und  $\varphi'(0) = 0$  ist  $h = 0$  auf  $\mathfrak{R}$ . Es gilt aber auch (4.2). Nach dem Stokesschen Integralsatz ist nämlich das Integral gleich der Zirkulation des Vektors  $\varphi q = q'(\varphi = 1$  auf  $\mathfrak{R})$  längs der Randlinie des Querschnitts, also gleich  $Q(t)/2\pi$  mal  $\oint d\alpha$ , w. z. b. w.

Die Zeit  $t$  kommt hier in  $h$  nur im Faktor  $Q(t)$  vor. Unter Berücksichtigung der obigen Voraussetzung kann nunmehr der Beweis des Schrankensatzes

genau so wie vorher zu Ende geführt werden. Die Schranken  $\kappa$ ,  $\varrho$  hängen hier ebenso von  $\mu$  ab wie oben.

Andere Varianten. Unter Verzicht auf genauere Ausführung der Einzelheiten sei schließlich auf die Möglichkeit hingewiesen, den Schrankensatz für die folgenden Problemvarianten zu beweisen.

Es dürfen die Randflächen Kanten oder Ecken besitzen. Auch ist die Voraussetzung eines positiven Minimalabstandes der Randflächen voneinander im ersten oben betrachteten Modell unwesentlich. Sie ist bei den bekannten Versuchsanordnungen auch nicht erfüllt. Man halte sich vor Augen, in welcher Weise die vorgeschriebene Bewegung der inneren Randflächen relativ zur äußeren praktisch verwirklicht wird. Es treten dann auf dem Rande  $\mathfrak{R}$  Kanten auf, bei deren Überschreitung die Randwerte von  $u$  einen Sprung machen. Ein Modell dieser Art wird auch durch ein in zylindrische Schäfte ausmündendes, flüssigkeitserfülltes Gefäß mit Kolben in denselben, welche vorgeschriebene Bewegungen ausführen, dargestellt. Der Endlichkeitssatz bleibt bestehen, wenn die Behauptung der Beschränktheit von  $\partial h_i / \partial x$ , als Funktion von  $x$ ,  $t$  durch eine weitere ersetzt wird. Infolge jenes Sprunges ist hier immer  $I(u) = I(h) = \infty$ . Die in der Einleitung erwähnte Folgerung gilt also nur bezüglich  $K$ .

Das Gebiet  $\mathfrak{G}$  darf ferner den unendlich fernen Punkt enthalten; die Flüssigkeit möge dort ruhen. Auch dürfen punkt- und linienhafte Quellen auftreten. Auch hier gilt mutatis mutandis der Endlichkeitssatz. Da im letzteren Falle stets  $K(u) = K(h) = \infty$  ist, gilt der Satz der Einleitung nicht.

(Eingegangen am 21. 9. 1940.)

Aus dem

**Jahresbericht**  
**der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft**  
**der Wissenschaften für das Jahr 1939.**

*Mathematisch-physische Preisaufgabe 1940.*

Gewünscht wird eine Untersuchung, die unsere Kenntnis der älteren griechischen Arithmetik und Algebra, im besonderen der Arithmetik der Pythagoräer, von der nur sehr Dürftiges überliefert ist, vermehrt. Es ist zu hoffen, daß die babylonische Mathematik auf der einen Seite, die pythagoräische Musiklehre auf der anderen Seite in Verbindung mit den bekannten Quellen ein neues Licht auf die griechische Arithmetik werfen kann.

Einlieferung bis zum 31. XII. 1942.

Preis RM 500,— oder die goldene Medaille des fürstlichen Stifters und RM 250,—. Für die Drucklegung der Preisarbeit sorgt die Gesellschaft.

*Bedingungen für die Bewerbung zu den Preisaufgaben:*

Die ohne Namensangabe einzureichenden Bewerbungsschriften sind in deutscher oder lateinischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich, wenn möglich mit der Schreibmaschine, einseitig beschrieben, mit Seitenzahlen sowie mit einem Kennwort versehen und von einem versiegelten Umschlag begleitet sein, der auf der Außenseite das Kennwort der Arbeit trägt und inwendig den Namen und die Anschrift des Verfassers angibt. Jede Bewerbungsschrift muß auf dem Titelblatt die Angabe einer Anschrift enthalten, an die die Arbeit für den Fall zurückzusenden ist, daß sie nicht preiswürdig befunden wird. Die Einsendungen sind an den *Archivar der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften, Universitäts-Bibliothek, Leipzig C 1, Beethovenstraße 6*, zu richten. Die Ergebnisse der Prüfung der eingegangenen Schriften werden im März des auf die Ablieferungsfrist folgenden Jahres bekanntgemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

Von der

**Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V.**

wurden Herrn Direktor Dipl.-Ing. E. Tritschler aus Chemnitz für seine Arbeit: „Stroboskopische Zeitwaage mit ortsveränderlicher Lichtblitzquelle“ und Herrn Vermessungsassessor Dipl.-Ing. E. Müller aus Berlin für seine Arbeit: „Über die gebräuchlichsten Uhrvergleiche ohne Registrierung für astronomisch-geodätische Zwecke“ je ein Preis zuerkannt.

uskünfte über die alljährlichen wissenschaftlichen Wettbewerbe der Gesellschaft gibt die *Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V., Berlin SW 68, Neuenburger Straße 8*.

n  
r  
u  
r-  
n

d

n  
n  
n  
g  
i-  
s-  
e  
n  
n  
n  
t.

7.  
ne  
“  
ne  
ir

er  
”,



